السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق المجموعات و التطبيقات حل مقترح	استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان

تمرين 1 :

1

لدينا $\forall(a,b)\in(IR^+)^2 \quad a\le b \Rightarrow \begin{cases} a+1\le b+1 \\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a+1}\le\sqrt{b+1} \\ \sqrt{a}\le\sqrt{b}\end{cases} \Rightarrow \sqrt{a+1}+\sqrt{a}\le\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$

بالتالي: $\forall(a,b)\in(IR^+)^2 \quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b} \Rightarrow a>b$

2

لدينا بالنسبة لـ $n=0$: $0^3-0+5^0-1=0=6\times 0$ (العبارة صحيحة)

نفترض أن: $\exists k\in Z \quad n^3-n+5^{2n}-1=6k$ و نبين أن: $\exists k'\in Z \quad (n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k'$

لدينا :

$$(n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=n^3+3n^2+3n^2+1-n-1+5^{2n+2}-1=n^3-n+3n(n+1)+5^{2n}\times 25-1$$
$$=6k-5^{2n}+1+3n(n+1)+25\times 5^{2n}-1$$
$$=6k+3n(n+1)+24\times 5^{2n}$$

و بما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جداء عددين متتابعين) فإن: $n(n+1)=2a\ /\ a\in IN$

منه : $(n+1)^3-(n+1)+5^{2(n+1)}-1=6k+6a+24\times 5^{2n}=6\left(k+a+4\times 5^{2n}\right)$

نضع : $k'=k+a+4\times 5^{2n}\in Z$ بالتالي : $\forall n\in IN \quad \exists k\in Z \quad n^3-n+5^{2n}-1=6k$

3

نفترض أن : $M<2$ ، إذن: $x<2$ و $y<2$ و $z<2$

منه:

$$\begin{cases} x<2 \\ y<2 \\ z<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{b}<2 \\ b+1<2 \\ 1+\frac{1}{a}<2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{b}<2 \\ b<1 \\ \frac{1}{a}<1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{b}<2 \\ \frac{1}{b}>1 \\ a>1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{1}{b}<2 \\ \frac{1}{b}+a>2\end{cases} \Rightarrow 2<a+\frac{1}{b}<2$$

وهذا غير ممكن إذن افتراضنا خاطئ و بالتالي العبارة المطلوبة صحيحة.

4

لدينا: $x^6-x+1=x\left(x^5-1\right)+1$ و $x^6-x+1=x^6+1-x$

- إذا كان : $x\ge 1$ ، فإن: $x\ge 1\Rightarrow x^5\ge 1\Rightarrow x^5-1\ge 0\Rightarrow x\left(x^5-1\right)\ge 0\Rightarrow x^6-x+1>0$
- إذا كان : $x<1$ ، فإن: $x<1\Rightarrow \begin{cases}1-x>0 \\ x^6=\left(x^3\right)^2\ge 0\end{cases} \Rightarrow x^6+1-x>0$

إذن في كل الحالات : $x^6-x+1>0$ ، بالتالي: $\forall x\in IR \ \ x^6-x+1>0$

5

لدينا : $x=y=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1+1=2 \\ x+y=1+1=2\end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=x+y=2$

و

$$x^2+y^2=x+y=2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1$$
$$\Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2(x+y)+2=2-4+2=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0\end{cases} \Rightarrow x=y=1$$

بالتالي : $\forall(x,y)\in IR^2 \quad \left(x^2+y^2=x+y=2 \Leftrightarrow x=y=1\right)$

6

$$\exists(a,b)\in\left(IR^{+}\right)^{2}\quad \sqrt{a+1}+\sqrt{a}>\sqrt{b+1}+\sqrt{b}\ \ et\ \ a\le b$$

$$\exists n\in IN\quad \exists\forall\in Z\quad n^{3}-n+5^{2n}-1\neq 6k$$

تمرين 2 :

- لدينا $A\cup(A\cap C)\cup\left(\overline{B}\cap A\right)=A$ (لأن: $A\cap C\subset A$ و أيضا : $\overline{B}\cap A\subset A$)
- لدينا: $(A\cup C)\setminus\overline{(C\setminus B)}=(A\cup C)\cap\overline{\overline{(C\setminus B)}}=(A\cup C)\cap(C\setminus B)=(A\cup C)\cap\left(C\cap\overline{B}\right)=C\cap\overline{B}$

لأن: $C\cap\overline{B}\subset C\subset(A\cup C)$

إذا كانت مجموعة ضمن الأخرى يكون التقاطع هو المجموعة الأصغر و الاتحاد هو المجموعة الأكبر

تمرين 3 : نعتبر المجموعة: $K=\left\{(a,b)\in IN^{*}\times IN^{*}\ /\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\right\}$

1

$$(a,b)\in K\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2a+2b=ab\Leftrightarrow 2a-ab+2b=0$$

لدينا : $(a,b)\in K\Leftrightarrow a(2-b)+2b=0\ \Leftrightarrow a(2-b)+2b-4+4=0\Leftrightarrow a(2-b)+2(b-2)=-4$

$$(a,b)\in K\Leftrightarrow(b-2)(-a+2)=-4\Leftrightarrow(b-2)(a-2)=4$$

2

لدينا حسب السؤال السابق ، و بما أن قواسم 4 الموجبة هي 1 و 2 و 4 فإن:

$$(a,b)\in K\Leftrightarrow(a-2,b-2)\in\{(1,4);(-1,-4);(2,2);(-2,-2)\}\Leftrightarrow(a,b)\in\{(3,6);(1,-2);(4,4);(0,0)\}$$

بالتالي: $K=\{(3,6);\ (1,-2)\ ;\ (4,4)\}$ (لأن $(0;0)\notin K$)

تمرين 4 :

$$f:IR\to IR$$
$$x\mapsto\frac{x}{1+|x|}$$

1

لدينا: $\forall x\in IR\ \ 1-|f(x)|=1-\dfrac{|x|}{1+|x|}=\dfrac{1}{1+|x|}>0$ ، إذن: $\forall x\in IR\ \ |f(x)|<1$

منه: $\forall x\in IR\ \ f(x)\in\left]-1;1\right[$ بالتالي: $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$

بما أن $2\notin\left]-1;1\right[$ و $f(IR)\subset\left]-1;1\right[$ فإن 2 لا سابق له بالتالي f ليس شمولا على IR

2

ليكن $(x;y)\in IR^{2}$ حيث $f(x)=f(y)$ إذن : $\dfrac{x}{1+|x|}=\dfrac{y}{1+|y|}$ نستنتج أن لـ x و y نفس الإشارة

إذا كانا موجبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{y}{1+y}\Rightarrow x+xy=y+xy\Rightarrow x=y$

إذا كانا سالبان نستنتج أن: $f(x)=f(y)\Rightarrow\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x-xy=y-xy\Rightarrow x=y$

بالتالي f تطبيق تبايني

3

$$x\in f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)\Leftrightarrow f(x)\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Leftrightarrow 0\le f(x)\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le\frac{x}{1+|x|}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0\le 2x\le 1+|x|$$

$$x\in f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 0\\2x\le 1+x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1\Leftrightarrow x\in[0;1]$$

بالتالي : $f^{-1}\left(\left[0;\frac{1}{2}\right]\right)=[0;1]$

4

لدينا حسب السؤال الثاني f تباين على IR

لنبين أنها شمول على $]-1;1[$ ، ليكن $y \in]-1;1[$ ، ولنحل المعادلة: $(E):\ f(x)=y\ ;x\in IR$

هذه المعادلة تكافئ: $\frac{x}{1+|x|}=y$ نستنتج منه أن لـ x و y نفس الإشارة

إذا كان: $y \geq 0$ فإن: $x \geq 0$ منه:

$$(E):\Leftrightarrow \frac{x}{1+x}=y \Leftrightarrow x=y+xy \Leftrightarrow x-xy=y \Leftrightarrow x(1-y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}\ (y\neq 1)$$

إذا كان: $y<0$ فإن: $x<0$ منه:

$$(E):\Leftrightarrow \frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow x=y-xy \Leftrightarrow x+xy=y \Leftrightarrow x(1+y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}\ (y\neq -1)$$

في كل الحالات المعادلة تقبل حلا في IR ، إذن ف f شمول على $]-1;1[$

وبالتالي فهي تقابل من IR نحو $]-1;1[$ وتقابلها العكسي معرف كما يلي:

$$f^{-1}:\ ]-1;1[\to IR$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1-x}\ ;\ 0\leq x<1 \\ \frac{x}{1+x}\ ;\ -1<x<0 \end{cases}$$