

استعدادا لاجتياز فروضك	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز 3 ساعات		
تمرين 1 :		
	$\neg(P_1): \exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2 + y^2 = 1 \text{ و } xy > \frac{1}{2}$ $\neg(P_2): \forall a \in \mathbb{N} \exists x \in \mathbb{Q} \quad x^2 \leq a$ $\neg(P_3): \exists n \in \mathbb{N} \quad (n + n^{2013}) \text{ est un nombre impair}$ $\neg(P_4): \exists n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2\sqrt{n}$ $\neg(P_5): \exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - yx + 1 \neq 0$	1
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ بأخذنا $x = 0$ نجد أن نفي العبارة (P_2) صحيحة لأن: $\forall a \in \mathbb{N} \quad a \geq 0 = 0^2$، بمعنى أن (P_2) عبارة خاطئة ▪ لنبين أن العبارة (P_3) صحيحة، وذلك باستعمال البرهان بفصل الحالات. ليكن n عددا صحيحا طبيعيا : إذا كان n عددا زوجيا فإن: n^{2013} عدد زوجي منه $n + n^{2013}$ عدد زوجي إذا كان n عددا فرديا فإن: n^{2013} عدد فردي منه $n + n^{2013}$ عدد زوجي بالتالي: لكل عدد صحيح طبيعي n $n + n^{2013}$ عدد زوجي 	2
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ لدينا لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2 xy = 1 - 2 xy \Rightarrow (x - y)^2 = 1 - 2 xy \Rightarrow 1 - 2 xy \geq 0 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}$ بالتالي العبارة (P_1) صحيحة ▪ لنبرهن بالترجع على صحة العبارة (P_4) بالنسبة لـ $n = 1$ لدينا: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ و $2\sqrt{n} = 2$ إذن العبارة صحيحة ($1 < 2$) نفترض أن $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ ونبين أن: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{4n^2 + 4n + 1}}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{\sqrt{4n^2 + 4n + 1 + 1}}{\sqrt{n+1}}$ لدينا: $\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2n + 1 + 1}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}}$ $\Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}$ وهذا ينهي البرهان. 	3

▪ لنبرهن على خطأ العبارة (P_5) أي لنبرهن على صحة نفيها.

نعتبر المعادلة $x^2 - yx + 1 = 0$ ذات المجهول x ، لدينا : $\Delta = x^2 - 4$

إذن بأخذنا : $y = 0$ فإننا نجد أن $\Delta < 0$ أي أن هذه المعادلة $(x^2 + 1 = 0)$ لا تقبل حلولاً في IR

بمعنى : $\forall x \in IR \quad x^2 + 1 \neq 0$ مما يؤكد صحة نفي العبارة (P_5) ، بالتالي ف (P_5) عبارة خاطئة.

تمرين 2 :

$$\exists (a, b) \in IN \times IN^* \quad \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \frac{a}{b} \end{cases} \text{ نفترض أن: } \sqrt{2} \in Q \text{ إذن: } \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \frac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ un nombre paire} \Rightarrow a \text{ un nombre paire}$$

$$\Rightarrow \exists k \in IN / a = 2k \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \quad \text{منه:}$$

$$\Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \text{ un nombre paire} \Rightarrow b \text{ un nombre paire}$$

نستنتج إذن أن 2 قاسم مشترك ل a و b وهذا يناقض $a \wedge b = 1$

إذن الافتراض خاطئ و منه: $\sqrt{2} \notin Q$

1

$$\exists (a, b) \in IN \times IN^* \quad \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \alpha = \frac{a}{b} \end{cases} \text{ نضع: } \alpha = 2\sqrt{2} - \sqrt{7} \text{ نفترض أن: } \alpha \in Q \text{، منه:}$$

$$\text{لدينا: } \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{7}}{8 - 7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$$

$$\text{منه: } \frac{1}{\alpha} + \alpha = 4\sqrt{2} \text{ منه: } \frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{4} = \sqrt{2} \text{ منه: } \frac{b}{4a} + \frac{a}{4b} = \sqrt{2} \text{ منه: } \frac{b^2 + a^2}{4ab} = \sqrt{2} \text{ منه } \sqrt{2} \in Q$$

وهذا غير ممكن حسب النتيجة السابقة.

لدينا لكل $(x, y) \in Q^2$

$$\text{من جهة: } x = y = 0 \Rightarrow x + y\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2} = 0$$

$$\text{و من جهة أخرى نبين أن: } x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

$$\text{لدينا: } x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -y\sqrt{2}$$

نستنتج إذن أن : x و y منعدمان معا أو غير منعدمين معا

2

إذا افترضنا أنهما غير منعدمين معا فنستنتج أن : $\sqrt{2} = \frac{-x}{y}$ وبما أن خارج عددين جذريين غير منعدمين

هو عدد جذري ، فنستنتج أن : $\sqrt{2} \in Q$ وهذا غير ممكن حسب السؤال السابق

$$\text{إذن نستنتج أن } x \text{ و } y \text{ منعدمان معا، منه: } x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

لدينا، لكل $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} x + y + 1 = 2(\sqrt{x} + \sqrt{y-1}) &\Rightarrow x + y + 1 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} \Rightarrow x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y-1} = 0 \\ &\Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + y - 1 - 2\sqrt{y-1} + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 + (\sqrt{y-1} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 1 = 0 \\ \sqrt{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

3

بالنسبة لـ $n = 0$ العبارة المطلوبة صحيحة لأن مضاعف للعدد 6

نفترض أن $n(n^2 + 5)$ مضاعف لـ 6 ونبرهن أن $(n+1)((n+1)^2 + 5)$ مضاعف لـ 6

لدينا: $n(n^2 + 5)$ مضاعف لـ 6، إذن: $\exists k \in \mathbb{N} / n(n^2 + 5) = 6k$

$$\begin{aligned} (n+1)((n+1)^2 + 5) &= (n+1)(n^2 + 2n + 6) = n^3 + 2n^2 + 6n + n^2 + 2n + 6 = n^3 + 3n^2 + 8n + 6 \\ &= n^3 + 5n + 3n^2 + 3n + 6 = 6k + 3n(n+1) + 6 \end{aligned}$$

وبما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي) فإن: $\exists p \in \mathbb{N} / n(n+1) = 2p$

$$(n+1)((n+1)^2 + 5) = 6k + 6p + 6 = 6(k + p + 1)$$

وبما أن: $k + p + 1 \in \mathbb{N}$ فإن $(n+1)((n+1)^2 + 5)$ مضاعف لـ 6

تمرين 3 :

في المجال: $I = [-1; 1]$ لدينا: $x^2 - 1 \leq 0$

$$|x^2 - 1| + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$$

وبما أن: $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ فإن: $S_1 = \emptyset$

وفي المجال: $J =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ لدينا: $x^2 - 1 > 0$

$$|x^2 - 1| + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$\text{وبما أن: } \Delta = 4 + 16 = 20 \text{ فإن: } x_1 = \frac{-2 + \sqrt{20}}{2} = -1 + \sqrt{5} \in J \text{ و } x_2 = \frac{-2 - \sqrt{20}}{2} = -1 - \sqrt{5} \in J$$

$$S = S_1 \cup S_2 = \{-1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\} \text{ خلاصة: } S_2 = \{-1 + \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 6 \geq 0 \text{ et } x - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2 \text{ et } x \geq 1\} = [2; +\infty[$$

إذن لكل $x \in [2; +\infty[$ لدينا:

$$\sqrt{3x-6} - \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-6} \leq 1 + \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{3x-6}^2 \leq (1 + \sqrt{x-1})^2 \Leftrightarrow 3x-6 \leq 1 + 2\sqrt{x-1} + x-1$$

$$\sqrt{3x-6} - \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow 2x-6 \leq 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x-3 \leq \sqrt{x-1}$$

إذا كان: $x-3 \leq 0$ أي $2 \leq x \leq 3$ فالمراجعة صحيحة، منه: $S_1 = [2; 3]$

$$\sqrt{3x-6} - \sqrt{x-1} \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \leq x-1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 \leq 0 \text{ فإن: } x-3 > 0$$

$$S_2 = [2; 5] \cap]3; +\infty[=]3; 5] \text{ ، بعد إنشاء جدول الإشارات نجد أن: } \Delta = 49 - 40 = 9$$

$$S = S_1 \cup S_2 = [2; 5] \text{ خلاصة: } S = [2; 5]$$

2

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ |x + y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + y = 1 \text{ ou } x - y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + y = -1 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ |x + y| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ وباستعمال المحددة أو طريقة التعويض أو التأليفة الخطية نجد:}$$

$$S = \{(4; 3); (-2; 1)\} \text{ بالتالي:}$$

3

لدينا:

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) - 4 = ab + 1 + 1 + \frac{1}{ab} - 4 = ab - 2 + \frac{1}{ab} = \frac{(ab)^2 - 2ab + 1}{ab} = \frac{(ab-1)^2}{ab} \geq 0$$

4

$$\forall a > 0 \quad \forall b > 0 \quad \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{a}\right) \geq 4 \text{ بالتالي:}$$

تمرين 4: نفترض أن الحدودية: $p(x) = x^3 + ax + b$ تقبل على الأقل حلا جذريا

$$\text{إذن: } \begin{cases} \left(\frac{p}{q}\right)^3 + a\left(\frac{p}{q}\right) + b = 0 \\ p \wedge q = 1 \end{cases} \quad \text{منه: } \exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$$

بما أن: $p \wedge q = 1$ فإن p و q فرديان معا أو أحدهما فردي و الآخر زوجي

إذا كانا فرديان معا فإن: p^3 و apq^2 و bq^3 أعداد فردية مجموعها فردي

إذا كان أحدهما زوجي و الآخر فردي (وبدراسة الحالتين معا) نجد أن apq^2 عدد زوجي و $p^3 + bq^3$ عدد فردي

في كل الحالات نجد أن $p^3 + apq^2 + bq^3$ عدد فردي وهذا غير ممكن لأن الصفر عدد زوجي

تمرين 5:

لدينا a و b و c تمثل أطوال أضلاع مثلث إذن: $a > 0$ و $b > 0$ و $c > 0$ و $a + b > c$ و $a + c > b$ و $b + c > a$

$$\text{منه: } \frac{1}{a+b} > 0 \text{ و } \frac{1}{b+c} > 0 \text{ و } \frac{1}{c+a} > 0$$

$$\text{و } \frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} > \frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+c} \geq \frac{2}{a+b+c} > \frac{2}{b+c+b+c} \geq \frac{2}{2(b+c)} \geq \frac{1}{b+c}$$

لأن: $a < b+c$ و $a+c < a+b+c$ و $a+b < a+b+c$

و بنفس الطريقة نبين أن: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} > \frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} > \frac{1}{a+b}$ ، وهذا ينهي البرهان.

هذا الفرض المقترح يتضمن تمارين أكثر من التمارين المفترضة في فرض فعلي كما و كيفاً من حيث الصعوبة، لذلك اقترحت 3 ساعات كوقت افتراضي لإنجازه، الهدف من ذلك التعود على مثل هذه الوضعيات و أيضا محاولة الإحاطة بكل مفاهيم الدرس الواجب الإلمام بها.

عدم التمكن من إنجاز بعض أو جل هذه التمارين لا يعني مطلقاً ضعفاً أو نقصاً في المستوى لكنه يعني ضرورة تكثيف الجهد و استثمار الحلول المقترحة في حل وضعيات مشابهة.