

(10 نقط)

01

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n}; n \geq 0 \end{cases}$$

لنعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي :

1. نفترض أن $u_0 = 4$.أ- أحسب u_1 و u_2 .

$$u_2 = \frac{3u_1 + 4}{u_1} = \frac{3 \times 4 + 4}{4} = 4 \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{3u_0 + 4}{u_0} = \frac{3 \times 4 + 4}{4} = 4$$

لدينا :

ب- بين بالترجع أن $(u_n)_{n \geq 0}$ ثابتة وثابتها هو 4 (أي $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 4$)نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$ بالنسبة ل $n = 0$ لدينا $u_0 = 4$ إذن العلاقة صحيحة ل $n = 0$ نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي أن $u_n = 4$ (معطيات التراجع)نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1} = 4$.

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n} = \frac{3 \times 4 + 4}{4} = 4$$

لدينا : (حسب معطيات التراجع)

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = 4$

$$2. \text{ نأخذ } u_0 = 1 \text{ ونعتبر المتتالية } (v_n)_{n \geq 0} \text{ المعرفة ب: } v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}; n \geq 0$$

أ- أحسب v_0 .

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 1} = \frac{1 - 4}{1 + 1} = -\frac{3}{2}$$

لدينا :

ب- بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$.نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$ بالنسبة ل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1 > 0$ إذن العلاقة صحيحة ل $n = 0$ نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي أن $u_n > 0$ (معطيات التراجع)نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1} > 0$.

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} u_n > 0 \\ 3u_n + 4 > 4 \end{cases}$$

(حسب معطيات التراجع)

$$\Rightarrow \frac{3u_n + 4}{u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.



خلاصة: $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 0$

جـ: بين أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$.

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 4}{u_n} - 4}{\frac{3u_n + 4}{u_n} + 1} = \frac{-u_n + 4}{4u_n + 4} = -\frac{1}{4} \times \frac{u_n - 4}{u_n + 1} = -\frac{1}{4} \times v_n$$

ومنه $v_{n+1} = -\frac{1}{4} \times v_n$

خلاصة: $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$

3

أ: أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .

• حساب v_n بدلالة n :

بما أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$ إذن حدها العام هو :

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n-n_0} = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-0} = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

• حساب u_n بدلالة n :

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 4$$

$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 4$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-v_n - 4}{v_n - 1} = \frac{v_n + 4}{1 - v_n}$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

$$. u_n = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n} \text{ ومنه :}$$

$$. u_n = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

و $v_n = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ **خلاصة:** v_n ثم u_n بدلالة n :

ب: أحسب u_{10} .



$$u_{10} = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{10} + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{10}} \text{ لدينا :}$$

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \text{ أحسب المجموع :}$$

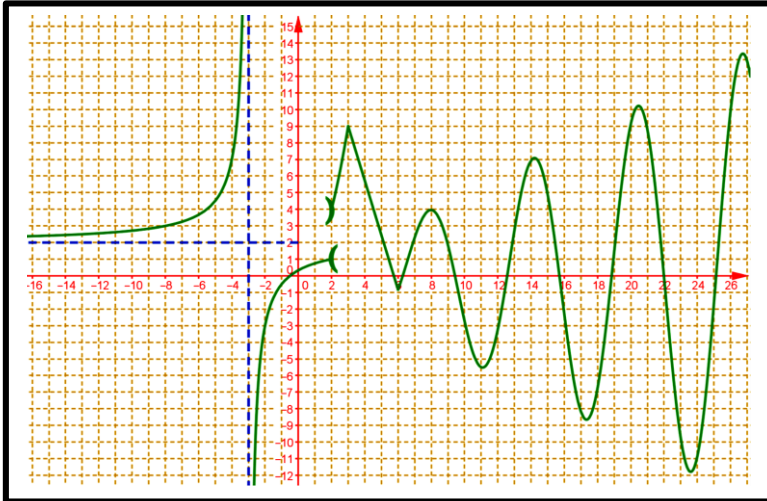
بما أن : $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$ إذن

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_{n_0} \times \frac{q^{n-n_0+1} - 1}{q-1}$$

$$= v_0 \times \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-0+1} - 1}{-\frac{1}{4} - 1} = -\frac{3}{2} \times \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{5}{4}} = \frac{6}{5} \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$S_n = \frac{6}{5} \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right] \text{ ومنه :}$$

$$S_n = \frac{6}{5} \left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1 \right] \text{ خلاصة :}$$



(3 نقط)

02

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

1. نحدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f .

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\} \text{ لدينا :}$$

2. استنتج مبيانيا نهايات f عند محددات D_f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$$

• f ليس لها نهاية بجوار $+\infty$ (لأن الدالة تأخذ قيم مرة موجبة و مرة سالبة و نعلم إن كان لدالة نهاية فهذه النهاية وحيدة)

(نقطتان)

03

1. نحدد m علما أن f لها نهاية في 2 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = mx + 4 ; x > 2 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x-2} ; x < 2 \end{cases}$$

• لدينا نهاية على يمين 2 هي : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} mx + 4 = 2m + 4$ (لأن f دالة حدودية) .

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2m + 4 \text{ ومنه :}$$



• لدينا نهاية على يسار 2 هي :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} = \frac{1}{6}$$

• ومنه : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{6}$

• f لها نهاية في 2 إذن النهاية على اليمين تساوي النهاية على اليسار أي $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

• ومنه : $\frac{1}{6} = 2m + 4$ أي $m = -\frac{23}{12}$

• خلاصة: قيمة m حيث f لها نهاية في 2 هي $m = -\frac{23}{12}$

(5 نقط)

04

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} \quad \dots 5 \quad \lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+2}{x-7} \quad \dots 4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3-x+4}{2-x^8} \quad \dots 3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^7 + 2x^3 - 21x^2 + 1 \quad \dots 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} 4x^3 - x^2 + 1 \quad \dots 1$$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 2} 4x^3 - x^2 + 1 = 4 \times 2^3 - 2^2 + 1 = 29$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^7 + 2x^3 - 21x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^7 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - x + 4}{2 - x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{-x^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{-x^5} = 0$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^5 = -\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+2}{x-7} = -\infty$$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 7^-} x+2 = 9$ و $\lim_{x \rightarrow 7^-} x-7 = 0^-$ ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{8}$$