التمرين الأول

نضع : $A=\dfrac{\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}}{\cos\frac{\pi}{18}\ \sin\frac{\pi}{18}}$

1. بين أن : $\cos\frac{\pi}{18}-\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{18}=2\cos\frac{7\pi}{18}$
2. بين أن : $\cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{\pi}{18}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{9}$
3. استنتج أن : $A=4$

التمرين الثاني

نضع : $\alpha=\frac{\pi}{10}$ 1) تحقق أن $\sin 2\alpha=\cos 3\alpha$

2) بين أن $\cos 3\alpha=\cos\alpha\left(1-4\sin^2\alpha\right)$

3) استنتج قيمة $\sin\frac{\pi}{10}$ و $\cos\frac{\pi}{10}$

4) أحسب $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}$ و بين أن :

$$\sin\frac{7\pi}{30}=\frac{1}{8}\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+1-\sqrt{5}\right)$$

التمرين الثالث

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة $(E)\quad 8X^3-6X-1=0$

1) أ- بين أن $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$

ب- حل في $[0,2\pi[$ المعادلة $\cos 3x=\frac{1}{2}$

2) أ- استنتج حلول المعادلة (E)

ب- حدد قيمة كل من $a=\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}+\cos\frac{13\pi}{9}$

و $b=\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$

التمرين الرابع

ليكن α من المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ و بحيث $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

1) بين أن $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

2) أ- بين أن $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$

ب- استنتج أن $\cos 3\alpha=\sin\alpha$

3) حل في $\mathbb{R}$ $\cos 3x=\sin x$ ثم استنتج أن $\alpha=\frac{\pi}{8}$

4) حل في $\mathbb{R}$ $\cos x-\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x=\sqrt{2-\sqrt{2}}$

التمرين الخامس

بين أن $\prod_{k=0}^{k=n}\cos\frac{x}{2^k}=\dfrac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}$

التمرين السادس

1- بين أن $(\forall x\in\mathbb{R})\quad |\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}$

2- نعتبر المعادلة $(E):\quad 1+\cos^3x+\sin^3x=\frac{3}{2}\sin 2x$

أ- نضع $y=\sin x+\cos x$ أحسب $\sin x\cos x$ و $\sin^3x+\cos^3x$ بدلالة y

ب- بين أن $(E)\Leftrightarrow (y+1)\left(y^2+2y-5\right)=0$

3- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E)

التمرين السابع

نضع $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n

أ- بين أن

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{6}\right)-\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)\right]$$

ب- بين أن :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\times S_n=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{6}-\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right)\right]$$

ج-استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad S_n=2\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right)$

التمرين الثامن

نضع $T_n=\sum_{k=0}^{k=n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ لكل عدد طبيعي n بحيث $n\ge 2$

1) أحسب T_2 و T_3

2) أ- بين أن $(\forall n\ge 2)\quad T_n\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)=T_n-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

ب- استنتج أن $(\forall n\ge 2)\quad T_n=\dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$

التمرين التاسع

نضع $F(x)=\cos 3x+\cos 2x$

1) أحسب $F\left(\frac{\pi}{5}\right)$

2) بين أن $\cos 3x=4\cos^3x-3\cos x$

3) استنتج أن $F(x)=(1+\cos x)\left(4\cos^2x-2\cos x-1\right)$

4) حدد قيمة $\cos\frac{\pi}{5}$