Variables aléatoires (corrigé niveau 2).

Loi d'une variable aléatoire, espérance et variance.

51. Notons tout d'abord que : $X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Puisque par ailleurs, chaque lancer ne donne pas un résultat acceptable, on va évaluer la probabilité qu'un premier lancer « acceptable » donne un résultat égal à k.

Pour cela utilisons les événements : « le premier résultat pair est $2.k$ », pour : $1 \leq k \leq 6$.

On pourra alors considérer la loi de X comme uniforme si la probabilité des événements précédents vaut $\frac{1}{6}$ dans tous les cas.

Or cette probabilité vaut : $P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_n)$, où on a noté :

A_n : « le $n^{\text{ième}}$ lancer donne un résultat impair »,

B_n : « le $n^{\text{ième}}$ lancer donne $2.k$ ».

En effet, la famille d'événements utilisée est une famille d'événements deux à deux incompatibles.

De plus, par indépendance d'événements (les lancers sont indépendants) :

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_1)\ldots P(A_{n-1}).P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{6}{12}\right)^{n-1}.\frac{1}{12} = \frac{1}{12}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}.$$

Donc la loi de X est uniforme.

52. a. Il est immédiat par récurrence que : $\forall\ n \geq 0$, $P(X = n) = \frac{1}{n!}.P(X = 0)$,

d'où : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{n!}.P(X = 0)$.

Puisque : $\sum_{n \in X(\Omega)} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} [P(X = n) + P(X = -n)] + P(X = 0) = 1 = P(X = 0).\left[1 + 2.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right]$,

on en déduit que : $P(X = 0) = \frac{1}{1 + 2.(e-1)} = \frac{1}{2.e - 1}$,

puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = -n) = P(X = n) = \frac{1}{n!}.\frac{1}{2.e-1}$.

b. X admet alors une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \in X(\Omega)} n.P(X = n)$ est absolument convergente.

Or les deux séries $\sum_{n \geq 1} |n.P(X = n)|$ et $\sum_{n \geq 1} |-n.P(X = -n)|$ sont absolument convergentes car :

$$\forall\ n \geq 1,\ |n.P(X = n)| = |-n.P(X = -n)| = \frac{1}{2.e-1}.\frac{1}{(n-1)!}.$$

Donc X admet une espérance et : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} n.P(X = n) - \sum_{n=1}^{+\infty} n.P(X = n) = 0$.

X est donc une variable centrée.

Puis pour des raisons similaires, X^2 admet une espérance car par le théorème de transfert :

$$|n^2.P(X = n)| = |(-n)^2.P(X = -n)| = \frac{1}{2.e-1}.\frac{n}{(n-1)!},$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Enfin : $E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2.2.P(X = n) = \frac{2}{2.e-1}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \frac{2}{2.e-1}.\left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}\right]$,

soit :

$$E(X^2) = \frac{2}{2.e-1}.\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + e\right] = \frac{4.e}{2.e-1},$$

et finalement : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \dfrac{4.e}{2.e-1}$.

53. a. On peut noter que puisqu'il y a effectivement des boules rouges, vertes et bleues, on a :
$0 < v < 1$, $0 < b < 1$, $0 < r < 1$, et évidemment :
$v + b + r = 1$.

b. On commence par remarquer que : $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, puisqu'il faut au moins 2 tirages pour qu'il y ait changement de couleur.
De plus, si on note B_n (respectivement R_n et V_n) les événements :
« le $n^{\text{ième}}$ tirage donne une boule Bleue (respectivement Rouge et Verte) »,
alors : $P(B_n) = b$, $P(R_n) = r$, et : $P(V_n) = v$.
Pour : $n \geq 2$, l'événement $(X = n)$ correspond à :

$$(X = n) = (B_1 \cap ... \cap B_{n-1} \cap \overline{B_n}) \cup (R_1 \cap ... \cap R_{n-1} \cap \overline{R_n}) \cup (V_1 \cap ... \cap V_{n-1} \cap \overline{V_n}).$$

Les trois événements étant incompatibles puis par indépendance des tirages, on a alors :

$P(X = n) = P(B_1)...P(B_{n-1}).P(\overline{B_n}) + P(R_1)...P(R_{n-1}).P(\overline{R_n}) + P(V_1)...P(V_{n-1}).P(\overline{V_n})$, et donc :

$P(X = n) = b^{n-1}.(1-b) + r^{n-1}.(1-r) + v^{n-1}.(1-v)$.

On peut vérifier qu'on a bien alors : $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

c. La série $\sum_{n\geq 2} n.P(X = n)$ converge alors comme somme de trois séries convergentes et :

$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.P(X = n) = (1-b).\sum_{n=2}^{+\infty} n.b^{n-1} + (1-r).\sum_{n=2}^{+\infty} n.r^{n-1} + (1-v).\sum_{n=2}^{+\infty} n.v^{n-1}.$$

Or : $\sum_{n=2}^{+\infty} n.b^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n.b^{n-1} - 1 = \dfrac{1}{(1-b)^2} - 1$,

de même pour les deux autres, donc :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} - (1-b) + \frac{1}{1-r} - (1-r) + \frac{1}{1-v} - (1-v) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2.$$

54. a. Puisque : $T_k(\Omega) = \{0,1\}$, c'est une variable de Bernoulli et T_k s'annule si et seulement si toutes les personnes descendent à un étage différent du $k^{\text{ième}}$, soit :

$P(T_k = 0) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^p$, et donc : $P(T_k = 1) = 1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^p$.

Enfin : $E(T_k) = 0.P(T_k = 0 + 1.P(T_k = 1) = 1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^p$.

b. X compte en fait le nombre d'arrêts de l'ascenseur et on a : $X = T_1 + ... + T_n$.

Comme l'espérance est linéaire, on en déduit que : $E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = n.\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^p\right)$.

Remarques :

- s'il n'y a qu'une personne, il n'y a qu'un arrêt et on a bien alors : $E(X) = 1$,
- si le nombre d'étages devient très grand, on a :

$$E(X) = n.\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p\right) = n.\left(1 - \left(1 - \frac{p}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = p + o_{+\infty}(1),$$

ce qui se comprend car il y a peu de chances que deux personnes descendent au même étage.

55. a. On peut reconstituer la fraction et identifier les termes obtenus pour déterminer α, β, γ, soit donc :

$$\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma}{n+2} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma).n^2 + (3.\alpha + 2.\beta + \gamma).n + (2.\alpha)}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{1}{n.(n+1).(n+2)},$$

et le système obtenu donne finalement : $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$, et : $\gamma = \frac{1}{2}$.

b. On commence par remarquer que pour toute valeur de a, la série $\sum_{n\geq 1} p_n$ converge car : $p_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Puis : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} p_n = a.\left(\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n+2}\right) = a.\left(\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{k=2}^{N+1}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}.\sum_{k=3}^{N+2}\frac{1}{n}\right)$,

et : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} p_n = a.\left(\frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{N+1}\right) + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}\right)\right) = a.\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{N+2}-\frac{1}{N+1}\right)\right)$.

Donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on conclut que : $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \frac{a}{4}$.

En choisissant : $a = 4$, la série $\sum_{n\geq 1} p_n$ est alors à termes positifs et de somme 1 et $(n, p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors bien la loi de probabilité d'une variable discrète X.

c. La série $\sum_{n\geq 1} n.P(X=n)$ étant à termes positifs, elle converge car : $n.P(X=n) = n.p_n = O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Puis : $\sum_{n=1}^{+\infty} n.P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1).(n+2)} = 4.\left(\frac{1}{2}-0\right) = 2$,

en reconnaissant une série télescopique.

d. On peut remarquer que : $Y = (X-3)^2$, et donc : $Y(\Omega) = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

Puis :

- $(Y=0) = (X=3)$, et : $P(Y=0) = P(X=3) = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$,
- $(Y=1) = (X=4) \cup (X=2)$, et par incompatibilité : $P(Y=1) = P(X=4) + P(X=2) = \frac{1}{30} + \frac{1}{6} = \frac{1}{5}$,
- $(Y=4) = (X=5) \cup (X=1)$, et de même : $P(Y=4) = P(X=5) + P(X=1) = \frac{2}{105} + \frac{2}{3} = \frac{24}{35}$,
- $\forall$ n ≥ 3, $(Y=n^2) = (X=n+3) \cup (X=3-n)$, d'où : $P(Y=n^2) = P(X=n+3) + P(X=3-n) = p_{n+3}$.

Par le théorème de transfert, Y admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1}(n-3)^2.P(X=n)$ converge.

Or on constate que : $(n-3)^2.P(X=n) = \frac{4.(n-3)^2}{n.(n+1).(n+2)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{n}$.

Donc la série proposée diverge et Y n'admet pas d'espérance.

56. a. On commence par préciser que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Puis on note A_n l'événement : « le perchiste franchit la barre de hauteur n », et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(X=n) = A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap \overline{A_{n+1}}$,

et : $P(X=n) = P(A_1)\ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n).P_{A_1\cap\ldots\cap A_n}(\overline{A_{n+1}}) = 1.\frac{1}{2}\ldots\frac{1}{n}.\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{(n-1)!.(n+1)}$.

De plus, on peut remarquer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!.(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) = 1,$$

comme somme d'une série télescopique.

Donc l'événement où le perchiste franchit toutes les barres (qui constitue avec les $(X=n)$ un système complet d'événements) a une probabilité égale à :

$$P(X=+\infty) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 0.$$

b. La variable : $Y = X + 1$, a une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1}(n+1).P(X = n)$ converge (en fait est absolument convergente mais on sait qu'elle est positive), par le théorème de transfert.

Or : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1).P(X = n) = \dfrac{1}{(n-1)!}$,

donc Y a une espérance qui vaut : $E(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1).P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{n!} = e^1 = e$.

Par combinaison linéaire : $X = Y - 1$, a donc une espérance et par linéarité de l'espérance :
$E(X) = E(Y-1) = E(Y) - 1 = e - 1$.

57. On va noter B_n (resp. N_n) l'événement : « on tire une boule Blanche (resp. Noire) au $n^{\text{ième}}$ tirage ».

a. A l'issue du 1er tirage, il peut y avoir 1 ou 2 boules Blanches dans la boîte, plus précisément :
- si on a tiré une boule Noire, il y a après 1 boule Noire et 2 boules Blanches,
- si on a tiré une boule Blanche, il y a après 2 boules Noires et 1 boule Blanche.

On en déduit que :
- $P(Y_1 = 0) = 0$,
- $P(Y_1 = 1) = P(B_1) = \dfrac{2}{3}$,
- $P(Y_1 = 2) = P(N_1) = \dfrac{1}{3}$.

b. L'événement $(Y_n = 2)$ correspond à tirer jusqu'au $n^{\text{ième}}$ tirage uniquement la boule Noire.

Donc : $P(Y = 2) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, par la formule des probabilités composées, qu'on ne détaille pas ici.

c. On a déjà calculé u_1 qui vaut : $u_1 = \dfrac{2}{3}$.

On peut écrire : $\forall\ n \geq 1,\ (Y_{n+1} = 1) = ((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) \cup ((Y_n = 2) \cap B_{n+1})$,
et ces événements étant incompatibles, on en déduit que :
$u_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) + P((Y_n = 2) \cap B_{n+1})$,
puis :
- $P((Y_n = 1) \cap N_{n+1}) = P_{(Y_n=1)}(N_{n+1}).P(Y_n = 1) = \dfrac{2}{3}.u_n$, et :
- $P((Y_n = 2) \cap B_{n+1}) = P_{(Y_n=2)}(B_{n+1}).P(Y_n = 2) = \dfrac{2}{3}.\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, soit finalement :

$\forall\ n \geq 1,\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}.u_n + \dfrac{2}{3^{n+1}}$.

Si alors on note : $\forall\ n \geq 1,\ v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}.u_n + \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}.\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) = \frac{2}{3}.v_n.$$

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}.v_1 = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}.\left(u_1 + \dfrac{2}{3}\right) = 2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, soit : $u_n = v_n - \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{2.(2^n - 1)}{3^n}$.

d. On en déduit que : $\forall\ n \geq 1,\ P(Y_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{2.(2^n - 1)}{3^n} = \dfrac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n}$, car $((Y = 0), (Y = 1), (Y = 2))$ forme un système complet d'événements.

e. On en déduit que : $\forall\ n \geq 1,\ E(Y_n) = 0.P(Y_n = 0) + 1.P(Y_n = 1) + 2.P(Y_n = 2) = 2.\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

f. Tout d'abord, Z prend ses valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, puisqu'il faut au moins 2 tirages pour éliminer les boules Blanches.

On peut alors écrire : $\forall\ n \geq 2, (Z = n) = (Y_n = 0) \cap (Y_{n-1} \neq 0) = (Y_n = 0) \cap \overline{(Y_{n-1} = 0)}$.

Or : $(Y_{n-1} = 0) \subset (Y_n = 0)$, donc : $(Z = n) = (Y_n = 0) \cap \overline{(Y_{n-1} = 0)} = (Y_n = 0) \setminus (Y_{n-1} = 0)$.

D'où : $P(Z = n) = P(Y_n = 0) - P(Y_{n-1} = 0) = \dfrac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n} - \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} = \dfrac{2^n - 2}{3^n}$.

Enfin la série $\sum_{n \geq 2} n.P(Z = n)$ converge et :

$$E(Z) = \sum_{n=2}^{+\infty} n.\frac{2^n - 2}{3^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n.\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2.\sum_{n=2}^{+\infty} n.\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2}{3}.\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} - 1\right] - 2.\frac{1}{3}.\left[\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} - 1\right] = \frac{16}{3} - \frac{5}{6} = \frac{9}{2}.$$

58. a. Tout d'abord X_1 est égale à la longueur du premier saut puisque la puce part de la case 0.

Donc : $X_1(\Omega) = \{1,2\}$,

et comme les sauts sont faits au hasard : $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

Puis : $E(X_1) = 1.\dfrac{1}{2} + 2.\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$,

et : $E(X_1^2) = 1^2.\dfrac{1}{2} + 2^2.\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$, d'où : $V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = \dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = 1$.

b. Après 2 sauts, la puce peut se retrouver en case 2, 3 ou 4, donc : $X_2(\Omega) = \{2.3,4\}$.

Se retrouver en case 2 signifie qu'elle a effectué 2 sauts d'une case, autrement dit :

$P(X_2 = 2) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Formellement, on pourrait faire intervenir l'événement S_n « le $n^{\text{ième}}$ saut est de 2 cases », puis écrire l'événement $(X_2 = 2)$ sous la forme $\overline{S_1} \cap \overline{S_2}$, et calculer la probabilité avec l'indépendance des sauts.

De même, avec le fait que pour franchir 3 cases, il y a deux options :

$P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$,

et toujours de la même façon (avec 2 sauts de deux cases) :

$P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Pour son espérance : $E(X_2) = 2.\dfrac{1}{4} + 3.\dfrac{1}{2} + 4.\dfrac{1}{4} = 3$,

puis : $E(X_2^2) = 2^2.\dfrac{1}{4} + 3^2.\dfrac{1}{2} + 4^2.\dfrac{1}{4} = \dfrac{19}{2}$,

d'où la variance de X_2 : $V(X_2) = E(X_2^2) - (E(X_2))^2 = \dfrac{19}{2} - 9 = \dfrac{1}{2}$.

c. Effectuer un saut de 2 cases à n'importe quel moment correspond à une expérience de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ et Y_n correspond à compter le nombre de succès dans une répétition (indépendante) de n de ces expériences.

La loi de Y_n est suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

Donc : $Y_n(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$, et : $\forall\ 0 \leq k \leq n$, $P(Y_n = k) = \dbinom{n}{k}.\left(\dfrac{1}{2}\right)^k.\left(1 - \dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dfrac{1}{2^n}.\dbinom{n}{k}$.

Puis : $E(Y_n) = n.\dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{2}$, et : $V(Y_n) = n.\dfrac{1}{2}.\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n}{4}$.

d. Partant de la cas 0, la puce après n sauts, a parcouru $2.Y_n$ cases (correspondant aux sauts de 2 cases) et le reste (soit $n-Y_n$ sauts) en sauts de 1 case soit $1.(n-Y_n)$ cases.

Au total, on a donc : $X_n = 2.Y_n + (n-Y_n) = n+Y_n$.

Donc :

- $X_n(\Omega) = \{n, n+1, ..., 2.n\}$,
- $\forall\ n \le k \le 2.n$, $P(X_n = k) = P(Y_n = k-n) = \frac{1}{2^n}.\binom{n}{k-n}$,
- par linéarité : $E(X_n) = E(Y_n + n) = E(Y_n) + n = \frac{n}{2} + n = \frac{3.n}{2}$,
- et enfin : $V(X_n) = V(Y_n + n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Lois usuelles, modélisations, approximations.

59. a. On rappelle tout d'abord que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^n}{n!}$,

donc : $u_n = \frac{P(X=n+1)}{P(X=n)} = \frac{\lambda}{n+1}$.

b. Distinguons alors deux cas :

- si : $\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors : $\exists\ N \in \mathbb{N}$, $u_N = 1$, plus précisément pour : $N = \lambda - 1$.

Dans ce cas : $\forall\ n < N$, $u_n > 1$,

et la suite u est strictement croissante jusqu'au rang N, puis on a :

$P(X=N) = P(X=N+1)$, et enfin : $\forall\ n > N$, $u_N < 1$,

et la suite u est strictement décroissante à partir du rang $N+1$.

Donc u atteint son maximum en N et en $N+1$ où elle vaut : $u_N = u_{N+1} = e^{-\lambda}.\frac{\lambda^N}{N!}$.

- si : $\lambda \notin \mathbb{N}^*$, alors : $\forall\ n \le \lfloor \lambda \rfloor - 1$, $u_n > 1$,

et la suite u est strictement croissante jusqu'à ce rang puis on a : $\forall\ n \ge \lfloor \lambda \rfloor$, $u_N < 1$,

et la suite u est strictement décroissante à partir de ce rang.

Dans ce cas, u atteint son maximum pour la valeur : $N = \lfloor \lambda \rfloor$.

60. a. Tout d'abord l'ensemble des valeurs prises par S est $\mathbb{N}$

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P(S=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k, Y=n-k)$,

par incompatibilité d'événements et : $P(S=n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\mu}.\frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}.e^{-\mu}}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!.(n-k)!}.\lambda^k.\mu^{n-k}$,

par indépendance des variables, et enfin : $P(S=n) = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}.(\lambda+\mu)^n$.

Autrement dit S suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda+\mu)$.

b. On a ensuite : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$:

- si : $k > n$, alors : $P_{(S=n)}(X=k) = 0$, et :
- si : $0 \le k \le n$,

$$P_{(S=n)}(X=k) = \frac{P(X=k, S=n)}{P(S=n)} = \frac{P(X=k, Y=n-k)}{P(S=n)} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^k}{k!}.\frac{e^{-\mu}.\mu^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)}.(\lambda+\mu)^n},$$

d'où : $P_{(S=n)}(X=k) = \binom{k}{n}.\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k.\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$.

Cette loi conditionnelle est donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n,\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

61. On peut par exemple commencer par indiquer que : $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (Z \le n) = (X \le n) \cap (Y \le n)$,
et par indépendance : $P(Z \le n) = P(X \le n).P(Y \le n)$.
Puis : $P(X \le n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n}(X = k)\right) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p.(1-p)^{k-1} = p.\dfrac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^n$,
par incompatibilité, avec un résultat semblable pour Y, soit : $P(Y \le n) = 1-(1-q)^n$.
On en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ P(Z \le n) = (1-(1-p)^n).(1-(1-q)^n)$,
et par complémentarité : $\forall\ n \ge 2,\ P(Z \ge n) = 1 - P(Z \le n-1)$,
soit donc : $\forall\ n \ge 2,\ P(Z \ge n) = 1-(1-(1-p)^{n-1}).(1-(1-q)^{n-1}) = (1-p)^{n-1} + (1-q)^{n-1} - ((1-p).(1-q))^{n-1}$,
cette égalité étant encore vérifiée pour : $n = 1$, puisque : $P(Z \ge 1) = 1$.
La série $\sum_{n \ge 1} P(Z \ge n)$ est alors clairement convergente (comme somme de séries géométriques convergentes) et : $\sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \ge n) = \sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty}(1-q)^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty}((1-p).(1-q))^{n-1}$,
puisque les trois séries convergent.
On conclut donc que :

$$E(Z) = \frac{1}{1-(1-p)} + \frac{1}{1-(1-q)} - \frac{1}{1-(1-p).(1-q)} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p+q-p.q}.$$

62. a. Tout d'abord, l'ensemble des valeurs prises par Z est $\mathbb{N}$.
Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (Z = 2.n) = (X = 1, Y = 2.n) \cup (X = 2, Y = n)$,
d'où par incompatibilité et indépendance :

$$P(Z = 2.n) = P(X = 1, Y = 2.n) + P(X = 2, Y = n) = P(X = 1).P(Y = 2.n) + P(X = 2).P(Y = n),$$

soit : $P(Z = 2.n) = \dfrac{1}{2}.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^{2.n}}{(2.n)!} + \dfrac{1}{2}.e^{-\lambda}.\dfrac{\lambda^2}{n!}$.
De même : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (Z = 2.n+1) = (X = 1, Y = 2.n+1)$, et :

$$P(Z = 2.n+1) = P(X = 1).P(Y = 2.n+1) = \frac{1}{2}.e^{-\lambda}.\frac{\lambda^{2.n+1}}{(2.n+1)!}.$$

Puisque les variables X et Y sont indépendantes, on a : $E(Z) = E(X.Y) = E(X).E(Y) = \dfrac{3}{2}.\lambda$.
De même X^2 et Y^2 sont indépendantes et : $E(Z^2) = E(X^2.Y^2) = E(X^2).E(Y^2)$.
Puis : $E(X^2) = 1.P(X = 1) + 4.P(X = 2) = \dfrac{5}{2}$, et : $E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2 = \lambda + \lambda^2$.
Finalement : $V(Z) = \dfrac{5}{2}.(\lambda + \lambda^2) - \left(\dfrac{3}{2}.\lambda\right)^2 = \dfrac{\lambda.(10+\lambda)}{4}$.

b. Il paraît plus simple de chercher la probabilité pour que Z soit impair, c'est-à-dire :

$$P(Z\ est\ impair) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(Z = 2.n+1)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = 2.n+1) = \frac{e^{-\lambda}}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2.n+1}}{(2.n+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{2}.sh(\lambda) = \frac{1-e^{-2.\lambda}}{4},$$

le résultat étant obtenu par incompatibilité d'événements.
Donc : $P(Z\ est\ pair) = 1 - P(Z\ est\ impair) = 1 - \dfrac{1-e^{-2.\lambda}}{4} = \dfrac{3+e^{-2.\lambda}}{4}$.

63. a. Tout d'abord l'ensemble des valeurs prises par : $S = X + Y$, est : $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Puis par incompatibilité puis indépendance : $\forall\ n \geq 2$, $P(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k).P(Y=n-k)$.

Donc : $\forall\ n \geq 2$, $P(Z=n) = \sum_{k=1}^{n-1} p.(1-p)^{k-1}.p.(1-p)^{n-k-1} = (n-1).p^2.(1-p)^{n-2}$.

D'autre part, l'ensemble des valeurs prises par : $T = \min(X,Y)$, est $\mathbb{N}^*$ et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(T \geq n) = P(X \geq n, Y \geq n) = P(X \geq n).P(Y \geq n) = P(X \geq n)^2$,

toujours par indépendance et puisque X et Y suivent la même loi.

On a ensuite : $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n}^{+\infty} p.(1-p)^{k-1} = p.(1-p)^{n-1}.\dfrac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1}$.

Donc : $P(T \geq n) = (1-p)^{2.n-2}$.

Comme de plus : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(T \geq n) = P(T=n) + P(T \geq n+1)$,

par incompatibilité d'événements, on en déduit que :

$P(T=n) = P(T \geq n) - P(T \geq n+1) = (1-p)^{2.n-2} - (1-p)^{2.n} = ((1-p)^2)^{n-1}.(2.p-p^2)$.

Enfin, l'ensemble des valeurs prises par : $U = \max(X,Y)$, est $\mathbb{N}^*$, et en s'inspirant de ce qui précède, on commence par remarquer, pour les mêmes raisons que précédemment, que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(U \leq n) = P(X \leq n).P(Y \leq n) = P(X \leq n)^2$.

De plus : $P(X \leq n) = 1 - P(X \geq n+1) = 1-(1-p)^n$,

et on en déduit que : $P(U \leq n) = (1-(1-p)^n)^2$.

En remarquant que cette égalité est encore valable pour : $n=0$, on en déduit finalement que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(U \leq n+1) = P(U=n) + P(U \leq n)$, et :

$P(U=n) = P(U \leq n+1) - P(U \leq n) = (1-(1-p)^{n+1})^2 - (1-(1-p)^n)^2$.

b. • Si on considère le lancer d'une pièce déséquilibrée qui donne Pile avec la probabilité p, alors X peut représenter la variable aléatoire décrivant le rang du premier Pile, et Y peut représenter la variable aléatoire donnant le rang du premier Pile <u>suivant</u> le premier Pile obtenu.

Dans ce cas, $X+Y$ est la variable aléatoire donnant le rang du second Pile (voir exercices précédents).

• D'autre part, si on imagine le lancer en parallèle de deux pièces comme dans le premier exemple, alors X et Y représentent les variables aléatoires donnant le rang d'apparition du premier Pile pour chaque pièce, indépendamment de l'autre.

Dans ce cas $\min(X,Y)$ représente le rang d'apparition du premier Pile, quelque soit la pièce envisagée.

Or la probabilité d'apparition d'un premier Pile est le complément à 1 de la probabilité d'apparition de deux Face (pour chaque pièce) et vaut donc $(1-p)^2$.

Autrement dit, on est dans le cas de la répétition d'une expérience de Bernoulli où la probabilité d'échec est $(1-p)^2$.

Donc $\min(X,Y)$ doit suivre la loi géométrique (loi du premier succès) $\mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.

Or : $1-(1-p)^2 = (2.p-p^2)$, donc c'est bien ce qu'on avait trouvé puisque :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $P(T=n) = (2.p-p^2).((1-p)^2)^{n-1} = (2.p-p^2).(1-(2.p-p^2))^{n-1}$.

• Enfin, dans la même configuration qu'au dessus, $\max(X,Y)$ représente le nombre nécessaire de lancers pour obtenir au moins un Pile sur les <u>deux</u> pièces, qui ne correspond à aucun schéma classique.

c. La première probabilité vaut, par incompatibilités d'événements et indépendance :

$P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n).P(Y=n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (p.(1-p)^{n-1})^2 = p^2.\sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{n-1}$, et :

$P(X=Y) = p^2.\dfrac{1}{1-(1-p)^2} = \dfrac{p}{2-p}$.

Pour la deuxième probabilité, on a pour les mêmes raisons :

$P(X \leq Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n, Y \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n).P(Y \geq n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p.((1-p)^{n-1})^2 = p.\sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{n-1}$,

avec le calcul fait en question a, et donc : $P(X \leq Y) = p.\dfrac{1}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1}{2-p}$.

Remarque : on a aussi (par symétrie) : $P(X \geq Y) = \dfrac{1}{2-p}$, et :

$$P(X \geq Y) + P(X < Y) = P(X \geq Y) + (P(X \leq Y) - P(X = Y)) = \frac{1}{2-p} + \frac{1}{2-p} - \frac{p}{2-p} = 1.$$

Couple et famille de variables aléatoires.

64. On peut remarquer que X et Y jouent des rôles totalement symétriques.

a. Pour cela, on a : $\forall\ j \in \mathbb{N}$, $S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a.\dfrac{i+j}{i!.j!} = \dfrac{a}{j!}.\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\dfrac{i}{i!} + j.\sum_{i=0}^{+\infty}\dfrac{1}{i!}\right) = \dfrac{a}{j!}.\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(i-1)!} + j.e\right) = \dfrac{a.e}{j!}.(j+1)$,

toutes les séries qui apparaissent étant convergentes.

Puis la série $\sum_{j\geq 0} S_j$ converge et : $\sum_{j=0}^{+\infty} S_j = \sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{a.e}{j!}.(j+1) = a.e.\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{j}{j!} + \sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}\right) = 2.a.e^2$.

Si donc on pose : $a = \dfrac{1}{2.e^2}$, alors la famille $((i,j),\ p_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, détermine bien la loi d'un couple de variables aléatoires discrètes.

b. Les lois marginales de X et de Y sont données par :

$$\forall\ i \in \mathbb{N},\ P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j) = \frac{1}{2.e^2}.\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i+j}{i!.j!} = \frac{1}{2.e}.\frac{i+1}{i!},$$

et de façon symétrique : $\forall\ j \in \mathbb{N}$, $P(Y=j) = \dfrac{1}{2.e}.\dfrac{j+1}{j!}$.

On peut alors remarquer que : $P(X=0, Y=0) = 0$, et : $P(X=0).P(Y=0) = \left(\dfrac{1}{2.e}\right)^2 \neq 0$,

et les variables X et Y ne sont pas indépendantes.

c. Tout d'abord X (et Y) admettent une espérance puisque : $i.P(X=i) = i.\dfrac{1}{2.e}.\dfrac{i+1}{i!} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{i^2}\right)$.

De plus : $E(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} i.P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2.e}.i.\dfrac{i+1}{i!} = \dfrac{1}{2.e}.\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{i.(i-1)+2.i}{i!} = \dfrac{1}{2.e}.\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{i.(i-1)}{i!} + 2.\sum_{j=0}^{+\infty}\dfrac{i}{i!}\right)\dfrac{3.e}{2.e} = \dfrac{3}{2}$.

Y admet donc aussi une espérance qui vaut la même valeur.

Puis $X.Y$ admet une espérance car par la formule du transfert, la série $\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} i.j.P(X=i, Y=j)\right)$ converge.

En effet, on a tout d'abord : $\forall\ i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{+\infty} i.j.P(X=i,Y=j) = \dfrac{i}{i!}.\dfrac{1}{2.e^2}.\sum_{j=0}^{+\infty} j.\dfrac{i+j}{j!}$.

Donc : $\sum_{j=0}^{+\infty} i.j.P(X=i,Y=j) = \dfrac{i}{i!}.\dfrac{1}{2.e^2}.\left(i.\sum_{j=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(j-1)!} + \sum_{j=1}^{+\infty}\dfrac{j}{(j-1)!}\right) = \dfrac{i}{i!}.\dfrac{1}{2.e^2}.(i.e + 2.e) = \dfrac{i.(i+2)}{i!}.\dfrac{1}{2.e}$.

On constate alors que la série obtenue (en i) est bien convergente, et :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} i.j.P(X=i,Y=j)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{i.(i+2)}{i!}.\frac{1}{2.e}\right) = \frac{1}{2.e}.\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i.(i+2)}{i!} = \frac{1}{2.e}.\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i.(i-1)+3.i}{i!} = \frac{4.e}{2.e} = 2.$$

Finalement $X.Y$ admet une covariance et : $\mathrm{cov}(X,Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y) = 2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = -\dfrac{1}{4}$.

Remarque : en cas de doute pour la manipulation de sommes infinies, on peut toujours revenir à des sommes partielles.

d. De la même façon, par la formule de transfert, la série $\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j}.P(X=i,Y=j)\right)$ est convergente.

En effet : $\forall\ i \in \mathbb{N},\ \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j}.P(X=i,Y=j) = 2^i.\frac{1}{i!}.\frac{1}{2.e^2}.\sum_{j=0}^{+\infty} 2^j.\frac{i+j}{j!} = \frac{2^i}{2.e^2.i!}.\left(i.\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^j}{j!} + 2.\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2^{j-1}}{(j-1)!}\right)$,

et : $\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j}.P(X=i,Y=j) = \frac{2^i}{2.e^2.i!}.\left(i.e^2+2.e^2\right) = \frac{2^i.(i+2)}{2.i!}$.

On constate alors que la série obtenue (en i) est bien convergente, et :

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{i+j}.P(X=i,Y=j)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{2^i.(i+2)}{2.i!}\right) = \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{i}{i!}.2^i + \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{2^i}{i!} = \frac{1}{2}.2.\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{2^{i-1}}{(i-1)!} + e^2 = 2.e^2.$$

65. a. Tout d'abord l'ensemble des valeurs prises par T_n est $\mathbb{N}^*$, et : $\forall\ k \geq 1,\ P(T_n = k) = p.(1-p)^{k-1}$.

On a donc, comme loi géométrique : $E(T_n) = \frac{1}{p}$, et : $V(T_n) = \frac{1-p}{p^2}$.

Remarque : on peut retrouver ces résultats avec :

- la série $\sum_{k\geq 1} k.p.(1-p)^{k-1}$, converge car : $k.p.(1-p)^{k-1} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$,

donc T_n admet une espérance et : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k.p.(1-p)^{k-1} = p.\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$.

- la série $\sum_{k\geq 1} k^2.p.(1-p)^{k-1}$ converge pour une raison similaire donc T_n^2 admet une espérance et :

$E(T_n^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2.p.(1-p)^{k-1} = p.(1-p).\sum_{k=2}^{+\infty} k.(k-1).(1-p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{+\infty} k.p.(1-p)^{k-1} = \frac{2.p.(1-p)}{(1-(1-p))^3} + \frac{1}{p}$, soit :

$E(T_n^2) = \frac{2.(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$,

puis : $V(T_n) = E(T_n^2) - E(T_n)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$.

b. La variable aléatoire T_1 donne le rang du premier Pile, soit : $S_1 = T_1$

La somme $T_1 + T_2$ est égale à la somme du rang du premier Pile et du nombre de lancers supplémentaires nécessaires pour obtenir le second Pile, soit le rang du second Pile et : $S_2 = T_1 + T_2$.

Plus généralement $T_1 + ... + T_n$ est égale au rang du n ième Pile, soit la valeur de S_n et : $S_n = T_1 + ... + T_n$.

c. Par linéarité de l'espérance, S_n admet donc une espérance et :

$\forall\ n \geq 1,\ E(S_n) = E(T_1) + ... + E(T_n) = \frac{n}{p}$.

Tous les lancers étant indépendants, les variables aléatoires $T_1,...,T_n$ sont mutuellement indépendantes et donc : $\forall\ n \geq 1,\ V(S_n) = V(T_1) + ... + V(T_n) = \frac{n.(1-p)}{p^2}$.

66. Soit : $N \geq 2$.

Une urne contient des boules Blanches en proportion p et Noires en proportion : $q = 1-p$.

On effectue des tirages avec remise jusqu'à l'obtention pour la troisième fois d'une boule Blanche.

On appelle U, D et T les variables aléatoires égales au nombre de tirages nécessaires pour obtenir respectivement une première, une deuxième et une troisième boule Blanche.

a. La loi de U est la loi d'obtention d'un premier succès dans la répétition indépendante d'une expérience de Bernoulli de paramètre p donc U suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Puis :

- $D(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, puisqu'il faut au moins deux tirages pour avoir une 2ième boule Blanche, et :
- $\forall\ n \geq 2$, $(D = n)$ correspond à obtenir une boule Blanche au n ième tirage et une autre n'importe quand avant ce n ième tirage.

Donc par indépendance des tirages :

$$P(D=n)=\binom{n-1}{1}.p^1.q^{n-1-1}.p=(n-1).p^2.q^{n-2}.$$

La même démarche pour T donne (1 boule Blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage, et deux Blanches à des moments quelconques au cours des tirages précédents) :

- $T(\Omega)=\mathbb{N}\setminus\{0,1,2\}$ (au moins trois boules tirées pour avoir une 3ième boule Blanche),
- $\forall\ n\geq 3$, $P(T=n)=\binom{n-1}{2}.p^2.q^{n-1-2}.p=\dfrac{(n-1).(n-2)}{2}.p^3.q^{n-3}$.

b. Puisque : $n^2.P(D=n)=n^2.(n-1).p^2.q^{n-2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$,

par croissances comparées, on en déduit que D admet une espérance et :

$$E(D)=\sum_{n=2}^{+\infty}n.P(D=n)=\sum_{n=2}^{+\infty}n.(n-1).p^2.q^{n-2}=p^2.\frac{2}{(1-q)^3}=p^2.\frac{2}{p^3}=\frac{2}{p}.$$

c. Il est immédiat que : $\forall\ n\geq 2$, $(D=n)=(H=n-2)$,

autrement dit : $H=D-2$.

On en déduit que :

- $H(\Omega)=\mathbb{N}$,
- $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $P(H=n)=P(D=n+2)=(n+1).p^2.q^n$.

Enfin H admet une espérance par combinaison linéaire et par linéarité :

$$E(H)=E(D)-2=\frac{2}{p}-2=2.\frac{q}{p}.$$

Remarque : si on prend $p=1$, on est certain de toujours tirer des boules Blanches, donc la 2ième boule Blanche obtenue le sera toujours au 2ième tirage et aucune boule Noire ne sera obtenue.
H est alors dans ce cas constante nulle, ce qui donne une espérance également nulle (et ce qui correspond à la formule trouvée puisqu'alors : $q=0$).

Fonctions génératrices.

67. a. On peut écrire par indépendance d'événements :

$$P(X>n)=P\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}(X=k)\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)=r_n,$$

c'est-à-dire le reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq 0}P(X=n)$.

b. C'est une démonstration faite dans le cours.

On commence par remarquer, par incompatibilité, que : $\forall\ n\geq 1$, $P(X>n-1)=P(X>n)+P(X=n)$.

Donc :

$$\forall\ N\geq 1,\ \sum_{n=1}^{N}n.P(X=n)=\sum_{n=1}^{N}n.P(X>n-1)-\sum_{n=1}^{N}n.P(X>n)=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1).P(X>n)-\sum_{n=1}^{N}n.P(X>n),$$

et donc : $\forall\ N\geq 1$, $\sum_{n=1}^{N}n.P(X=n)=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1).P(X>n)-\sum_{n=0}^{N}n.P(X>n)=\sum_{n=0}^{N}P(X>n)-N.P(X>N)$.

Puis : $\forall\ N\geq 1$, $0\leq N.P(X>N)=N.\sum_{n=N+1}^{+\infty}P(X=n)\leq\sum_{n=N+1}^{+\infty}n.P(X=n)$,

et le majorant tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, comme reste d'une série convergente ($E(X)$).

Comme de plus $\sum_{n=1}^{N}n.P(X=n)$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$ qui est $E(X)$, la série $\sum_{n\geq 0}P(X<n)$ est donc convergente et finalement :

$$E(X)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}n.P(X=n)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}P(X>n)-\lim_{N\to+\infty}N.P(X>N)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X>n).$$

c. Comme vu dans le cours, on constate que :

$\forall\ n\in\mathbb{N}$, $|P(X>n)|\leq 1$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} P(X>n).t^n$ vaut au moins 1 et la fonction H_X est bien définie au moins sur]-1,+1[

d. On peut commencer par écrire :

$$\forall\ t \in\ ]-1,1[,\ (1-t).H_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n).t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n).t^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n).t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X>n-1).t^n .$$

Donc : $\forall$ t $\in$]-1,+1[,

$$(1-t).H_X(t) = P(X>0) + \sum_{n=1}^{+\infty}[P(X>n) - P(X>n-1)].t^n = (1-P(X=0)) - \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n).t^n,$$ car :

- $P(X=0)+P(X>0) = P(X\geq 0) = 1$, et :
- $\forall$ n $\geq$ 1, $P(X>n-1) = P(X>n) + P(X=n)$ (comme on l'a vu plus haut).

Donc : $\forall$ t $\in$]-1,+1[, $(1-t).H_X(t) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n).t^n = 1 - G_X(t)$, d'où le résultat voulu.

68. La fonction génératrice de Y est définie au moins sur]-1,+1[, et :

$\forall$ t $\in$]-1,+1[, $G(t) = E(t^Y) = E(t^{\lambda_1.X_1+\ldots+\lambda_n.X_n}) = E(t^{\lambda_1.X_1}\ldots t^{\lambda_n.X_n})$.

Or $X_1,\ldots,X_n$ étant des variables aléatoires mutuellement indépendantes, les variables $t^{\lambda_1.X_1}$, …, $t^{\lambda_n.X_n}$ le sont aussi et donc :

$\forall$ t $\in$]-1,+1[, $G(t) = E(t^{\lambda_1.X_1+\ldots+\lambda_n.X_n}) = E(t^{\lambda_1.X_1})\ldots E(t^{\lambda_n.X_n}) = E((t^{\lambda_1})^{X_1})\ldots E((t^{\lambda_n})^{X_n}) = G_1(t^{\lambda_1})\ldots G_n(t^{\lambda_n})$.

Résultats asymptotiques.

69. a. On sait déjà que par linéarité de l'espérance : $\forall\ n\geq 1$, $E(S_n) = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{1}{n}.n.p = p$,

et puisque les variables sont supposées indépendantes : $V(S_n) = \frac{1}{n^2}.\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{1}{n^2}.n.p.(1-p)$.

Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, on a : $\forall\ \varepsilon>0$, $P(|S_n - p|\geq\varepsilon) \leq \frac{p.(1-p)}{n.\varepsilon^2}$.

On en déduit donc bien que : $\forall\ \varepsilon>0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|S_n - p|\geq\varepsilon) = 0$.

On pouvait aussi bien sûr reconnaître la loi faible des grands nombres puisque les variables aléatoires X_k suivent la même loi et sont mutuellement indépendantes.

b. Toujours par linéarité de l'espérance, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $E(Y_n) = \frac{E(X_n)+E(X_{n+1})}{2} = p$.

Puis pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $Y_n(\Omega) = \left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$, et :

- $P(Y_n=0) = P(X_n=0, X_{n+1}=0) = P(X_n=0).P(X_{n+1}=0) = (1-p)^2$, par indépendance,
- $P(Y_n=\frac{1}{2}) = P(X_n=0, X_{n+1}=1) + P(X_n=1, X_{n+1}=0)$, par incompatibilité, et :

  $P(Y_n=\frac{1}{2}) = P(X_n=0).P(X_{n+1}=1) + P(X_n=1).P(X_{n+1}=0) = 2.p.(1-p)$, par indépendance,
- $P(Y_n=1) = P(X_n=1, X_{n+1}=1) = P(X_n=1).P(X_{n+1}=1) = p^2$, pour les mêmes raisons.

Remarque : on peut alors recalculer l'espérance de Y_n :

$$E(Y_n) = 0.(1-p)^2 + \frac{1}{2}.2.p.(1-p) + 1.p^2 = p.$$

c. Distinguons plusieurs cas.

- si : $m\geq n+2$, alors les quatre variables X_n, X_{n+1}, X_m, X_{m+1} sont distinctes et par hypothèse indépendantes, donc Y_n et Y_m aussi car :

  - pour α et β valant 0 ou 1, $(Y_n=\alpha)$ et $(Y_m=\beta)$ se décomposent chacun en $(X_n=\alpha, X_{n+1}=\alpha)$ et

$(X_m = \beta, X_{m+1} = \beta)$, et par indépendance, on a alors :
$P(Y_n = \alpha, Y_m = \beta) = P(X_n = \alpha).P(X_{n+1} = \alpha).P(X_m = \beta).P(X_{m+1} = \beta) = P(Y_n = \alpha).P(Y_m = \beta)$.

- pour α valant 0 ou 1, et : β $= \frac{1}{2}$, on a : $(Y_m = \beta) = (X_m = 0, X_{m+1} = 1) \cup P(X_m = 1, X_{m+1} = 0)$,
et par incompatibilité : $P(Y_n = \alpha, Y_m = \beta) = P(Y_n = \alpha, X_m = 0, X_{m+1} = 1) + P(Y_n = \alpha, X_m = 1, X_{m+1} = 0)$,
pour terminer comme dans le cas précédent.
- pour α et β valant tous deux $\frac{1}{2}$, les arguments précédents s'adaptent encore.

• si : $m = n+1$, alors Y_n et Y_m (c'est-à-dire Y_{n+1}) ne sont pas indépendantes car :
$P(Y_n = 0) = (1-p)^2$, $P(Y_{n+1} = 1) = p^2$, et :
$P(Y_n = 0, Y_{n+1} = 1) = P(X_n = 0, X_{n+1} = 0, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1) = 0 \neq p^2.(1-p)^2$.

d. On sait déjà, toujours par linéarité de l'espérance, que : $\forall\ n \in$ ℕ*, $E(T_n) = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = \frac{1}{n}.n.p = p$.

D'autre part : $\forall\ n \in$ ℕ*, $T_n = \frac{1}{2.n}.\sum_{k=1}^{n}(X_k + X_{k+1}) = \frac{1}{2.n}.(X_1 + 2.X_2 + ... + 2.X_n + X_{n+1})$.

Les variables X_k étant mutuellement indépendantes, on a alors :

$\forall\ n \in$ ℕ*, $V(T_n) = \frac{1}{4.n^2}.(V(X_1) + 4.V(X_2) + ... + 4.V(X_n) + V(X_{n+1})) = \frac{1}{4.n^2}.(4.n-2).p.(1-p)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev redonne alors :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $P(|T_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} = \frac{2.n-1}{2.n^2}.\frac{p.(1-p)}{\varepsilon^2}$,

et : $\lim_{n \to +\infty} P(|T_n - p| \geq \varepsilon) = 0$.

70. a. Si on note S la variable aléatoire donnant le nombre de boules Blanches tirées, alors on a :
$S = X_1 + ... + X_n$.

Chaque variable X_k suit alors la loi de Bernoulli $\mathscr{B}(\varepsilon > 0)$.

Dans ce cas, on a de plus, par linéarité de l'espérance : $E(S) = E(X_1) + ... + E(X_n) = n.p$,

et puisque les variables X_k sont indépendantes (remise de la boule tirée), on a :

$V(S) = V(X_1) + ... + V(X_n) = n.p.(1-p)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev (ou la loi faible des grands nombres) donne alors :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S}{n} - E\left(\frac{S}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}.V\left(\frac{S}{n}\right)$, soit : $P\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n.p.(1-p)}{\varepsilon^2}.\frac{1}{n^2} = \frac{p.(1-p)}{n.\varepsilon^2}$.

Comme de plus la fonction : $p \mapsto p.(1-p)$, est positive et majorée par $\frac{1}{4}$, sur]0,1[, on en déduit que :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{n.p.(1-p)}{\varepsilon^2}.\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4.n.\varepsilon^2}$.

Si on a obtenu : $S = k$, on conclut que : $\forall\ \varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4.n.\varepsilon^2}$.

En particulier, par événement contraire, p appartiennent à l'intervalle de confiance $\left]\frac{k}{n} - \varepsilon, \frac{k}{n} + \varepsilon\right[$ avec une probabilité supérieure à $\left(1 - \frac{1}{4.n.\varepsilon^2}\right)$.

b. Si on veut garantir $\varepsilon > 0$ au 100[ième] près, on doit prendre : $\varepsilon = \frac{1}{100.n}$, ce qui conduit à :

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|<10^{-2}\right)\geq 1-\frac{5000}{n}.$$

Si de plus, on veut que cette valeur soit garantie à 99%, cela oblige à prendre : $1-\frac{5000}{n}\geq\frac{99}{100}$, soit finalement : $n\geq 500000$.
Ca fait beaucoup et l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev montre ici son peu d'efficacité.