

1. نبسط : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

لدينا : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2$

خلاصة : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

2. نبين أن : $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} = 2 \sin 2x$

لدينا :

$$\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} = \frac{\sin 2x + \sin 6x + \sin 4x}{1 + \cos(2(2x)) + \cos 2x} = \frac{2 \sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) + \sin 4x}{1 + 2 \cos^2(2x) - 1 + \cos 2x}$$

$$= \frac{2 \sin(4x) \cos(-2x) + \sin 4x}{2 \cos^2(2x) + \cos 2x} = \frac{\sin(4x) [2 \cos(-2x) + 1]}{\cos 2x [2 \cos(2x) + 1]} = \frac{\sin(4x)}{\cos 2x} = \frac{2 \sin(2x) \cos(2x)}{\cos 2x} = 2 \sin(2x)$$

خلاصة : $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} = 2 \sin 2x$

1. حل المعادلة : $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

لدينا :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\cos\left(\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + \cos\left(\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[\cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \left\{ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} - k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

1. أوجد قيمة $\sin 2\alpha$ ثم استنتج قيمة α .

$$\text{لدينا : } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{خلاصة : } \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

نستنتج قيمة α :

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ : لدينا}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} \text{ : إذن } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right] \text{ و } \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ : لدينا}$$

$$\text{خلاصة : } \alpha = \frac{\pi}{12}$$

2. حل المعادلة : $x \in [0, 2\pi]; (\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = 0$

لدينا :

$$(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cos x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sin x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{12} \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \sin x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

الحلول التي تنتمي ل $[0, 2\pi]$

بالنسبة للحل $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ نضع $0 \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \leq 2\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ نحصل بعد الحسابات $k = 0$ أما $x = \frac{7\pi}{12}$.

بالنسبة للحل $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$ نضع $0 \leq -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq 2\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ نحصل بعد الحسابات $k = 1$ أما $x = \frac{19\pi}{12}$.

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي $S = \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا : الدالتين : $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ معرفتين على \mathbb{R} . إذن الدالة f معرفة على \mathbb{R} (مجموع و جداء دوال معرفة على \mathbb{R}).

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

2. بين أن : f دورية و دورها $T = \pi$. ثم استنتج D_E مجموعة دراسة f .

- لدينا : لكل x من \mathbb{R} كذلك $x + \pi \in \mathbb{R}$ و $x - \pi \in \mathbb{R}$.
 - ليكن x من \mathbb{R} .
- لدينا :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= 4 \cos^2(x + \pi) + \sqrt{3} \sin(x + \pi) \cos(x + \pi) + 3 \sin^2(x + \pi) - 4 \\ &= 4(-\cos x)^2 + \sqrt{3}(-\sin x)(-\cos x) + 3(-\sin x)^2 - 4 \\ &= 4 \cos^2(x) + \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \sin^2(x) - 4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه : $f(x + \pi) = f(x)$

خلاصة : f دورية و دورها $T = \pi$.

استنتاج : D_E مجموعة دراسة f .

بما أن : f دورية و دورها $T = \pi$ إذن : $D_E = [0, \pi] \cap \mathbb{R}^+ = [0, \pi]$

خلاصة : مجموعة دراس f هي $D_E = [0, \pi]$.

3.

أ- نبين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

لدينا :

$$f(x) = 4\cos^2(x) + \sqrt{3}\sin x \cos x + 3\sin^2(x) - 4 \Leftrightarrow f(x) = \underbrace{4\cos^2(x) + 4\sin^2(x)}_4 - \sin^2(x) + \sqrt{3}\sin x \cos x - 4$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4 - \sin^2(x) + \sqrt{3}\sin x \cos x - 4$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sin x \left[-\sin x + \sqrt{3}\cos x \right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sin x \left[-\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sin x \left[-\sin \frac{\pi}{6}\sin x + \cos \frac{\pi}{6}\cos x \right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{ومنه : } f(x) = 2\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$f(x) = 2\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \text{ : خلاصة}$$

ب- حل المعادلة : $f(x) = 0$: $x \in \mathbb{R}$ ومثل حلولها على الدائرة المثلثية .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ أو } \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \text{ أو } \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ أو } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ أو } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ أو } x = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$S = \left\{ x = k\pi , x = \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ : خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي}$$

نمثل الحلول على الدائرة المثلثية :

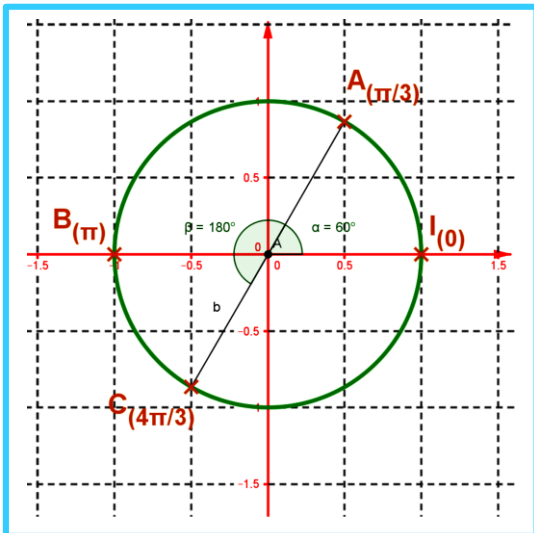
ت- حل المتراجحة : $f(x) \leq 0$: $x \in [0, \pi[$

4 حل المتراجحة : $f(x) \leq 0$: $x \in [0, \pi[$

$$x \in [0, \pi[: f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 0$$

بالنسبة ل $\sin x$:

على المجال $]0, \pi[$: $\sin x > 0$ وتتعدم في $x = 0$.



بالنسبة ل $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

لدينا : $x \in [0, \pi[\Leftrightarrow 0 \leq x < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$

ومنه : $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ فإن $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$ أي $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ فإن $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$

. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ فإن $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ أي $x = \frac{\pi}{3}$ فإن $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$ فإن $\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$ أي $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ فإن $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$

لنعتبر جدول الإشارة التالي :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\sin x$	+	+	+
$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	+	○	-
$f(x) = 2\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	+	○	-

خلاصة : من خلال الجدول نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة : $S = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

5

أ- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$

لدينا :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2\sin x \left[\cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x - \sin^2 x \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x - 1}{2} \quad ; \quad (\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \\
 &= \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \frac{1}{2} \\
 &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

خلاصة : $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$

تمارين : الحساب المثلثي

ب- أحسب $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ ثم استنتج قيمتي $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

$$(1) : f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$(2) : f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ من خلال (1) و (2) نحصل على :}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{ومنه : } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ لأن } \frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ إذن } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$$

$$\text{خلاصة : } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ و } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

1. بين أن : إذا كانت A و B و C قياسات زوايا مثلث فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$.

لدينا ABC مثلث إذن : مجموع قياسات زواياه هي $A + B + C = \pi$

و منه : $A + B = \pi - C$

و بالتالي :

$$\tan(A + B) = \tan(\pi - C) \Leftrightarrow \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)} = -\tan(C); \left(\tan(\pi - C) = -\tan(C)\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(A) + \tan(B) = -\tan(C)[1 - \tan(A)\tan(B)]$$

$$\Leftrightarrow \tan(A) + \tan(B) = -\tan(C) + \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\tan(A) + \tan(B) + \tan(C)} = \overbrace{\tan(A)\tan(B)\tan(C)}$$

$$\text{ومنه : } \tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

$$\text{خلاصة : } \tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

تصحيح من طرف التلميذ : بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: علوم رياضية