T.D. 5 – Suites et séries de fonctions

1. Sur l'intervalle $[0,\pi]$, étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f_n(0)=1\quad\text{et}\quad \forall x\in\,]0,\pi]\quad f_n(x)=\frac{\sin x}{x(1+nx)}.$$

2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) définie par
$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}.$$

3. Soit, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto e^{-nx}-(1-x)^n$.

a) Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

b) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$ et déterminer sa fonction somme S. Étudier la limite de S en 0^+. Conclusion ?

4. Étudier, selon la valeur du réel α donné, la convergence simple, uniforme, normale, sur $[0,1]$, de la série de fonctions $\sum u_n$ où $u_n : t\mapsto n^\alpha t^n(1-t)$.

Déterminer la nature de la série numérique $\displaystyle\sum\int_0^1 u_n$.

5. Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $\displaystyle S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^2x^2}$. Étudier l'ensemble de définition et la continuité de S *(on pourra utiliser une comparaison à une intégrale pour déterminer la limite de S en 0^+).*

6. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante convergeant vers 0. On fixe $p\in\mathbb{N}^*$ et l'on pose
$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \forall x\in[0,1]\quad f_n(x)=(-1)^n a_n x^{pn}.$$

a) Étudier la convergence normale et la convergence uniforme sur $[0,1]$ de $\sum f_n$.

b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{pn+1}$ à l'aide d'une intégrale.

7. Soit $x\in\,]-1,1[$. Pour θ réel, on pose : $\displaystyle\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n(\theta)=\frac{x^n\cos n\theta}{n}$ et $\displaystyle f_x(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\theta)$.

Montrer que f_x est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left(1-2x\cos\theta+x^2\right)\mathrm{d}\theta$.

8. On note $\displaystyle f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ où $\displaystyle f_n : x\mapsto(-1)^n\frac{x}{x^2+n^2}$.

a) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais pas normalement. Déterminer $\displaystyle\lim_{+\infty}f$.

b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

9. On note $\displaystyle f=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ où $\displaystyle f_n : x\mapsto\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-x\sqrt{n}}$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Étudier les variations de f ; donner l'allure de son graphe.