T.D. 11b – Variables aléatoires discrètes

Sauf mention contraire, les variables aléatoires utilisées sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. © Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi qu'une variable aléatoire fixée X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \max\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ et $m_n = \min\limits_{1\leq i\leq n} X_i$.

a) Montrer que M_n et m_n sont des variables aléatoires.

b) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(M_n \leq k)$ en fonction de $P(X \leq k)$.

c) On suppose ici que X suit la loi uniforme sur $[\![1, K]\!]$, où K est un entier tel que $K > 1$. Calculer $E(M_n)$. Quelle est sa limite quand n tend vers l'infini ?

2. © Loi hypergéométrique : cette loi usuelle (mais hors programme) modélise le tirage **sans remise** de n boules dans une urne contenant N boules dont une proportion p de boules blanches (*i.e.* Np boules blanches !). On désigne par Ω l'ensemble des tirages possibles (supposés équiprobables) et par X le nombre de boules blanches dans un tirage donné.

Déterminer $X(\Omega)$ et la loi de X. On vérifiera que

$$P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad ; \quad \text{on écrit } X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$$

Que devient $P(X = k)$ lorsque N tend vers l'infini (avec p constante) ?

Calculer $E(X)$ et $V(X)$. *On pourra justifier et utiliser la* ***formule de*** VANDERMONDE :

$$\forall (a, n) \in [\![0, N]\!]^2 \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k} = \binom{N}{n}$$

3. © Loi triangulaire : autre loi usuelle (et hors programme !) qui modélise la somme S de deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant la même loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Déterminer la loi de S, son espérance et sa variance. Pourquoi l'appelle-t-on “loi triangulaire” ?

4. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n (n entier donné, $n \geq 2$). On effectue deux tirages successifs **sans remise**. On note X_1 le numéro de la première boule tirée et X_2 celui de la seconde.

a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) et les lois marginales.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

c) Calculer leur coefficient de corrélation. Interpréter le résultat dans le cas $n = 2$.

5. © *Temps d'attente du deuxième succès* : on répète, de façon indépendante, une expérience aléatoire à l'issue de laquelle on obtient un succès avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note X (*resp.* Y) la variable aléatoire donnant le rang du premier (*resp.* deuxième) succès.

Retrouver la loi de X et son espérance. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

En déduire la loi de Y et son espérance.

6. Un objet est scindé en X morceaux au cours d'un test de résistance. La variable aléatoire X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. Indépendamment des autres, chaque morceau a la probabilité p d'être détruit durant le test. On note Y le nombre de morceaux détruits pendant le test.

a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, donner la probabilité conditionnelle de Y sachant $(X = k)$.

b) En déduire la loi de Y. $P(Y = j)$ *apparaîtra sous forme d'une somme, que l'on ne cherchera pas à calculer.*

c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

7. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire, indépendante de X, définie par $P(Y = 1) = P(Y = 2) = 1/2$.

a) Calculer la probabilité p que X prenne une valeur paire et montrer que $p > 1/2$.

b) Calculer la probabilité que $Z = XY$ prenne une valeur paire.

8. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et $p \in]0,1[$.

a) Dans cette question Y suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

On définit la variable aléatoire Z par : $Z = 0$ si $Y = 0$ et $Z = X$ sinon.

Déterminer la loi de Z, son espérance et sa variance si elles existent.

b) On suppose maintenant que Y suit une loi géométrique de paramètre p. Calculer $P(X = Y)$.

9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. Déterminer a réel tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) = an^2 \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Donner alors la fonction génératrice de X et son espérance.

10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$ et Y suivant la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).

Déterminer la fonction génératrice de $Z = XY$ en fonction de celle de X et montrer que $G_Z = G_Y \circ G_X$.

Si en outre X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, calculer l'espérance et la variance de Z.

11. À chaque fois qu'on le lance, un dé donne un 6 avec la probabilité $p \in]0,1[$. On le lance n fois, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus et $F_n = X_n/n$ la fréquence d'obtention d'un 6. On cherche à estimer expérimentalement la valeur de p.

a) Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.

b) Montrer que $V(F_n) \leq \dfrac{1}{4n}$.

c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une condition suffisante sur n pour que

$$P\left(|F_n - p| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,05.$$

d) Que devient cette condition si l'on remplace 10^{-2} par 10^{-3} ?

12. © <u>*Pseudo-solutions d'un système linéaire*</u> : étant donnée une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on note Φ_A l'application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A ; on suppose $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que le système (S) $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ n'admette pas de solution.

On appelle alors *pseudo-solution* de (S) tout $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\left\{\|AX - B\|\,,\ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right\}.$$

a) À l'aide de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im}\Phi_A$, montrer que (S) admet au moins une pseudo-solution ; si en outre Φ_A est injective, montrer que (S) admet une unique pseudo-solution.

b) Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, établir

$$X \text{ pseudo-solution de } (S) \Leftrightarrow \forall Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad (AY|AX - B) = 0 \Leftrightarrow {}^tAAX = {}^tAB.$$

c) <u>*Méthode des moindres carrés*</u> : étant donnés n points $M_k = (x_k, y_k)$, $1 \leq k \leq n$, de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on cherche une droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} M_kH_k{}^2$ soit minimum, où $H_k = (x_k, ax_k + b)$.

Montrer que ce problème se ramène à la recherche des pseudo-solutions d'un système (S) de la forme $AX = B$, où l'on précisera les matrices A et B.

Quand Φ_A est-elle injective ? Lorsque c'est le cas, déterminer la pseudo-solution de (S).