

10 نقط

نعتبر في (E) النقط $A(-3,0,-1)$ و $B(1,5,-1)$ و $C(-1,3,0)$

(1) ندرس استقامة النقط F و CA .

لهذا نحسب المحددات المستخرجة :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(4,5,0)$ و $\overrightarrow{AC}(2,3,1)$ ومنه : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ إذن \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مستقيمتين .

خلاصة : النقط A و B و C غير مستقيمية .

(2) اعطاء معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد بالنقط A و B و C .

لدينا : $M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ y & 5 & 3 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+5) \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 4y + 2z + 17 = 0$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $5x - 4y + 2z + 17 = 0$: (P).

(3) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء (E) حيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + z - 10 = 0$

هل النقطة $E(-5,0,0)$ تنتمي إلى (S) .

لدينا : $(-5)^2 + 10 - 10 = 25 \neq 0$ و منه : $E(-5,0,0) \notin (S)$.

خلاصة : $E(-5,0,0) \notin (S)$

(4) بين أن: (S) فلكة محدد مركزها و شعاعها .

لدينا : $x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 + z - 10 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{81}{5} = \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

المعادلة التالية تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها : $\Omega\left(1, 3, \frac{1}{2}\right)$ و شعاعها $R_s = \frac{9}{2}$.

خلاصة : (S) هي فلكة : مركزها : $\Omega\left(1, 3, -\frac{1}{2}\right)$ و شعاعها $R_s = \frac{9}{2}$.

(5) أحسب $d(\Omega, (P))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (P) .

$$d(\Omega, (P)) = \frac{\left|5 \times 1 - 4 \times 3 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 17\right|}{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

لدينا :

خلاصة: $d(\Omega, (P)) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

(6) استنتج الوضع النسبي للمستوى (P) و الفلكة (S) .

لدينا: $d = d(\Omega, (P)) = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ و $R_S = \frac{9}{2}$ ومنه: $\frac{3\sqrt{5}}{5} < \frac{9}{2}$ أي $d = d(\Omega, (P)) < R_S$

خلاصة: المستوى (P) و الفلكة (S) يتقاطعان وفق دائرة.

(7) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من Ω و العمودي على المستوى (P) .

لدينا $\vec{n}(5, -4, 2)$ متجهة منظمية على المستوى (P) إذن هي موجهة للمستقيم (D) و (D) يمر من $\Omega(1, 3, -\frac{1}{2})$

خلاصة: تمثل بارامتريا ل (D) هو $(D) : t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 3 - 4t \\ z = -\frac{1}{2} + 2t \end{cases}$

(8) حدد مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (C) .

لدينا: H مركز الدائرة (C) هي المسقط العمودي ل Ω على (P) أو أيضا: H هي تقاطع (P) و (D) .

$$H(x, y, z) \in (P) \cap (D) \Leftrightarrow \begin{cases} H(x, y, z) \in (P) \\ H(x, y, z) \in (D) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 4y + 2z + 17 = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = 3 - 4t \\ z = -\frac{1}{2} + 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5(1 + 5t) - 4(3 - 4t) + 2\left(-\frac{1}{2} + 2t\right) + 17 = 0 \\ x = 1 + 5t \\ y = 3 - 4t \\ z = -\frac{1}{2} + 2t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{5} \\ x = 0 \\ y = \frac{19}{5} \\ z = \frac{-9}{10} \end{cases}$$

خلاصة: مثلث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (C) هو $(0, \frac{19}{5}, \frac{-9}{10})$.

(9) حدد شعاع الدائرة (C) تقاطع المستوى (P) و الفلكة (S).

لدينا: $R = \sqrt{(R_s)^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2} = 3\frac{\sqrt{205}}{10}$ شعاع الدائرة (C) يحقق ما يلي:

خلاصة: شعاع الدائرة (C) هو $R = 3\frac{\sqrt{205}}{10}$

(10) اعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في $F(1,3,4)$.
لدينا:

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \\ z-4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}(z-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-4 = 0$$

خلاصة: معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في $F(1,3,4)$ هي: $z-4=0$: (Q).

3 نقط

.02

في مؤسسة للتعليم الخاص كل تلميذ يختار لغة واحدة فقط من بين اللغتين : الكورية و الصينية و نوع رياضي واحد فقط من بين : السباحة - كرة المضرب - المسايقة . نأخذ مجموعة من تلاميذ هذه المؤسسة نجد 12 يمارسون المسايقة و 15 يمارسون كرة المضرب و 16 يدرسون الصينية . و من جهة أخرى من بين الذين يدرسون الكورية هناك 8 يمارسون المسايقة و 3 يمارسون السباحة ؛ 6 يمارسون كرة المضرب يدرسون الصينية .

1. مثل المعطيات على الجدول التالي ثم أتمم الجدول يوضح توزيع التلاميذ حسب اللغة التي يدرسونها و الرياضة التي يمارسونها .

الرياضة \ اللغة	السباحة	كرة المضرب	المسايقة	المجموع
الكورية	3	9	8	20
الصينية	6	6	4	16
المجموع	9	15	12	36

2. ما هو عدد تلاميذ هذه المجموعة ؟

من خلال الجدول نستنتج أن عدد تلاميذ هذه المجموعة هو 36 .

3 نقط

.03

1. حدد العدد الصحيح الطبيعي n حيث : $A_n^3 = 210n$.

لدينا : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ (أي $n \geq 3$) .

$$. A_n^3 = 210n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 120n \quad \text{ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 120 ; (n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 280 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = -13 \not\geq 3 \text{ أو } n = 16 \geq 3$$

خلاصة : العدد المطلوب هو $n = 16$.

$$. \sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k \quad \text{نسطة ما يلي : أ-}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k &= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k - (C_n^0 + C_n^n) \\ &= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k 1^k \times 1^{n-k} - (1+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1+1)^n - 2 \\ &= 2^n - 2 \end{aligned}$$

(حسب حدائية النيوتن $a=1$ و $b=1$)

3. ما هو عدد الأعداد حيث A " المتكونة من 4 أرقام و تحتوي على الرقم 0 ؟"

لدينا : رقم الوحدات له 10 اختيارات و رقم العشرات له 10 اختيارات و رقم المئات له 10 اختيارات و رقم الآلاف له 9 اختيارات .

ومنه : عدد الأعداد المتكونة من 4 أرقام هو $\text{card}\Omega = 9 \times 10^3 = 9000$.

من جهة أخرى : نستعمل نفي العبارة A هو \bar{A} " عدد الأعداد التي تكتب بدون استعمال الرقم 0 " .

رقم الوحدات له 9 اختيارات و رقم العشرات له 9 اختيارات و رقم المئات له 9 اختيارات و رقم الآلاف له 9 اختيارات .

$$\text{ومنه : } \text{card}\bar{A} = 9^4$$

$$\text{إذن : } \text{card}A = \text{card}\Omega - \text{card}\bar{A} = 9 \times 10^3 - 9^4 = 2439$$

خلاصة : عدد الأعداد المتكونة من 4 أرقام و تحتوي على الرقم 0 هو $\text{card}A = 2439$.

4 نقط

04

صندوق يحتوي على n^2 كرة مرقمة من 1 إلى n^2 . نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق .

1. عدد السحبات الممكنة .

بما أننا نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق من بين n^2 كرة إذن كل سحبة تمثل تآليفة ل 3 من بين n^2 ومنه عدد السحبات الممكنة هو

عدد التآليفات ل 3 من بين n^2 .

$$\text{خلاصة : عدد السحبات الممكنة هو } \text{card}\Omega = C_{n^2}^3 = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)}{3!}$$

2. ما هو عدد السحبات حيث :

A " كرة واحدة بالضبط تحمل رقم يكون مربع كامل " .

لدينا عدد الكرات التي تحمل رقم يكون مربع كامل هو n

• إذن تكون كرة تحمل مربع كامل أي $C_n^1 = n$.

$$\text{• كرتين لا تحملان رقم يكون مربع كامل من بين } n^2 - n \text{ أي } C_{n^2-n}^2 = \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{1 \times 2}$$

$$\text{• } \text{card}A = C_n^1 \times C_{n^2-n}^2 = n \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)}{1 \times 2}$$

خلاصة: A " كرة واحدة بالضبط تحمل رقم يكون مربع كامل " لدينا $\text{card}A = C_n^1 \times C_{n^2-n}^2$.

B " على الأقل كرة تحمل رقم يكون مربع كامل "

لنعتبر \bar{B} نفي B ومنه : \bar{B} " ولو كرة تحمل رقم يكون مربع كامل "

لدينا: عدد الكرات التي لا تحمل رقم يكون مربع كامل هو $n^2 - n$ ومنه : $\text{card}\bar{B} = C_{n^2-n}^3 = \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)(n^2-n-2)}{3!}$

ومنه : $\text{card}B = \text{card}\Omega - \text{card}\bar{B} = C_{n^2}^3 - C_{n^2-n}^3 = \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2)}{3!} - \frac{(n^2-n)(n^2-n-1)(n^2-n-2)}{3!}$

خلاصة: B " على الأقل كرة تحمل رقم يكون مربع كامل " هو : $\text{card}B = \text{card}\Omega - \text{card}\bar{B} = C_{n^2}^3 - C_{n^2-n}^3$.

3. في هذا السؤال نسحب 3 كرات بالتتابع وبدون إحلال. ما هو عدد السحبات حيث : C " مجموع أرقام الكرات الثلاث هو $3n^2 - 3$ "

نضع x و y و z أرقام 3 الكرات المسحوبة بالتتابع وبدون إحلال مع $x \leq n^2$ و $y \leq n^2$ و $z \leq n^2$ إذن $y + z \leq 2n^2$ (1)

نلاحظ أن : كرة تحمل رقم $x < n^2 - 3$ غير ممكن لأن $x + y + z = 3n^2 - 3$ ومنه

$$x + y + z < x + y + n^2 - 3$$

$$3n^2 - 3 < x + y + n^2 - 3$$

$$2n^2 < x + y \quad ; \quad (2)$$

حسب (1) و (2) غير ممكن إذن الكرات الثلاث أرقامها أكبر من أو يساوي $n^2 - 2$ و بما أن السحب بالتتابع وبدون إحلال ل 3 كرات إذن

الكرات 3 أرقامها هي : n^2 أو $n^2 - 1$ أو $n^2 - 2$ ومجموع هذه الكرات هو $n^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 2) = 3n^2 - 3$

إذن عدد السحبات بالتتابع ل 3 كرات حيث مجموع أرقامها هو : $3n^2 - 3$ من بين الكرات الثلاث هو تبديلة ل 3 (أو ترتيبية بدون تكرار ل 3 من

بين 3)

خلاصة: عدد السحبات حيث : C " مجموع أرقام الكرات الثلاث هو $3n^2 - 3$ " هو $\text{card}C = 3! = 6$ أو أيضا : $\text{card}C = A_3^3 = 3! = 6$

نهاية الأجوبة