منـــارة الـــفـــردوس	تصحيح فرض محروس رقم 01	الأولـى بالـك علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الأولـى : 2010/2009	ذ : عبدالله بن لـختير

- التمرين رقم 01:

1)- إذا كانت s و t عبارتين ، فإن : $\rceil(s \Rightarrow t) \Leftrightarrow \left(s \ \overline{\text{و}} \ \rceil t\right)$.

إذن نفي العبارة : «$\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$» : p هي العبارة :

$$\rceil p : « \ \left(\exists x \in \mathbb{R}\right) / \ x^2 \in \mathbb{Q} \ \overline{\text{و}} \ x \notin \mathbb{Q} \ »$$

2)- نبين أن $\rceil p$ عبارة صحيحة .

نأخذ $x = \sqrt{2}$ لدينا : $x^2 = 2 \in \mathbb{Q}$ و نعلم أن $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ، إذن $\rceil p$ عبارة صحيحة .

و بالتالي فإن p عبارة خاطئة .

- التمرين رقم 02: $(02\,pts)$

← تكون المعادلة (E) معرفة إذا كان $x \in [1;+\infty[$ و $y \in [4;+\infty[$.

و في هذه الحالة ، لدينا :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow x - 2\sqrt{x-1} + y - 4\sqrt{y-4} = 0 \\
&\Leftrightarrow x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 + y - 4 - 4\sqrt{y-4} + 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\sqrt{x-1} + 1^2 + \left(\sqrt{y-4}\right)^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{y-4} + 2^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{y-4} - 2\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-4} - 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 8 \end{cases}
\end{aligned}$$

و بالتالي ، فإن : $S = \left\{(2;8)\right\}$.

- التمرين رقم 03:

لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $\mathrm{P}(n) = n^2 + 7n + 12$.

1)- لكل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}
(n+4)^2 - \mathrm{P}(n) &= \left(n^2 + 8n + 16\right) - \left(n^2 + 7n + 12\right) \\
&= n + 4 \geq 4
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(n) - (n+3)^2 &= \left(n^2 + 7n + 12\right) - \left(n^2 + 6n + 9\right) \\
&= n + 3 \geq 3
\end{aligned}$$

← إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+4)^2 > \mathrm{P}(n)$ و $(\forall n \in \mathbb{N}); \mathrm{P}(n) > (n+3)^2$

و بالتالي ، فإن : $(\forall n \in \mathbb{N}), (n+3)^2 < \mathrm{P}(n) < (n+4)^2$.

2)- نبين بالخلف أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$.

- لنفترض أنه : $(\exists n\in\mathbb{N}),\sqrt{P(n)}\in\mathbb{N}$

إذن : $(\exists a\in\mathbb{N})/\sqrt{P(n)}=a$ ، بمعنى أنه : $(\exists a\in\mathbb{N})/P(n)=a^2$

و باستعمال نتيجة السؤال 1)- نستنتج أنه : $(\exists a\in\mathbb{N})/(n+3)^2<a^2<(n+4)^2$.

و هذا تناقض ، لأنه لا يوجد مربع كامل بين المربعين المتتابعين $(n+3)^2$ و $(n+4)^2$. إذن إفتراضنا خاطىء

و بالتالي فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$.

- <u>التمرين رقم 04</u>:

- نبين بفصل الحالات : $x\le 0$ و $x\ge 1$ و $0<x<1$ أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}),x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0 .$$

لكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع : $P(x)=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}$.

- في حالة $x\le 0$ ، لدينا :

$x^6+x^4+x^2\ge 0$ و $-(x^5+x^3+x)\ge 0$ (لأن : $x^5+x^3+x\le 0$)

إذن : $x^6+x^4+x^2-(x^5+x^3+x)\ge 0$.

و منه فإن : $(\forall x\in\mathbb{R}^-),P(x)\ge\frac{3}{4}$.

- في حالة $x\ge 1$ ، لدينا :

$x^6-x^5=x^5(x-1)\ge 0$ و $x^4-x^3=x^3(x-1)\ge 0$ و $x^2-x=x(x-1)\ge 0$

إذن : $(\forall x\in[1;+\infty[),P(x)\ge\frac{3}{4}$.

- و في حالة $0<x<1$ ، لدينا :

$$\begin{aligned}P(x)&=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(x^6-x^3+\frac{1}{4}\right)+\left(x^4-x^5\right)+\frac{1}{4}\\&=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+x^4(1-x)+\frac{1}{4}\end{aligned}$$

و بما أن : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$ و $\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$ و $x^4(1-x)>0$ ، فإن : $(\forall x\in]0;1[),P(x)>\frac{1}{4}$.

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R}),P(x)>\frac{1}{4}$ ، و بالتالي فإن : $(\forall x\in\mathbb{R}),P(x)>0$.

- <u>التمرين رقم 05</u>:

- لكل a و b من $\mathbb{R}^{*+}$ ، لدينا :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\frac{(a+b)^2-4ab}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}$$

و بما أن $a\ne b$ ، فإن : $(a-b)^2>0$. إذن : $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

- إستنتاج :

إذا كانت a و b و c و d أعدادا حقيقية موجبة قطعا و مختلفة فيما بينها مثنى مثنى ، فإن :

$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ و $cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2$.

و بضرب طرفي المتفاوتتين السابقتين ، نحصل على : $abcd<\frac{\left[(a+b)\times(c+d)\right]^2}{4}$.

و بما أن : $(a+b)\times(c+d)\le\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^2$

فإن : $abcd<\frac{\left[(a+b)\times(c+d)\right]^2}{4}\le\frac{1}{4^2}\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^4$.

و بذلك يتحقق المطلوب .

- التمرين رقم 06:

1)- لكل x و y من $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $x^2+y^2=1$ ، لدينا :

$$(x+y)^2-2=(x+y)^2-2\left(x^2+y^2\right)=-(x-y)^2\le 0$$

إذن : $(x+y)^2\le 2$ ، بمعنى أن : $x+y\le\sqrt{2}$.

- و من جهة أخرى :

لدينا : $\left(x^2<x^2+y^2=1\right)\Rightarrow 0<x<1$ و $\left(y^2<x^2+y^2=1\right)\Rightarrow 0<y<1$

و بما أن : $(x+y)-1=(x+y)-\left(x^2+y^2\right)=x(1-x)+y(1-y)$

فإن : $(x+y)-1>0$.

إذن : $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2;x^2+y^2=1\Rightarrow\left(1<x+y\le\sqrt{2}\right)$.

2)- ليكن x و y من $\mathbb{R}^{*-}$ بحيث $x^2+y^2=1$.

بما أن : $-x\in\mathbb{R}^{*+}$ و $-y\in\mathbb{R}^{*+}$ و $(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2=1$

فإن : $1<(-x)+(-y)\le\sqrt{2}$

إذن : $-\sqrt{2}\le x+y<-1$.

- التمرين رقم 07:

1)- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و n عدد فردي .

نعلم أنه يوجد $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{0;1;2;3\}$ بحيث : $n=4k+r$.

و بما أن n فردي فإن $r\notin\{0;2\}$ (إذ لو كان $r\in\{0;2\}$ لكان n زوجيا و هذا غير ممكن)

إذن : $n=4k+r$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{1;3\}$.

2)- للبرهان بمضاد العكس على أن :

(n عدد زوجي) $\Rightarrow$ (n^2-1 لا يقبل القسمة على 8)

نبين أن : (n^2-1 يقبل القسمة على 8) $\Rightarrow$ (n عدد فردي) .

- إذا كان n عددا فرديا ، فإن : $n=4k+r$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{1;3\}$

في حالة $r=1$ ، لدينا :

$$n^2-1=(4k+1)^2-1=4k\times(4k+2)=8k(2k+1)$$

إذن n^2-1 يقبل القسمة على 8 .

و في حالة $r=3$ ، لدينا :

$$n^2-1=(4k+3)^2-1=(4k+2)\times(4k+4)=8(k+1)(2k+1)$$

إذن n^2-1 يقبل القسمة على 8 .

و بالتالي ، فإن : (n^2-1 يقبل القسمة على 8) $\Rightarrow$ (n عدد فردي) .

- <u>التمرين رقم 08</u>:

1)- نبين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$.

- بالنسبة ل $n=0$ ، لدينا : $\dfrac{0\times(0^2+5)}{6}=0\in\mathbb{N}$.

- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$ (إفتراض الترجع) ، لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]}{6}&=\frac{(n+1)\left[(n^2+5)+(2n+1)\right]}{6}\\&=\frac{n(n^2+5)+\left[(n^2+5)+(n+1)(2n+1)\right]}{6}\\&=\frac{n(n^2+5)}{6}+\frac{3n^2+3n+6}{6}\\&=\frac{n(n^2+5)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+1\end{aligned}$$

و بما أن : $\dfrac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$ و $\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$ (حسب إفتراض الترجع)

فإن : $\dfrac{(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]}{6}\in\mathbb{N}$.

و بالتالي فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\dfrac{n(n^2+5)}{6}\in\mathbb{N}$.

2)- نبين الآن بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*),\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

- من أجل $n=1$ ، لدينا : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4}{5}$ و $\dfrac{4\times5^{1+1}-(5+1)4^{1+1}}{5^1}=\dfrac{100-96}{5}=\dfrac{4}{5}$

إذن العلاقة السابقة محققة من أجل $n=1$.

← لنفترض أن : $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} = \frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^{n}}$ حيث $n\in\mathbb{N}^{*}\setminus\{1\}$.

و لنبين أن : $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} = \frac{4\times 5^{(n+1)+1}-\left(5+(n+1)\right)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}$ (؟؟؟؟) .

لدينا : $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} + (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

و باستعمال إفتراض الترجع ، نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} = \frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^{n}} + (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} &= \frac{5\left[4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}\right]+(n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}}\\ &= \frac{4\times 5^{(n+1)+1}+\left[(n+1)-5(5+n)\right]4^{n+1}}{5^{n+1}}\\ &= \frac{4\times 5^{(n+1)+1}-(24+4n)4^{n+1}}{5^{n+1}}\\ &= \frac{4\times 5^{(n+1)+1}-(6+n)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}\\ &= \frac{4\times 5^{(n+1)+1}-\left(5+(n+1)\right)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}\end{aligned}$$

و بالتالي فإن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right), \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^{k} = \frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^{n}}$.