Variables aléatoires.

Exercices 2017-2018.

Niveau 1.

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

1. On répète indéfiniment le lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
   Soit X la variable aléatoire donnant la valeur du rang d'apparition du premier 6.
   En utilisant des événements indépendants, montrer que la loi de X est la loi géométrique $\mathscr{G}\left(\frac{1}{6}\right)$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
   On pose : $Y = n - X$.
   Déterminer la loi de Y.

3. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau ci-contre.
   Déterminer la loi de X^2.

x_i	-2	-1	0	1	2
$P(X = x_i)$	0.10	0.35	0.15	0.25	0.15

4. On lance deux dés équilibrés à n faces, et on note S la somme des deux résultats qu'on obtient.
   a. Pour : $2 \le i \le n+1$, montrer que : $P(S = i) = \dfrac{i-1}{n^2}$.
   b. Pour : $n+2 \le i \le 2.n$, montrer que : $P(S = i) = \dfrac{2.n - i + 1}{n^2}$.
   c. Calculer $P(S \le n+1)$.

5. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans {0,1,2}, telle que : $E(X) = 1$, et : $V(X) = \dfrac{1}{2}$.
   Déterminer la loi de X.

6. Que peut-on dire d'une variable aléatoire admettant une variance lorsque cette variance est nulle ?

7. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{n.(n+1)}$.
   Montrer que $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la loi de probabilité d'une variable discrète X.

8. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \dfrac{1}{n.2^n.\ln(2)}$.
   a. Montrer que $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la loi de probabilité d'une variable discrète X.
   b. X admet-elle une espérance ? si oui, la calculer.
   c. Quelle est l'espérance de la variable aléatoire : $Y = (\ln(2)).X - 1$?

9. On note : $p_0 = \dfrac{1}{2}$, et : $\forall\ n \ge 1,\ p_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.
   a. Montrer que $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la loi de probabilité d'une variable discrète X.
   b. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
   c. Montrer que X admet une variance et calculer $V(X)$.

10. On dispose d'une boîte dans laquelle se trouvent initialement 2 boules Blanches et 1 boule Noire.
    L'expérience étudiée consiste en la répétition des trois étapes suivantes :
    - on tire une des boules de la boîte,
    - on la remet dans la boîte,

• on ajoute dans la boîte 1 boule Blanche et 1 boule Noire.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro d'apparition de la première boule Blanche.
Déterminer la loi de X.

11. Soit une boîte qui contient n boules indiscernables au toucher, avec : $n \geq 3$, dont 2 sont Blanches et les autres sont Rouges.
On tire une à une et sans remise, une boule de cette boîte jusqu'à vider la boîte et on note X la variable aléatoire donnant le rang de la première boule Blanche tirée.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

12. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$
On suppose qu'il existe : $k \in]0,1[$, tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = k.P(X \geq n)$.
Déterminer la loi de X.

13. Pour : $a \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, telle que :
$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X = n+1) = \frac{a}{n+1}.P(X = n).$$
a. Déterminer la loi de X.
b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? si oui, calculer $E(X)$.
c. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? si oui, calculer $V(X)$.

14. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telle que :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 3.P(X = n+2) = 4.P(X = n+1) - P(X = n)$.
a. Déterminer la loi de X.
b. La variable aléatoire X admet-elle une espérance et une variance ? si oui, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

15. On effectue des tirages successifs dans une boîte qui contient initialement une boule Noire et une boule Blanche.
A chaque tirage, on note la couleur de la boule et on la remet en ajoutant en plus une boule Noire.
On définit Y la variable aléatoire donnant le rang d'apparition de la première boule Noire et Z celle qui donne le rang d'apparition de la première boule Blanche.
a. Déterminer les lois de Y et de Z.
b. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? si oui, calculer $E(Y)$.
c. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? si oui, calculer $E(Z)$.

16. Soient : $p \in]0,1[$, et : $r \in \mathbb{N}^*$.
Une bactérie se trouve dans une enceinte fermée à l'instant : $t = 0$.
A chaque instant à partir de : $t = 1$, on envoie un rayon laser dans l'enceinte qui, à chaque tir et de façon indépendante, a une probabilité p de toucher la bactérie.
La bactérie meurt à l'instant où elle a été touchée r fois.
On note X sa durée de vie (exprimée en secondes).
Déterminer la loi de X puis calculer $E(X)$ si elle est définie.

17. Une marque de lessive édite une collection de 4 figurines différentes, numérotées 1, 2, 3, 4, et dont un exemplaire quelconque est placé au hasard dans chaque paquet de lessive.
Une ménagère achète des paquets afin que sa fille puisse collectionner les figurines.
On note X le nombre de paquets que la ménagère a achetés lorsque sa fille possède pour la première fois la collection complète de figurines.
a. Pour : $n \geq 1$, a-t-il un lien entre : $p_n = P(X > n)$, et le fait qu'au bout de n achats, il manque toujours au moins une figurine dans la collection ?
b. Préciser la valeur de p_1, p_2, p_3.
c. On admet la formule du crible de rang 4 :
pour 4 événements A_1, A_2, A_3, A_4, on a :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i \ne < j \le 4} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i \ne < j < k \le 4} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Montrer que : $\forall\ n \geq 1,\ p_n = 4.\left(\frac{3}{4}\right)^n - 6.\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4.\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d. En déduire que X a une espérance et la calculer.
e. Comment pourrait-on démontrer la formule de la question c. ?

Fonction de répartition.

18. Soit X une variable aléatoire sur Ω, telle que : $X(\Omega) = \{0,1\}$, avec : $P(X=0) = P(X=1)$.
Déterminer la fonction de répartition de X.

19. On considère le lancer simultané de deux dés discernables équilibrés et à 6 faces.
On appelle X la variable aléatoire donnant le plus grand des numéros obtenus.
a. Déterminer la fonction de répartition de X.
b. En déduire sa loi de probabilité.

20. On considère N urnes contenant chacune n jetons numérotés de 1 à n (avec : $(n, N) \in \mathbb{N}^{*2}$).
On tire au hasard un jeton dans chaque urne et on appelle X le plus grand des numéros obtenus.
a. Déterminer la fonction de répartition de X.
b. En déduire la loi de X.
c. Calculer $E(X)$.

Lois usuelles, modélisations.

21. Pour chaque situation, reconnaître la loi de la variable aléatoire X ainsi que ses paramètres.
a. On lance un dé équilibré à 6 faces et X est la variable aléatoire donnant le résultat du lancer.
b. Une urne contient 12 boules, dont 6 Vertes, 4 Rouges et 2 Bleues.
On effectue 8 tirages successifs et avec remise.
X est la variable aléatoire égale au nombre de boules Rouges obtenues.
c. Une urne contient 12 boules, dont 6 Vertes, 4 Rouges et 2 Bleues.
On effectue des tirages successifs et avec remise jusqu'à obtenir une boule Rouge.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.
d. On range au hasard 10 boules dans 3 sacs indiscernables de façon équiprobable et X est la variable aléatoire donnant le nombre de boules placées dans le premier sac.
e. On a rangé toutes les cartes (faces cachées) d'un jeu de 32 cartes en une file, et on retourne l'une après l'autre les cartes jusqu'à obtenir la Dame de Cœur.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de cartes retournées.
f. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n (avec : $n \in \mathbb{N}^*$).
On les tire au hasard un à un sans remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.
g. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n (avec : $n \in \mathbb{N}^*$).
On les tire au hasard un à un avec remise jusqu'à obtenir le jeton numéro 1.
X est la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.
h. On pose n questions (avec : $n \in \mathbb{N}^*$) à un élève et pour chaque question, r réponses sont proposées (avec une seule de correcte).
L'élève répond au hasard à chaque question.
X est la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

22. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$.
Calculer $P(2.X < X^2 + 1)$ et $P(X\ pair)$.

23. Reconnaître dans les deux cas suivants la loi de X, préciser ses paramètres et calculer $E(X)$ et $V(X)$.
a. X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X = n+1) = \frac{2}{n+1}.P(X = n)$.
b. X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ 3.P(X = n+2) = 4.P(X = n+1) - P(X = n)$.

24. On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilité $(\Omega,\mathscr{A},P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On définit la variable aléatoire Y par :

$\forall\ \omega \in \Omega$, $Y(\omega)=0$, si $X(\omega)$ est impair, et : $Y(\omega)=\dfrac{X(\omega)}{2}$, si $X(\omega)$ est pair.

Déterminer la loi de Y et son espérance dans les deux cas suivants :
a. X soit la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, avec : $p \in\ ]0,1[$.
b. X suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$.

25. a. Montrer que : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, la série $\sum_{n\geq 0} n.(n-1).(n-2).x^{n-3}$ converge puis que :

$$\forall\ x \in\ ]-1,+1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} n.(n-1).(n-2).x^{n-3} = \frac{6}{(1-x)^4}.$$

On répète de façon indépendante une expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A se réalise à chaque fois avec la probabilité p avec : $p \in\ ]0,1[$.
On note X la variable aléatoire égale au rang de la première réalisation de A et Y celle égale au rang de se deuxième réalisation.
b. Déterminer la loi de X, puis montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
c. Déterminer la loi de Y, puis montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$.
d. Comparer $E(X)$ et $E(Y)$. Que dire de ce résultat ?

26. Dans un pays, il y a équiprobabilité pour une famille lors de la naissance d'un enfant que ce soit un garçon ou une fille et chaque couple arrête d'avoir des enfants dès que naît un garçon.
On note X le nombre d'enfants dans une famille et Y la proportion de garçons parmi les enfants.
Déterminer la loi de X puis si elle existe $E(Y)$.

27. Soient : $\lambda > 0$, et : $p \in\ ]0,1[$.
Une poule pond N œufs au début de chaque semaine, N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose qu'au cours de la semaine, chaque œuf peut éclore avec une probabilité p, indépendamment des autres.
On note K la variable aléatoire donnant le nombre de poussins en fin de semaine.
Reconnaître la loi de K.

Couple et famille de variables aléatoires.

28. a. Pour : $\Omega=\{a,b,c\}$, on dispose de deux variables aléatoires X et Y telles que :
- $X(a)=X(b)=1$, $X(c)=2$, et :
- $Y(a)=Y(c)=3$, $Y(b)=1$.

On pose : $Z=(X,Y)$.
Comparer $Z(\Omega)$ et $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

b. On lance deux dés à 6 faces équilibrés et discernables et on note :
- X la variable aléatoire donnant le maximum des valeurs obtenues,
- Y la variable aléatoire donnant la valeur du deuxième dé,
- $Z=(X,Y)$.

Décrire $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$, et $Z(\Omega)$.

29. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathscr{B}(p)$ avec : $p \in\ ]0,1[$.
On pose : $U=X+Y$, et : $V=X-Y$.
a. Déterminer la loi de couple (U,V).
b. Calculer la covariance de U et de V.
U et V sont-elles indépendantes ?

30. On lance deux dés discernables équilibrés à 6 faces dont on note les résultats D_1 et D_2.
On appelle par ailleurs X et Y les variables aléatoires : $X=\min(D_1,D_2)$, et : $Y=\max(D_1,D_2)$.

a. Déterminer la loi de X puis $E(X)$.
b. Déterminer $E(X+Y)$ puis $E(Y)$.
c. Déterminer $E(X.Y)$ puis $\text{cov}(X,Y)$.

31. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathscr{U}(n)$ avec : $n \geq 1$.
a. On pose : $Z = |X - Y|$.
Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
b. On pose : $S = X + Y$.
Déterminer la loi de S puis son espérance.
La loi de S est parfois appelée « loi triangulaire ». Pourquoi ?
Retrouver visuellement l'espérance de S.
c. Que vaut en moyenne la somme de deux nombres pris au hasard entre 1 et n ?

32. On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée.
On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier Pile (resp. Face).
a. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y).
b. Déterminer la loi du couple (X,Y).
c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
d. On pose : $Z = X + Y$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

33. On pose : $\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p_{i,j} = \dfrac{1}{i.(i+1).j.(j+1)}$.
a. Montrer que $((i, j), p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^{*2}}$ définit la loi de probabilité d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.
b. Déterminer les lois marginales du couple, à savoir les lois de X et de Y.
c. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

34. Pour : $p \in]0,1[$, on définit les réels $a_{i,j}$ par :
$\forall\, (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $a_{i,j} = (1-p)^{j-2}.p^2$, si : $1 \leq i < j$, et : $a_{i,j} = 0$, sinon.
a. Montrer que $\{((i, j), a_{i,j}),\ (i, j) \in \mathbb{N}^2\}$ est la loi d'un couple (X,Y) de variables aléatoires discrètes.
b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
c. Pour : $j \geq 2$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.

35. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :
$X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$, et : $Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
On pose : $Z = X + Y + 1$.
Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance si elles existent.

36. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathscr{G}(p)$ avec : $p \in]0,1[$.
a. Déterminer la loi de : $S = X + Y$.
b. S admet une espérance ? une variance ?
Si oui, calculer $E(S)$ et $V(S)$.

37. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois $\mathscr{G}(p)$ et $\mathscr{G}(q)$ avec :
$p \in]0,1[$, $q \in]0,1[$.
On note par ailleurs : $Z = \min(X,Y)$.
a. Déterminer $P(X > n)$, pour : $n \in \mathbb{N}$.
b. En déduire la loi de Z et montrer que cette loi est géométrique.

38. Pour : $p \in]0,1[$, on dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit la loi $\mathscr{G}(1,p)$ si et seulement si :
- $X(\Omega) = \mathbb{N}$,
- $\forall\ k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = p.(1-p)^k$.

a. Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité, et déterminer alors (si elle existe) l'espérance d'une telle variable aléatoire.
b. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathscr{G}(1,p)$ avec : $p \in]0,1[$.
Déterminer la loi de : $Z = X + Y$.
c. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Z = n)$.

39. Deux joueurs jouent à Pile ou Face avec des pièces équilibrées.
A lance $n+1$ pièces et B lance n pièces.
On appelle X et Y les variables aléatoires donnant le nombre de Face obtenus respectivement par A et par B.
a. Déterminer la loi de X puis celle de Y.
b. Déterminer la loi de $X - Y$.
c. Déterminer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.

40. On considère une boîte contenant N jetons numérotés de 1 à N, avec : $N \in \mathbb{N}^*$.
On effectue une suite infinie de tirages d'un jeton dans l'urne, avec remise.
On note, pour : $i \in \mathbb{N}^*$, X_i la variable aléatoire donnant le numéro du jeton obtenu au $i^{\text{ème}}$ tirage.
On note enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Calculer pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de S_n.

41. Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2.
On suppose que leurs écarts-types respectifs $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont non nuls et $\mathrm{cov}(X,Y)$ leur covariance.
Pour : $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$, et : $U = \alpha.X + \beta$, et : $V = \gamma.Y + \delta$, comparer $\rho(X,Y)$ et $\rho(U,V)$.

42. Soient $X_1,\ldots,X_n$ n variables aléatoires discrètes ayant la même espérance m, la même variance v et telles que tous les couples (X_i, X_j) ont la même covariance n, pour : $1 \le i \ne j \le n$.
Calculer l'espérance et la variance de : $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Fonctions génératrices.

43. Recalculer les fonctions génératrices des lois classiques.

44. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi binomiale de même paramètre p.
Calculer explicitement G_{X+Y}, la fonction génératrice de $X + Y$ puis retrouver le fait que $X + Y$ suit une loi binomiale que l'on précisera.

45. Soit : $x > 0$, et soit X la variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi de probabilité est :
$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ P(X = n) = \frac{1}{ch(x)}.\frac{x^{2.n}}{(2.n)!}.$$
a. Vérifier que cette définition est cohérente et calculer la fonction génératrice G_X (on distinguera les valeurs positives et négatives).
b. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Résultat asymptotiques.

46. Des études effectuées par une compagnie aérienne montrent qu'il y a une probabilité de 0.05 qu'un passager ayant fait une réservation ne vienne pas à l'aéroport.
Un étudiant admissible en PSI doit monter à Paris passer un oral et l'avion qu'il doit prendre comporte 90

places alors que 94 billets ont été vendus.
Quelle est la probabilité qu'il puisse y avoir un problème d'embarquement (on effectuera les calculs de deux façons, directement ou en utilisant une approximation).

47. On dispose pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, d'une boîte B_n contenant 1 boule Blanche et $n-1$ boules Noires.
Pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue au hasard n tirages successifs dans B_n avec remise de la boule tirée, et on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules Blanches obtenues.
Pour : $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite de la probabilité $P(X_n = k)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

48. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, avec : $p \in]0,1[$.
On note pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$.
Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|Y_n - p| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4.n.\varepsilon^2}$.

49. On considère un dé équilibré à 6 faces et on considère une succession de n lancers de ce dé ($n \in \mathbb{N}^*$).
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de 1 obtenus à l'issue de ces n lancers.
a. A l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, justifier que : $P\left(\left|X - \dfrac{n}{6}\right| \leq \dfrac{n}{100}\right) \geq \dfrac{5.10^4}{36.n}$.
b. En déduire le nombre de lancers qu'il faut effectuer pour que la fréquence d'apparition du 1 au cours de ces n lancers soit dans l'intervalle $\left]\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{100}\right[$, avec un risque d'erreur inférieur à 0.05.

50. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2.
On note : $m = E(X_1)$, $v = V(X_1)$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} X_k$.
a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{v}{n.\varepsilon^2}$.
b. On suppose que : $v = 10^{-1}$.
Déterminer un entier : $N \in \mathbb{N}^*$, tel que : $\forall\ n \geq N$, $P(|M_n - m| \geq 10^{-2}) \leq 10^{-3}$.

<u>Niveau 2.</u>

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

51. Un élève de PSI qui s'ennuie en maths répète le lancer d'un dé équilibré dodécaédrique jusqu'à ce que le résultat soit pair, résultat qu'il divise alors par 2.
Soit X la variable aléatoire donnant le résultat final.
X suit-elle la loi uniforme ?

52. On considère une variable aléatoire discrète X vérifiant : $X(\Omega) = \mathbb{Z}$, et :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P(X = n+1) = \dfrac{1}{n+1}.P(X = n)$, et : $P(X = -n) = P(X = n)$.
a. Exprimer pour tout : $n \in \mathbb{Z}$, la valeur $P(X = n)$ en fonction de $P(X = 0)$.
En déduire $P(X = 0)$, puis la loi de X.
b. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et une variance et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

53. Une boîte contient des boules Blanches en proportion b, des boules Rouges en proportion r et des boules vertes en proportion v.
On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a. Préciser les égalités ou inégalités vérifiées par b, r et v.
b. Déterminer la loi de X.
c. Montrer que X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{1}{1-b} + \dfrac{1}{1-r} + \dfrac{1}{1-v} - 2$.

54. Un ascenseur se trouve en bas au rez-de-chaussée d'un immeuble qui comporte en plus n étages ($n \geq 1$).
D'autre part, p personnes montent dans cet ascenseur et on suppose que chaque personne peut s'arrêter à n'importe quel étage de façon équiprobable et indépendamment des autres.
L'ascenseur gravit ainsi les étages et stoppe une fois la dernière personne sortie.
On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On note pour : $1 \leq k \leq n$, T_k la variable aléatoire valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage k et 0 sinon.
a. Déterminer la loi de T_k, pour : $1 \leq k \leq n$, puis $E(T_k)$.
b. Etablir un lien entre X et les variables T_k et en déduire $E(X)$.

55. Soit : $a \in \mathbb{R}$, et pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{a}{n.(n+1).(n+2)}$.
a. Trouver α, β, γ tels que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\beta}{n+1} + \dfrac{\gamma}{n+2}$.
b. Déterminer a, pour que $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la loi de probabilité d'une variable discrète X.
c. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? si oui, calculer $E(X)$.
d. Déterminer la loi de Y, définie par : $Y = X^2 - 6.X + 9$.
Y admet-elle une espérance ? si oui, calculer $E(Y)$.

56. Un perchiste participe à une compétition.
La barre est successivement mise à des hauteurs numérotées 1, 2, …, n, … et on fait les hypothèses suivantes :
- pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité que le sauteur passe la hauteur n est $\dfrac{1}{n}$.
- les différents sauts sont indépendants.

On note X le numéro du dernier saut réussi (et donc la hauteur franchie).
a. Déterminer la loi de X.
b. Calculer si elle existe, l'espérance de $X+1$, puis en déduire que X a une espérance et la calculer.

57. Une boîte contient deux boules Blanches et une boule Noire.
On y effectue une succession de tirages suivant le protocole suivant :
- si la boule tirée est Noire, on la remet dans la boîte,
- si la boule tirée est Blanche, on remet à la place de cette boule une boule Noire dans la boîte.

Pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules Blanches présentes dans la boîte à l'issue du $n^{\text{ième}}$ tirage.
Ainsi Y_n prend ses valeurs dans {0,1,2}.
a. Déterminer la loi de Y_1.
b. Calculer pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur $P(Y_n = 2)$.
c. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = P(Y_n = 1)$.
Préciser u_1 puis montrer que : $\forall\ n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}.u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$.
En utilisant la suite de terme général : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$, donner la valeur de u_n pour tout n.
d. En déduire pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $P(Y_n = 0)$.
e. Calculer pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de Y_n.
f. On définit la variable aléatoire Z donnant le premier instant où la boîte ne contient plus que des boules

Noires.
Déterminer la loi de Z.
Montrer que Z admet une espérance et calculer $E(Z)$.

58. Une puce se déplace sur une demi-droite divisée en segments de longueur 1, numérotés 0, 1, 2, 3, ….
Au départ, elle se trouve sur la case 0 et elle se déplace vers la droite (dans le sens des numéros croissants) en faisant au hasard des sauts de longueur 1 ou 2.
On désigne, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, par X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.
a. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.
b. Déterminer la loi de X_2, son espérance et sa variance.
On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a effectué un saut de 2 cases au cours des n premiers sauts.
c. Reconnaître la loi de probabilité de Y_n et calculer son espérance et sa variance.
d. Exprimer X_n en fonction de Y_n, et en déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Lois usuelles, modélisations, approximations.

59. On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$.
a. Pour : $n \in \mathbb{N}$, calculer : $u_n = \dfrac{P(X = n+1)}{P(X = n)}$.
b. En déduire le mode de X, c'est-à-dire la valeur que X prend avec la plus grande probabilité.

60. Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$, avec λ et μ strictement positifs.
a. Déterminer la loi de : $S = X + Y$.
b. Pour : $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(S = n)$.

61. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètres p et q.
Calculer l'espérance de : $Z = \max(X,Y)$.

62. On considère une variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur {1,2} et une variable aléatoire Y, indépendante de X, et suivant la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$.
On définit ensuite la variable aléatoire Z par : $Z = X.Y$.
a. Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance.
b. Calculer la probabilité que Z soit pair.

63. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, où : $p \in]0,1[$.
a. Déterminer la loi de $X + Y$, de $\min(X,Y)$, et de $\max(X,Y)$.
Pour déterminer la loi de : $T = \min(X,Y)$, on pourra commencer par évaluer par exemple $P(T \geq n)$.
b. A quelle situation type peut-on associer les variables aléatoires X et Y ?
Que représentent alors les trois variables aléatoires de la question a. ?
On pourra imaginer deux situations, l'une pour illustrer $X + Y$, l'autre pour $\min(X,Y)$ et $\max(X,Y)$.
c. Calculer les probabilités $P(X = Y)$ et $P(X \leq Y)$.

Couple et famille de variables aléatoires.

64. Pour : $a \in \mathbb{R}$, soit un couple de variables aléatoires discrètes (X,Y) de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = a.\frac{i+j}{i!.j!}.$$

a. Déterminer la valeur de a.
b. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Montrer que le couple (X,Y) admet une covariance et la calculer.

d. Montrer que la variable aléatoire : $Z = 2^{X+Y}$, admet une espérance et la calculer.

65. On réalise une succession de lancers d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p , où : $0 < p < 1$.

On définit deux suites de variables aléatoires (S_n) et (T_n) définies de la façon suivante :

- pour tout : $n \geq 1$, S_n est égal au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le n ième Pile,
- $T_1 = S_1$, et pour : $n \geq 2$, T_n est le nombre de lancers supplémentaires nécessaires pour obtenir le n ième Pile après avoir obtenu le $(n-1)$ ième Pile.

a. Pour : $n \geq 1$, déterminer la loi de T_n, sans utiliser S_n.

Montrer que pour tout : $n \geq 1$, T_n admet une espérance et une variance.

b. Etablir le lien qui relie S_n et les variables $T_1,...,T_n$, pour : $n \geq 1$.

c. Pour : $n \geq 1$, montrer que S_n admet une espérance et une variance et que :

$E(S_n) = \dfrac{n}{p}$, et : $V(S_n) = \dfrac{n.(1-p)}{p^2}$.

66. Soit : $N \geq 2$.

Une urne contient des boules Blanches en proportion p et Noires en proportion : $q = 1-p$.
On effectue des tirages avec remise jusqu'à l'obtention pour la troisième fois d'une boule Blanche.
On appelle U , D et T les variables aléatoires égales au nombre de tirages nécessaires pour obtenir respectivement une première, une deuxième et une troisième boule Blanche.

a. Déterminer les lois de U , D et T.

b. Calculer si elle existe, l'espérance de D.

c. On note H le nombre total de boules Noires obtenues lorsque la deuxième boule Blanche est obtenue.
Quelle relation lie H et D ?
En déduire la loi de H et son espérance.

Fonctions génératrices.

67. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans ℕ et admettant une espérance.

a. Quel lien y a-t-il entre la série $\sum_{n\geq 0} P(X=n)$ et la suite ($P(X>n)$) ?

b. Montrer que : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n)$.

c. Montrer que la fonction H_X donnée par : ∀ t ∈ ℝ, $H_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n).t^n$,

est définie au moins sur]-1,+1[

d. En notant G_X la fonction génératrice de X , montrer que : ∀ t ∈]-1,1[, $H_X(t) = \dfrac{1-G_X(t)}{1-t}$.

Remarque : H_X est appelée « seconde fonction génératrice de X ».

68. Soient $X_1,...,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans ℕ.

On note $G_1,...,G_n$ leurs fonctions génératrices respectives.

Pour : $(\lambda_1,...,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer la fonction génératrice de : $Y = \lambda_1.X_1 + ... + \lambda_n.X_n$.

Résultats asymptotiques.

69. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec : $0 < p < 1$.

Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} X_k$, $Y_n = \dfrac{X_n + X_{n+1}}{2}$, $T_n = \dfrac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

a. Justifier le fait que : ∀ $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|S_n - p| \geq \varepsilon) = 0$.

b. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, donner la loi et l'espérance de Y_n.

c. Soient n et m des entiers non nuls tels que : $n < m$.
Les variables aléatoires Y_n et Y_m sont-elles indépendantes ?

d. Montrer que : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|T_n - p| \geq \varepsilon) = 0$.

70. On considère une boîte contenant des boules Blanches en proportion inconnue p non nulle et des boules Noires en proportion $1-p$.
On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule et on observe l'apparition de k boules Blanches.
On voudrait considérer que $\dfrac{k}{n}$ fournit une approximation de p.

a. En utilisant les variables aléatoires X_j valant 1 si une boule Blanche apparaît au tirage numéro j et 0 sinon, évaluer la validité de cette approximation.
En particulier, quelle est la probabilité que p appartiennent à l'intervalle de confiance $\left]\dfrac{k}{n} - \varepsilon, \dfrac{k}{n} + \varepsilon\right[$?

b. Si on veut que l'approximation donne p au 100$^{\text{ième}}$ près et une certitude à plus de 99% sur cette approximation, à quelle valeur de n cela conduit-il ?
Qu'en penser ?

<u>Niveau 3.</u>

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

71. Une boîte contient 4 boules, 1 Blanche et 3 Rouges.
On effectue des tirages d'une boule avec remise de la boule tirée jusqu'à ce que l'on obtienne deux boules consécutives de même couleur et on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

a. Calculer $P(X=2)$, $P(X=3)$ et $P(X=4)$.

b. Montrer que : $\forall\ n \geq 1$, $P(X = 2.n) = \dfrac{5}{8}.\left(\dfrac{3}{16}\right)^{n-1}$.

c. Montrer que : $\forall\ n \geq 1$, $P(X = 2.n+1) = \left(\dfrac{3}{16}\right)^{n}$.

d. Vérifier par le calcul que : $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} P(X=n) = 1$.

e. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

72. On dispose de deux boîtes $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.
Initialement il y a deux boules Blanches dans $\mathscr{B}_1$ et deux boules Noires dans $\mathscr{B}_2$.
A chaque tirage, on prend au hasard une boule dans $\mathscr{B}_1$ et une boule dans $\mathscr{B}_2$ et on les échange.
On note, pour tout : $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules Blanches dans $\mathscr{B}_1$ après le $n^{\text{ième}}$ échange : ainsi, X_n prend ses valeurs dans {0,1,2}.
On définit, pour tout : $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$.

a. Trouver une matrice : $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A.U_n$.

b. Montrer que la suite $(E(X_n))_{n\geq1}$ est constante et préciser cette valeur constante.

c. Montrer que la matrice A est diagonalisable et diagonaliser A.
En déduire les coefficients de la matrice A^n pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

d. En déduire la loi de X_n pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

73. Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.

Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0).
Le mobile se déplace selon la règle suivante :

- s'il est au point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$, il sera au point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité $\frac{k+1}{k+2}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$.

Pour tout : $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du point où se trouve le mobile à l'instant n, et : $u_n = P(X = 0)$.

a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall$ k $\in$ {1,2,…, n+1}, $P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1}.P(X_n = k-1)$.

b. En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ 0 \le k \le n$, $P(X_n = k) = \frac{1}{k+1}.u_{n-k}$.

c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$, et en déduire u_0, u_1, u_2, u_3.

d. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = E(X_n) + u_{n+1}$.
En déduire une expression de $E(X_n)$,pour : $n \ge 1$, sous forme d'une somme où interviennent des termes de la suite (u_n).

On note T l'instant auquel le mobile se retrouve pour la première fois à l'origine (après son départ) et on convient que T prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais à l'origine.

e. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(T = n) = \frac{1}{n.(n+1)}$.
En déduire que : $P(T = 0) = 0$, puis interpréter ce résultat.

f. La variable T admet-elle une espérance ?

Lois usuelles, modélisations.

74. Soit une urne contenant N boules numérotées de 1 à N ($N \ge 2$) indiscernables au toucher.
On tire des boules de cette urne avec remise jusqu'à obtenir une série de k boules consécutives identiques (avec : $k \ge 2$).
On admet qu'il est presque sûr que cette opération s'arrête et on note T la variable aléatoire donnant le nombre de tirages opérés jusqu'à l'arrêt.
a. Déterminer $P(T = k)$ et $P(T = k+1)$.
b. Montrer que : $\forall\ n \ge 1$, $P(T = n+k) = \frac{N-1}{N^k}.P(T > n)$.
c. En déduire que T admet une espérance et déterminer $E(T)$.
d. Montrer qu'il est presque sûr que l'opération s'arrête (autrement dit le point admis en préambule).

75. Loi hypergéométrique.
On dispose d'une boîte contenant des boules Noires en proportion p et Blanches en proportion : $q = 1 - p$.
On effectue une série de n tirages dans la boîte, <u>sans remise</u>, et on appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de boules Noires tirées.
On appelle Ω l'ensemble des combinaisons de n boules parmi les N présentes dans la boîte au début.
a. Montrer que Ω peut être choisi comme univers de l'expérience.
b. Montrer que $X(\Omega)$ est l'ensemble des entiers compris (au sens large) entre $\max(0, n - q.N)$ et $\min(n, p.N)$.
c. Déterminer la loi de X, appelée loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et notée $\mathscr{H}(N, n, p)$.

76. Loi de Pascal.
Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité d'échec x (où : $x \in]0,1[$), on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de la façon suivante :

- pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ième}}$ succès.
- $T_1 = S_1$, et pour tout : $n \ge 2$, T_n est égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ième}}$ succès après le $(n-1)^{\text{ième}}$.

a. Exprimer pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, S_n en fonction des variables aléatoires (T_k).

b. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de T_n et donner son espérance et sa variance.

c. Déterminer la loi de S_1 puis celle de S_2.

d. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de S_n.

e. En déduire que : $\forall\ x \in]0,1[$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}.x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$.

77. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, où : $0 < p < 1$.

On note, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + ... + X_n$, et u_n la probabilité pour que S_n soit pair.

a. Préciser la loi de S_n, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Calculer u_1, u_2, u_3.

c. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = a.u_n + b$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n puis la limite de la suite (u_n).

Ce résultat est-il surprenant ?

78. On dispose de n rosiers ($n \in \mathbb{N}^*$) sur chacun desquels on opère une greffe.
Lorsqu'une greffe est opérée, on sait au bout d'une semaine si elle a pris ou non et si la greffe ne prend pas, on recommence jusqu'à ce qu'elle prenne effectivement.
On suppose que la probabilité qu'une greffe donnée prenne vaut p, avec : $0 < p < 1$, et que tous ces essais sont mutuellement indépendants.
On note, pour : $1 \le k \le n$, X_k la variable aléatoire égale au nombre de greffes nécessaires à la prise d'une greffe sur le rosier numéro k.
On définit également :

- la variable aléatoire Y égale au nombre de semaines nécessaires à la prise d'au moins une greffe,
- la variable aléatoire Z égale au nombre de semaines nécessaire à la prise de toutes les greffes.

a. Déterminer pour tout : $1 \le k \le n$, la loi de X_k, son espérance et sa variance.

b. Calculer pour tout : $m \ge 1$, $P(Y \ge m)$, et en déduire la loi de Y et son espérance.

c. Calculer pour tout : $m \ge 1$, $P(Z \le m)$, et en déduire la loi de Z.

d. Montrer que Z admet une espérance.

e. Calculer $E(Z)$, pour : $n = 2$.

79. On considère une variable aléatoire discrète N telle que : $N(\Omega) = \mathbb{N}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) \neq 0$.
Si N prend la valeur n, on décide de procéder à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p, avec : $0 < p < 1$.
On note S et E les variables aléatoires égales au nombre de succès et d'échecs lors de ces n épreuves.

a. On suppose que N suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, avec : $\lambda > 0$.

Montrer que S et E suivent aussi des lois de poisson dont on précisera le paramètre.

Montrer que S et E sont indépendantes.

b. Réciproquement, on suppose que S et E sont indépendantes.

Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que : $\forall\ (m,n) \in \mathbb{N}^2$, $(n+m)!.P(N = n+m) = u_n.v_m$.

Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

En déduire que N suit une loi de Poisson.

Remarque : on peut modéliser le fait que dans une famille, le nombre d'enfants nés dans cette famille suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, où : $\lambda > 0$, et à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est p et celle que ce soit un garçon est : $q = 1 - p$.
Dans ce cas, les variables aléatoires X et Y donnant le nombre de filles et de garçons sont indépendantes.

80. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on considère des variable aléatoires $X_1,...,X_n$ indépendantes suivant toutes la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, avec : $0 < p < 1$, et on note : $q = 1 - p$.

On pose de plus : $U = \min\limits_{1 \le i \le n} X_i$, et : $V = \max\limits_{1 \le i \le n} X_i$.

a. Déterminer la loi de U.
   En déduire que U admet une espérance et calculer $E(U)$.

b. Déterminer la loi de V.
   Montrer que V admet une espérance et que : $E(V) = \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{n}{i}.(-1)^{i+1}.\dfrac{1}{1-q^i}$.

Couple et famille de variables aléatoires.

81. Deux joueurs A et B procèdent l'un après l'autre à une succession de lancers d'une même pièce donnant Pile avec une probabilité p, avec : $0 < p < 1$, et on notera : $q = 1 - p$.

Le joueur A commence et il s'arrête dès qu'il obtient le premier Pile ; on note alors X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus par le joueur B.

a. Déterminer la loi de X.

b. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$.

c. En déduire que : $P(Y = 0) = \dfrac{q}{1+q}$, et : $\forall$ k ≥ 1, $P(Y = k) = \dfrac{1}{(1+q)^2}.\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{k-1}$.
   Vérifier par le calcul que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = 1$.

d. Le joueur B gagne s'il obtient au moins un Pile, sinon c'est le joueur A qui gagne.
   Le jeu est-il équitable ?

82. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, où : $0 < p < 1$.

Pour : $k \in \mathbb{N}^*$, on définit une variable aléatoire T_k par : $T_k = \min\left(\{n \ge 1,\ X_1 + ... + X_n = k\} \cup \{+\infty\}\right)$, qui peut se comprendre comme le temps d'attente du $k^{\text{ième}}$ succès.

a. Déterminer la loi de T_k.

b. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.
   Montrer que : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, T_k et $Y_1 + ... + Y_k$ suivent la même loi.

c. En déduire l'espérance et la variance de T_k.

83. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p, avec : $0 < p < 1$.

On s'intéresse aux successions de lancers donnant un même côté.
On dit que la première série est de longueur n si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer a amené l'autre côté.
La deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (<u>si</u> elle se termine) au lancer précédant le changement de côté.
On note L_1 (respectivement L_2) la variable aléatoire égale à la longueur de la première (respectivement deuxième) série.

a. Donner la loi de L_1, puis montrer que L_1 admet une espérance et la calculer.

b. Déterminer la loi du couple (L_1, L_2).

c. En déduire la loi de L_2.
   Montrer que L_2 admet une espérance et la calculer.

d. Montrer que le couple (L_1,L_2) admet une covariance et la calculer.

e. Montrer que L_1 et L_2 sont indépendantes si et seulement si : $p=\frac{1}{2}$.

84. On répète de façon indépendante une expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A se réalise à chaque fois avec la probabilité p, avec : $0<p<1$.
On note X la variable aléatoire égale au rang de la première réalisation de l'événement A et Y celle égale au rang de sa deuxième réalisation.
a. Déterminer la loi du couple (X,Y), puis les lois marginales de X et de Y.
b. Montrer que (X,Y) admet une covariance et calculer $\mathrm{cov}(X,Y)$.
c. Pour : n ≥ 2, déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y=n)$.

85. Un joueur dispose de N dés à 6 faces équilibrés.
Il lance une première fois les dés et en appelant X_1 le nombre de 6 obtenus.
Il met ensuite de côté les dés ayant donné 6 et relance les dés restants (s'il en reste).
On note X_2 le nombre de 6 obtenus, et on répète l'opération en définissant ainsi une suite $X_1, X_2,...$ de variables aléatoires.
Pour : $n\geq 1$, on note alors : $S_n = X_1+...+X_n$, qui correspond au nombre total de 6 obtenus en n lancers.
a. Montrer que pour tout : $n\geq 1$, S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
b. Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un entier : $n\geq 1$, tel que : $S_n = N$.
c. On définit alors la variable aléatoire : $T=\min(\{n\geq 1, S_n = N\}\cup\{+\infty\})$.
Déterminer la loi de T.
d. Montrer que T admet une espérance et donner une expression de $E(T)$ sous forme de somme finie.

Fonctions génératrices.

86. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant chacune une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.
a. Montrer directement que : $Z=X+Y$, suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
b. Retrouver le résultat précédent grâce aux fonctions génératrices.

87. a. Rappeler la fonction génératrice de la loi uniforme sur {2, …, 12}.
b. Soient X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans {1, …, 6}.
En étudiant les racines du polynôme $G_{X_1}.G_{X_2}$, montrer que la loi de X_1+X_2 ne peut pas être la loi uniforme sur {2, …, 12}.
c. Est-il possible de piper deux dés (indépendamment l'un de l'autre) de manière à rendre les sommes entre 2 et 12 équiprobables lors du lancer simultané de ces deux dés ?

Résultats asymptotiques.

88. Inégalité de Tchebychev-Cantelli.
Soit X une variable aléatoire réelle telle que : $E(X)=m$, et : $V(X)=\sigma^2$, et soit : ε > 0.
On pose : $Y=X-m+\varepsilon$.
a. Montrer que Y^2 admet une espérance puis calculer $E(Y^2)$.
b. Montrer que : $E(Y)\leq E(Y.1_{Y>0})\leq\sqrt{E(Y^2).P(Y>0)}$, où $1_{Y>0}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $(Y>0)$, définie par : ∀ ω ∈ Ω,
- $1_{Y>0}(\omega)=1$, si : $Y(\omega)>0$, et :
- $1_{Y>0}(\omega)=0$, si : $Y(\omega)\leq 0$.

c. En déduire que : $P(X-m\leq -\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{\sigma^2+\varepsilon^2}$.
d. En remplaçant X par $-X$, en déduire que : $P(|X-m|\geq\varepsilon)\leq\frac{2.\sigma^2}{\sigma^2+\varepsilon^2}$.
e. Quand cette inégalité est-elle meilleure que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ?