تصحيح الفرض المحروس رقم ③

التمرين ①

1) • لدينا "$P: (\forall x \in \mathbb{R}^{*})(\exists n \in \mathbb{N})\ nx > 1$"

إذن "$\bar{P}: (\exists x \in \mathbb{R}^{*})(\forall n \in \mathbb{N})\ nx \leq 1$"

• ولدينا "$Q: [(\forall n \in \mathbb{N}^{*})\ |x| < \frac{1}{n}] \Rightarrow x = 0$"

- نفي العبارة Q :

نعلم أن نفي الاستلزام $a \Rightarrow b$

هي العبارة a و $\bar{b}$

ومنه فإن:

"$\bar{Q}: ((\forall n \in \mathbb{N}^{*})\ |x| < \frac{1}{n})$ و $x \neq 0$"

2) "$P: (\forall x \in \mathbb{R}^{+*})(\exists n \in \mathbb{N})\ nx > 1$"

لنبين أن P صحيحة

$$nx > 1 \Leftrightarrow n > \frac{1}{x}$$

ونعلم أن $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$

نضع $p = E\left(\frac{1}{x}\right)$ عدد طبيعي لأن $\left(\frac{1}{x} \in \mathbb{R}^{+*}\right)$

ومنه $p \leq \frac{1}{x} < p+1$; نضع $n = p+1$

$$\frac{1}{x} < n$$

إذن $(\exists n = p+1 \in \mathbb{N})\ nx > 1$

التمرين ②

1) بين أن $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(x > 2 ; y > 2) \Rightarrow (xy > x+y)$

$$(x > 2 , y > 2) \Rightarrow (x-1 > 1 , y-1 > 1)$$
$$\Rightarrow (x-1)(y-1) > 1$$
$$\Rightarrow 1 + xy - x - y > 1$$
$$\Rightarrow xy > x + y$$

2) بين بالاستدلال بالعكس:

$(\forall x > 2)(\forall y > 2): (x \neq y) \Rightarrow (x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1})$

أي نبين أن

$(\forall x > 2)(\forall y > 2): (x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1}) \Rightarrow (x = y)$

$$x\sqrt{y-1} = y\sqrt{x-1} \Rightarrow x^2(y-1) = y^2(x-1)$$
$$\Rightarrow x^2 y - x^2 - y^2 x + y^2 = 0$$
$$\Rightarrow xy(x-y) - (x-y)(x+y) = 0$$
$$\Rightarrow (x-y)(xy - x - y) = 0$$

وبما أن $(\forall x > 2)(\forall y > 2)\ xy > x+y$

فإن $xy - x - y \neq 0$

وعليه $x = y$

وبالتالي فإن

$(\forall x > 2)(\forall y > 2): [x \neq y \Rightarrow x\sqrt{y-1} \neq y\sqrt{x-1}]$

التمرين ③

1) بين بالترجع أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^{*}) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right)$$

من أجل $n = 0$

لدينا $\frac{1+1}{3^1} = \frac{2}{3}$

و $\frac{1}{4}\left(5 - \frac{2 \times 1 + 5}{3^1}\right) = \frac{2}{3}$

علاقة صحيحة

نفترض أن: $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right)$

ونبين أن: $\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$

لدينا

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{k+1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} + \frac{n+2}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right) + \frac{n+2}{3^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n} + \frac{4n+8}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{6n+15-4n-8}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+7}{3^{n+1}}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2(n+1)+5}{3^{n+1}}\right)$$

وحسب مبدأ الترجع فإن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^{*}) \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{3^k} = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{2n+5}{3^n}\right)$$

2) بين بالترجع أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^{*}) \sum_{k=1}^{k=2n+1} (-1)^{k+1} k = n+1$$

من أجل $n = 1$

لدينا $\sum_{k=1}^{k=3} (-1)^{k+1} k = 1 - 2 + 3 = 2 = 1 + 1$

علاقة صحيحة.

نفترض أن $\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k = n+1$

ونبين أن $\sum_{k=1}^{2(n+1)+1}(-1)^{k+1}k = n+2$

لدينا $\sum_{k=1}^{2n+3}(-1)^{k+1}k = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k + (-1)^{2n+3}(2n+2)+(-1)^{2n+4}(2n+3)$

$$= n+1-(2n+2)+(2n+3)$$

$$= n+1-\cancel{2n}-2+\cancel{2n}+3$$

$$= n+2$$

وبالتالي فإن

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}k = n+1$$

التمرين 4 :

1) احسب u_1 وبين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ a<u_n<b$

لدينا $u_1=\dfrac{ab}{a+b-u_0}$

$$=\frac{ab}{a+b-\frac{a+b}{2}}$$

$$=\frac{2ab}{2a+2b-a-b}$$

$$u_1=\frac{2ab}{a+b}$$

من أجل $n=0$ صحيحة $a<u_0=\dfrac{a+b}{2}<b$

نفترض أن : $a<u_n<b$

ونبين أن : $a<u_{n+1}<b$

لدينا $a<u_n<b$

$$-b<-u_n<-a$$

$$a<a+b-u_n<b$$

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a+b-u_n}<\frac{1}{a}$$

$$a<\frac{ab}{a+b-u_n}<b$$

$$a<u_{n+1}<b$$

وحسب مبدأ الترجع

فإن : $a<u_n<b$

2) بين أن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية :

يعني نبين أن $u_{n+1}<u_n$

لدينا $u_{n+1}-u_n=\dfrac{ab}{a+b-u_n}-u_n$

$$=\frac{ab-au_n-bu_n+u_n^2}{a+b-u_n}$$

$$=\frac{a(b-u_n)-u_n(b-u_n)}{a+b-u_n}$$

$$=\frac{(b-u_n)(a-u_n)}{a+b-u_n}$$

ولدينا $a<u_n<b$

يعني $-b<-u_n<-a$

$a-u_n<0$ و $b-u_n>0$

وبما أن $0<a<a+b-u_n<b$

فإن $\dfrac{(b-u_n)(a-u_n)}{a+b-u_n}<0$

إذن $u_{n+1}<u_n$

ومنه فإن $(u_n)_n$ متتالية تناقصية

3) أ- نبين أن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{a}{b}$

لدينا $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$

$$=\frac{\frac{ab}{a+b-u_n}-a}{\frac{ab}{a+b-u_n}-b}$$

$$=\frac{ab-a^2-ab+au_n}{ab-ab-b^2+bu_n}$$

$$=\frac{a(a-u_n)}{b(b-u_n)}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{u_n-a}{u_n-b}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot v_n$$

إذن $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{a}{b}$

ب- لنبين أن $u_n = \dfrac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = \dfrac{a \cdot b^0 + b \cdot a^0}{a^0 + b^0}$

$u_0 = \dfrac{a+b}{2}$ صحيحة

نفترض أن : $u_n = \dfrac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

ونبين أن : $u_{n+1} = \dfrac{ab^{n+1} + ba^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$

لدينا

$$u_{n+1} = \frac{ab}{a+b-u_n}$$

$$= \frac{ab}{a+b-\dfrac{ab^n+ba^n}{a^n+b^n}}$$

$$= \frac{ab}{\dfrac{(a+b)(a^n+b^n) - ab^n - ba^n}{a^n+b^n}}$$

$$= \frac{ab(a^n+b^n)}{a \cdot a^n + \cancel{ab^n} + \cancel{ba^n} + b \cdot b^n - \cancel{ab^n} - \cancel{ba^n}}$$

$$= \frac{b \cdot a^{n+1} + ab^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$$

وحسب مبدأ الترجع فإن

$$u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$$

التمرين (5) :

1) احسب u_2 و u_3

لدينا

$$u_2 = 5u_1 - 6u_0$$
$$= 5 \times 1 - 6 \times 2$$
$$= 5 - 12$$
$$u_2 = -7$$

$$u_3 = 5u_2 - 6u_1$$
$$= 5 \times (-7) - 6 \times 1$$
$$= -35 - 6$$
$$u_3 = -41$$

2) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية محددا أساس

نضع $V_n = u_{n+1} - 3u_n$

لدينا

$$V_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$$
$$= 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}$$
$$= 2u_{n+1} - 6u_n$$
$$= 2(u_{n+1} - 3u_n)$$
$$= 2 \cdot V_n$$

إذن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

من إنجاز التلميذ ياسر السياري

التمرين 4 :

3) ب- لدينا

$$V_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$$

$$V_n u_n - bV_n = u_n - a$$

$$V_n u_n - u_n = bV_n - a$$

$$u_n(V_n - 1) = bV_n - a$$

$$u_n = \frac{bV_n - a}{V_n - 1}$$

وعلما أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$ و $V_0 = -1$

فإن :

$$V_n = V_0 q^n$$

$$V_n = -\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

وعليه :

$$u_n = \frac{-b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n - a}{-\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}$$

$$u_n = \frac{\dfrac{-a^n b}{b^n} - \dfrac{ab^n}{b^n}}{\dfrac{-a^n}{b^n} - \dfrac{b^n}{b^n}}$$

$$u_n = \frac{-a^n b - ab^n}{-a^n - b^n}$$

$$u_n = \frac{a^n b + ab^n}{a^n + b^n}$$