Suites et séries de fonctions.

Exercices 2017-2018

Niveau 1.

Convergence simple et uniforme de suites de fonctions.

1. Etudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes sur l'intervalle proposé, puis la convergence uniforme de ces suites sur tout segment inclus dans l'intervalle proposé :

   a. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{n.x^3}{1+n^2.x^2}$,

   b. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ u_n(x) = \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$,

   c. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ u_n(x) = e^{-n.x}.\sin(n.\alpha.x)$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. a. Montrer que la suite de fonctions (u_n) définies par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \dfrac{1}{1+(x+n)^2}$,

   converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera (et que l'on notera u dans la suite).

   b. Montrer que (u_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

   c. Sur quelle famille d'intervalles, autres que des segments, y a-t-il convergence uniforme ?

3. Soit la suite de fonctions (f_n) définies par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2.e^{-\sin\left(\frac{x}{n}\right)}$.

   a. Montrer que cette suite converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

   b. Montrer que pour tout entier : $n \geq 1$, $f_n - f$ est non bornée sur $\mathbb{R}$; qu'en déduit-on ?

   c. Pour : $a > 0$, montrer la convergence uniforme de (f_n) vers f sur $[-a,+a]$.

4. a. Montrer la convergence simple de la suite de fonctions définie par :

   $\forall\ n \geq 1,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ u_n(x) = \sin(\sqrt{x+4.\pi^2.n^2}) - \dfrac{x}{4.n.\pi}$.

   b. Montrer que la suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$, mais sur tout segment $[0,a]$ inclus dans $\mathbb{R}^+$.

5. Pour : $n \geq 1$, soit u_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall\ x \geq 0,\ u_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

   a. Montrer que : $\forall$ t $\in \mathbb{R}^+$, $t - \dfrac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

   b. Etudier la limite simple de (u_n) sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que : $\forall\ x \geq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n(x) \geq \lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x) = u(x)$.

   c. Montrer que (u_n) converge uniformément vers u sur $[0,a]$ pour tout : $a > 0$.

   d. (*) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions (u_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

   On pourra penser à couper l'intervalle $\mathbb{R}^+$ en la valeur $\sqrt[4]{n}$.

6. On considère les suites de fonctions (u_n) et (v_n) définies par :

   - $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],\ u_n(x) = \cos^n(x).\sin(x)$,
   - $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = (n+1).u_n$.

   a. Etudier les différentes convergences de la suite (u_n).

   b. Calculer pour tout entier : $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t).dt$.

c. Etudier les différentes convergences de la suite (v_n) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7. Soit la suite de fonctions définies sur [0,1] par :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in [0,1],\ u_n(x) = n.x.(1-n.x)$, si : $0 \le x < \frac{1}{n}$, et 0 sinon.

a. Montrer que la suite converge simplement sur [0,1] en précisant sa limite simple.

b. Calculer, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 u_n(t).dt$, et en déduire si la suite converge uniformément sur [0,1].

c. Etudier la convergence uniforme de la suite sur $[a,1]$, pour : $0 < a < 1$.

8. Soit la suite de fonctions définies sur [-1,+1] par : $\forall\ n \ge 1,\ \forall\ x \in$ [-1,+1], $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$.

a. Etudier la convergence simple et uniforme de cette suite sur [-1,+1] : on notera u sa limite.

b. Les fonctions u_n sont-elles C^1 sur [-1,+1] pour tout entier : $n \ge 1$?

La fonction u est-t-elle de classe C^1 sur [-1,+1] ?

c. Que peut-on en conclure ?

Convergence simple, uniforme ou normale de séries de fonctions.

9. Etudier la convergence simple des séries $\sum u_n$ de fonctions définies ci-dessous, puis une fois déterminé l'ensemble D sur lequel la série converge simplement, étudier sa convergence normale sur les ensembles proposés.

a. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{e^{n.x}}{n^2 - n + 1}$, et convergence normale sur D.

b. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ u_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2 + x^2}$, et convergence normale sur tout segment inclus dans D.

c. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = x.e^{-n.x^2}$, et convergence normale sur D puis sur tout segment inclus dans D.

d. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0,1],\ u_n(x) = \frac{x^n}{1+n.x}$, et convergence normale sur D puis sur tout segment : $[0,a] \subset$ D.

10. On considère la série de fonctions $\sum_{n\ge1} u_n$, où : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$.

a. Montrer que cette série de fonctions converge simplement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que cette série de fonctions ne converge normalement sur aucun intervalle de $\mathbb{R}$.

Propriétés d'une somme de série de fonctions.

11. a. Déterminer l'ensemble de définition et la continuité de la fonction réelle : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n.\pi.x)}{n^3 + 1}$.

b. Montrer par ailleurs que la fonction f est paire.

c. Montrer que f est périodique en précisant une période de f.

12. Soit f donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(3^n.x)}{3^n}$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(3.x)$ et en déduire que f n'est pas dérivable en 0.

13. Soit (a_n) une suite réelle (ou complexe) bornée.

Montrer que la fonction f donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.e^{-n.x}$, est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

14. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{\cos^3(n.x)}{n!}$, $v_n(x) = \dfrac{\cos(n.x)}{n!}$

a. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$; on notera S sa somme.

b. Etudier de même la série $\sum v_n$, dont on notera la somme σ .

c. Montrer que σ est continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, puis par récurrence qu'elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d. Etablir une relation, pour : $x \in \mathbb{R}$, entre $u_n(x)$ et $v_n(x)$ et en déduire une relation entre $S(x)$ et $\sigma(x)$.

e. En déduire que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Etude de sommes de séries de fonctions (limite en un point, tracé de courbes…).

15. Soit (a_n) une suite réelle (ou complexe) telle que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ soit absolument convergente.

On note : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $S(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.e^{i.n.t}$.

a. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer : $I_p = \int_0^{2.\pi} S(t).e^{-i.p.t}.dt$, pour tout entier : $p \in \mathbb{N}$.

16. Pour : $n \in \mathbb{Z}$, on note : $I_n = \int_0^{2.\pi} \dfrac{e^{i.n.\theta}}{2+e^{i.\theta}}.d\theta$.

a. Montrer que la fonction sous l'intégrale est continue sur [0,2.π] et peut s'écrire comme la somme d'une série de fonctions que l'on précisera.

b. Montrer la convergence normale de cette série de fonctions sur [0,2.π].

c. En déduire la valeur de I_n I_n, pour tout entier : n $\in \mathbb{Z}$.

17. On pose : $\forall\ x \geq 0$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$.

a. Montrer que : $\mathcal{D}_f$ =]1,+∞).

b. Montrer que f est continue sur $\mathcal{D}_f$.

c. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

18. On pose, pour : $x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n.(1+n.x^2)}$.

a. A l'aide de l'étude de la convergence simple d'une série de fonctions, montrer que le domaine de définition de S est $\mathbb{R}$.

b. Montrer que S est impaire, et que : $S(1) = 1$.

c. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, et préciser sa dérivée.

d. Montrer que S tend vers 0 en +∞.

e. Montrer que : $\forall\ x > 0$, $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n.(1+n.x^2)} \leq \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n.(1+n.x^2)}$.

f. Déduire de l'inégalité précédente que S ne peut être dérivable en 0, et que sa courbe présente une tangente verticale en 0.

g. Donner (approximativement) l'allure de la courbe représentative de S .

19. On pose : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n.x^{n-1}}{1+x^n}$.

a. Pour quels réels positifs, $S(x)$ est-il défini ?

b. En minorant $S(x)$ par des sommes partielles, montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x) = +\infty$.

20. On pose : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.e^{-x\sqrt{n}}$.

a. Donner le domaine de définition de S .

b. En utilisant un argument de convergence uniforme, montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

c. Tracer l'allure de la courbe représentative de S .

21. On pose : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

a. Donner le domaine de définition D de S .

b. Etudier la continuité de S sur D puis montrer qu'elle y est décroissante.

c. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

d. Déterminer un équivalent simple de $S(x)$ en 0^+ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

22. On définit la suite de fonctions (u_n) par :

- $\forall\ x \in [0,1],\ u_0(x) = 1$,
- $\forall\ n \geq 0$, $\forall\ x \in [0,1],\ u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2).dt$.

a. Montrer que la suite est bien définie et que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sup_{[0,\frac{1}{4}]} |u_n| \leq \frac{1}{4^n}$.

b. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur [0,1].

Fonction ζ de Riemann.

23. On note pour x réel : $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a. Déterminer le domaine de définition de ζ.

b. Montrer que ζ est de classe C^∞ sur son domaine de définition.

c. Montrer que la dérivée seconde de ζ est positive.

d. Montrer que la courbe représentative de ζ présente deux asymptotes que l'on précisera.

e. Tracer l'allure de sa courbe représentative.

<u>Niveau 2.</u>

Convergence simple et uniforme de suites de fonctions.

24. Etudier si la convergence simple des suites de fonctions de fonctions suivantes, puis déterminer des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme :

a. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in [0,1],\ u_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$.

b. $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in [0,1]$, $\begin{cases} u_n(x) = n.x^n.\ln(x),\ si : x \neq 0 \\ u_n(0) = 0 \end{cases}$.

c. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = \arctan(n.x)$.

25. Soit : $\alpha \in \mathbb{R}$, et la suite de fonctions définie sur [0,1] par :

$$\begin{cases} u_n(x) = (n+1)^\alpha.\left(\frac{x}{n+1} - x^2\right),\ si : 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \\ u_n(x) = 0,\ si : \frac{1}{n+1} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Etudier la convergence simple et uniforme de cette suite sur [0,1].

26. Pour : $n \in$ ℕ*, soit f_n la fonction définie sur ℝ⁺ par :

- $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$, pour : $0 \leq x < n$, et :
- $f_n(x) = 0$, sinon.

a. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction à préciser.
b. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

27. Soit f une fonction définie et de classe C^1 de [0,1] dans ℝ.

Pour : $n \geq 1$, on pose : $\forall\ x \in [0,1]$, $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{x.(1-x)}{n}\right)$.

a. Montrer que les fonctions f_n sont correctement définies pour tout entier : $n \geq 1$.
b. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur [0,1] vers une fonction à préciser.

28. Soient f une fonction continue de ℝ dans ℝ et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f sur ℝ.

a. Justifier qu'il existe un entier naturel N tel que :
$\forall\ n \geq N$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes $P_n - P_N$ lorsque : $n \geq N$?
b. Conclure que f est nécessairement une fonction polynomiale.

29. Soit φ une fonction de I dans J, et soit (u_n) une suite de fonctions convergeant uniformément sur J vers u.
Montrer que ($u_n o \varphi$) converge uniformément sur I vers $uo\varphi$.

30. Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions de I dans ℝ ou ℂ, convergeant uniformément sur I vers des fonctions f et g bornées.
Montrer que ($f_n.g_n$) converge uniformément sur I.

Convergence simple, uniforme ou normale de séries de fonctions.

31. Etudier la convergence simple sur les intervalles proposés des séries de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ suivantes, et donner les meilleurs intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme ou normale :

a. $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $u_n(x) = (-1)^n.\ln\left(1 + \dfrac{x}{n.(1+x)}\right)$.

b. $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(x) = \dfrac{1}{x^n + x^{-n}}$.

c. $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in]-1,+\infty)$, $u_n(x) = n^2.\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$.

Convergence et sommes de séries de fonctions.

32. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n.\ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n.(1+x^2)}\right)$.

a. Etudier les différentes convergences de la série $\sum u_n$ sur ℝ.
On notera S sa somme, lorsqu'elle converge.

b. A l'aide des intégrales de Wallis, justifier : $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n.\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

33. On pose, pour : $x>0$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)$.

a. Justifier que S est définie et continue sur]0,+∞[.

b. Trouver une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.

c. Déterminer un équivalent de $S(x)$ en +∞ et en 0.

34. On pose : $\forall\ x \in$]-2,+2[, $\varphi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-x}-\frac{1}{n+x}\right)$.

a. Justifier que φ est définie sur]-2,+2[, continue au moins sur [0,1].

b. Calculer $\int_0^1 \varphi(x).dx$.

35. a. Rappeler l'écriture de e^x sous forme d'une série, pour : $x \in \mathbb{R}$.

b. En déduire que la fonction : $x \mapsto e^{2.\cos(x)}$, peut s'écrire comme la somme d'une série de fonctions.

c. En déduire que : $\int_0^{2.\pi} e^{2.\cos(x)}.dx = 2.\pi.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}$.

36. La fonction ζ alternée.

On pose, pour : $x>0$, $\zeta_2(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

Montrer que ζ_2 est définie, continue et de classe C^1 sur]0,+∞).

37. a. Montrer qu'il existe une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que :

- $\forall\ x>0$, $f(x+1)+f(x)=\frac{1}{x^2}$, et :
- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire un équivalent de $f(x)$ puis la limite de f en 0.

38. Soit S la fonction donnée par : $\forall\ x \geq 0$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2.n}}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S puis une relation entre $S(x)$ et $S\left(\frac{1}{x}\right)$, pour x non nul dans D.

b. Préciser les variations de S sur D puis les limites de S aux bornes de D.

<u>Niveau 3.</u>

Convergence des suites de fonctions.

39. Etudier la convergence simple et uniforme sur [0,2] de la suite de fonctions définie par :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in$ [0,2] : $f_n(x)=n.(1-x)^n.\sin\left(\frac{\pi.x}{2}\right)$.

Peut-on proposer des sous-intervalles de [0,2] sur lesquels il y a convergence uniforme de la suite ?

40. Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et (g_n) la suite définie par :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g_n(x)=\frac{(f(x))^2}{\sqrt{(f(x))^2+\frac{1}{n}}}$.

Montrer que (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $|f|$.

41. Soit (u_n) une suite de fonctions continues de [0,1] dans ℝ ou ℂ, convergeant uniformément sur [0,1[vers une fonction f.

a. Montrer que la suite ($u_n(1)$) est une suite de Cauchy et donc converge.

b. Montrer que la suite (u_n) converge uniformément sur [0,1].

42. Soit f définie sur [0,1] par : $\forall\ x \in$ [0,1], $f(x) = 2.x.(1-x)$.

Pour : $n \geq 1$, on note f_n la fonction $fofo...of$ (itérée n fois).

a. En remarquant que : $\forall\ x \in$ [0,1], $f(x) = f(1-x)$, étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.

b. Etudier ensuite la convergence uniforme de cette suite sur [0,1] ou sur des sous-intervalles de [0,1].

43. Soit β une fonction deux fois dérivable de ℝ dans ℝ, et on suppose que f'' est bornée sur ℝ.

On définit la suite de fonctions (g_n) par : $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in$ ℝ, $g_n(x) = n.\left(f\left(x+\dfrac{1}{n}\right) - f(x)\right)$.

A l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que (g_n) converge uniformément sur ℝ vers f'.

44. Théorème de Dini.

Soit (u_n) une suite de fonctions continues de [a,b] dans ℝ telle que : $\forall\ x \in [a,b]$, $(u_n(x))_n$ décroît vers 0.

a. Montrer que : $\forall\ n \in$ ℕ, $\exists\ x_n \in [a,b]$, $\sup\limits_{[a,b]}|u_n| = u_n(x_n)$.

b. Montrer que la suite ($\sup\limits_{[a,b]}|u_n|$) est décroissante de limite : $L \geq 0$.

c. Montrer que : $\forall\ (n,p) \in$ ℕ², $(n \geq p) \Rightarrow (L \leq u_p(x_n))$.

d. Montrer qu'il est possible d'extraire une suite convergente de la suite (x_n).

e. En déduire qu'il existe α dans $[a,b]$ tel que : $\forall\ p \in$ ℕ, $L \leq u_p(\alpha)$.

f. Conclure que la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$.

g. A l'aide d'un exemple simple, montrer que le résultat n'est plus vrai si l'intervalle n'est pas un seegment.

45. Théorème de Weierstrass.

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans ℝ ou ℂ.

Pour : $n \in$ ℕ, on pose le polynôme : $B_n(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f\left(\dfrac{k}{n}\right).X^k.(1-X)^{n-k}$.

a. On va montrer que f est « uniformément continue sur [0,1] ».

On suppose que : $\exists\ \varepsilon > 0$, $\forall\ \eta > 0$, $\exists\ (x,x') \in [a,b]^2$, $|x-x'| \leq \eta$, et : $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$.

Montrer qu'il est possible de construire deux suites (x_n) et (x_n) telles que :

$\forall\ n \in$ ℕ, $|x_n - y_n| \leq 2^{-n}$, et : $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Montrer alors qu'on extraire de ces deux suites deux sous-suites ($x_{\varphi(n)}$) et ($y_{\varphi(n)}$) convergentes.

En déduire une contradiction.

Conclure que : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$, $\forall\ (x,x') \in [a,b]^2$, $(|x-x'| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$.

Soit pour la suite : $\varepsilon > 0$, fixé.

b. Justifier que : $\exists\ \eta > 0$, tel que : $\forall\ (u,v) \in$ [0,1]², $(|u-v| \leq \eta) \Rightarrow (|f(u) - f(v)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2})$.

c. Pour : $x \in$ [0,1], on note : $E_1 = \{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leq \eta\}$, et : $E_2 = \{0 \leq k \leq n,\ \left|x - \dfrac{k}{n}\right| > \eta\}$.

Vérifier que l'on obtient ainsi une partition de $\mathbb{N}_n$.

On pose alors : $\forall\ 1 \leq i \leq 2$, $S_i = \sum\limits_{k \in E_i} \binom{n}{k}.\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right|.x^k.(1-x)^{n-k}$.

d. Montrer que : $S_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et : $S_2 \leq \frac{2.S'_2}{\eta^2}.\sup_{[0,1]}|f|$, où : $S'_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.x^k.(1-x)^{n-k}$.

e. A l'aide de : $t \mapsto (t+y)^n$, où y est un réel fixé, montrer que pour : $n \geq 0$, on a :

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.k.x^k.(1-x)^{n-k} = n.x$, puis :
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.k^2.x^k.(1-x)^{n-k} = n.x.(1+(n-1).x)$,

et en déduire que : $S'_2 = \frac{x.(1-x)}{n}$.

f. En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in [0,1]$, $|f(x) - B_n(f)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2.\eta^2.n}.\sup_{[0,1]}|f|$, puis que :

$\exists\ N \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq N$, $\sup_{x\in[0,1]}|f(x) - B_n(f)| \leq \varepsilon$,

et conclure que $(B_n(f))$ converge uniformément sur [0,1] vers f.

g. Soit enfin f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On pose : $\forall\ x \in [0,1]$, $g(x) = f(a + x.(b-a))$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall$ t $\in [a,b]$, $P_n(t) = B_n(g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$.

Montrer que la suite (P_n) est une suite de polynômes qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Approximations uniformes de la valeur absolue par des polynômes.

46. Pour n entier, et x dans [-1,+1], on pose : $P_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n.dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n.dt}$.

a. Montrer que pour tout n, P_n est une fonction polynomiale.

b. Montrer que : $\forall\ \varepsilon > 0$, (P_n) converge uniformément sur : $I_\varepsilon = [-1,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,1]$, vers la fonction "signe".

c. Montrer que la suite (Q_n) définie par : $\forall\ n \geq 0$, $\forall\ x \in$ [-1,+1], $Q_n(x) = \int_0^x P_n(t).dt$, converge uniformément sur [-1,+1] vers la fonction valeur absolue.

47. On note (P_n) la suite définie par :

- $P_0 = 0$,
- $\forall\ x \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [0,1]$, $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{(x - P_n(x)^2)}{2}$.

a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [0,1]$, $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2.\sqrt{x}}{2 + n.\sqrt{x}}$.

On pourra notamment utiliser, après justification, la majoration : $1 - (\sqrt{x} + P_n(x)) \leq 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$.

b. En déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur [0,1] vers la racine carrée.

c. Montrer que la suite de polynômes (Q_n) définie par : $\forall\ x \in \mathbb{N}$, $\forall$ t $\in$ [-1,+1], $Q_n(t) = P_n(|t|)^2$, converge uniformément sur [-1,+1] vers la valeur absolue.

Convergence et sommes de séries de fonctions.

48. Soit S définie par : $\forall\ x \in$]-1,+∞), $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

a. Justifier que S est définie et continue sur]-1,+∞).
b. Montrer que S est monotone sur]-1,+∞), en précisant son sens de variation.
c. Calculer : $\forall\ x \in$]-1,+∞), $S(x+1) - S(x)$.

d. Déterminer un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers -1 par valeurs supérieures.

e. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et en déduire un équivalent de $S(x)$ en +∞.

49. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

a. Justifier que l'on a aussi : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$.

b. En déduire que l'on peut définir une suite (f_k) de fonctions sur [1,+∞), telle que : $u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$.

c. Montrer la convergence normale de la série $\sum_{k \geq 0} f_k$ sur [1,+∞), puis la limite de (u_n) en +∞.

50. Pour : $z \in \mathbb{C}$, fixé, on pose : $\forall\ k \geq 0$, $\forall\ x \in$ [1,+∞),

- $u_k(x) = \frac{x.(x-1)...(x-k+1)}{k!} . \frac{z^k}{x^k}$, si : $x \geq k$,
- $u_k(x) = 0$, sinon.

a. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge simplement sur [1,+∞) : on notera S sa somme.

b. Préciser $S(n)$ pour tout entier : n ∈ ℕ*.

c. Montrer que la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge normalement sur [1,+∞).

d. En déduire que : $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

51. Pour : λ ∈ ℂ, on pose : $\forall\ x > 0$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{x.(x+1)...(x+n)}$.

a. Montrer que la fonction S est définie sur]0,+∞).

b. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} S(x)$.

c. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0.

52. Soient f continue de [0,1] dans ℝ et f_n définie sur [0,1] par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in$ [0,1], $u_n(x) = x^n . f(x)$.

a. Montrer que la suite (u_n) converge uniformément sur [0,1] si et seulement si : $f(1) = 0$.

b. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur [0,1] si et seulement si :

- $f(1) = 0$,
- f est dérivable en 0, et :
- $f'(1) = 0$.

53. Soit f donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{sh(n.x)}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est continue sur D.

b. Etudier les variations de f sur D.

c. Déterminer la limite de f et un équivalent de $f(x)$ en +∞.

d. Déterminer la limite de f et un équivalent de $f(x)$ en 0.

54. Soient : $a \in \mathbb{R}$, et S donnée par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

a. Déterminer le domaine de définition D de S suivant les valeurs de a.
On supposera par le suite que a est fixé de telle sorte que le domaine D soit non vide.
b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ au moins.
c. Vérifier que : $\forall\ x \in D$, $x+1 \in D$, puis déterminer une relation entre $S(x+1)$ et $S(x)$.
d. En déduire un équivalent de $S(x)$ en 0.
e. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S(x)$, puis déterminer à l'aide de la question c. un équivalent de $S(x)$ en +∞.

55. Soit f une fonction continue de]-1, +1[dans $\mathbb{C}$.

On définit la suite (f_n) par : $f_0 = f$, et : $\forall$ n ≥ 0, $\forall\ x \in$]-1 +1[, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t).dt$.

Etudier la convergence de la série $\sum f_n$, et exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en fonction de f .

56. On veut trouver les fonctions f continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$, telles que : $\forall\ x \in$ [0,1], $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

Pour les questions a et b, on suppose que f est une telle fonction.
a. Montrer que la série est toujours convergente sur [0,1], pour f continue sur [0,1].
b. On suppose que : $f(0) = 0$, et on pose : $\forall\ x \in$ [0,1], $h(x) = \sup_{[0,x]} |f|$.

Montrer que : $\forall\ x \in$ [0,1], $h(x) \le h(x^2)$.
En déduire que h est nulle sur [0,1[, puis que f est nulle sur [0,1].

c. Montrer que les solutions du problème initial sont les fonctions constantes.

57. (☠) Fonction de Van der Waerden.

On note φ_0 l'application 1-périodique définie par :

- $\varphi_0(x) = x$, si : $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,
- $\varphi_0(x) = 1 - x$, si : $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

et on définit, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(x) = 4^{-n}.\varphi_0(4^n.x)$.

a. Montrer que $\sum_{n\ge 0} \varphi_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme S est continue sur $\mathbb{R}$.
Pour les questions b, c et d, on fixe un réel : $\alpha > 0$, et pour les questions b et c, on fixe : $p \in \mathbb{N}^*$.
b. Montrer qu'on peut choisir : $\varepsilon_p = \pm 1$, de telle sorte que l'intervalle ouvert d'extrémités $4^{p-1}.\alpha$ et

$4^{p-1}.\alpha + \frac{\varepsilon_p}{4}$ ne contienne aucun demi-entier autrement dit aucun élément tel que son double soit entier.

c. ε_p étant fixé à la valeur précédente, on note : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\tau_{n,p} = \frac{\varphi_n(\alpha + \varepsilon_p.4^{-p}) - \varphi_n(\alpha)}{\varepsilon_p.4^{-p}}$.

Donner la valeur de $|\tau_{n,p}|$, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}$.

d. On note enfin : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\tau_p = \frac{S(\alpha + \varepsilon_p.4^{-p}) - S(\alpha)}{\varepsilon_p.4^{-p}}$.

Montrer que pour tout p, τ_p est un entier relatif de même parité que p puis que la suite (τ_p) diverge.

e. En déduire que S n'est dérivable nulle part dans $\mathbb{R}$.