Suites et séries de fonctions (corrigé niveau 3).

Convergence des suites de fonctions.

39. Convergence simple :

Soit x fixé dans [0,2].

- si x vaut 0, 1 ou 2, la suite est constante égale à 0.
- si x est distinct de ces valeurs, alors : $|1-x|<1$, et le théorème des croissances comparées montre que la suite géométrique l'emporte sur la suite (n) et donc que : $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.

Autrement dit, la suite de fonctions converge simplement sur [0,2] vers la fonction nulle.

Convergence uniforme :

On peut noter tout d'abord que : $\forall\ n\geq 1$, $\forall\ x\in$ [0,2], $f_n(x)=f_n(2-x)$, et cette symétrie permet de restreindre les études à [0,1] (puisque les résultats sont similaires (en symétrie) sur [1,2]).

On part de la double inégalité : $\forall\ u\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2}{\pi}.u\leq\sin(u)\leq u$, par étude de fonctions.

Donc : $\forall\ x\in$ [0,1], $0\leq n.(1-x)^n.\frac{2}{\pi}.\frac{\pi.x}{2}=n.(1-x)^n.x\leq f_n(x)-0$.

Si on étudie la fonction : $x\mapsto n.(1-x)^n.x$, sur [0,1], on constate qu'elle atteint un maximum en : $x=\frac{1}{n}$, où elle vaut : $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Donc : $\forall\ n\geq 1$, $\sup_{x\in[0,1]} n.(1-x)^n.x=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\leq\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-0|$, qui est aussi : $\sup_{x\in[0,2]}|f_n(x)-0|$.

Et comme la suite minorante tend vers $\frac{1}{e}$, la suite des sup ne peut tendre vers 0 : il n'y a donc pas convergence uniforme de la suite (f_n) sur [0,2].

Soit maintenant : $0<a<1$.

Alors : $\forall\ x\in[a,1]$, $0\leq f_n(x)-0\leq n.(1-x)^n.\frac{\pi.x}{2}\leq n.(1-a)^n.\frac{\pi}{2}$, d'où : $\sup_{x\in[a,1]}|f_n(x)-0|\leq n.(1-a)^n.\frac{\pi}{2}$.

Et comme la suite majorante tend vers 0, on en déduit la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction nulle, sur $[a,1]$ ou sur $[a,1-a]$.

40. Commençons par la convergence simple.

Soit x fixé dans ℝ, et distinguons deux cas :

- si : $f(x)=0$, alors la suite $(g_n(x))$ est la suite nulle et elle converge vers : $0=|f(x)|$.
- si : $f(x)\neq 0$, alors le dénominateur tend vers $|f(x)|$ et la suite $(g_n(x))$ tend vers : $\frac{(f(x))^2}{|f(x)|}=|f(x)|$.

Autrement dit, pour tout x réel la suite $(g_n(x))$ converge vers $|f(x)|$ et la suite (g_n) converge simplement sur ℝ vers $|f|$.

Convergence uniforme sur ℝ :

Soient : $y\in$ ℝ*, et : $n\geq 1$.

Alors : $\left|\frac{1}{\sqrt{y^2+\frac{1}{n}}}-\frac{1}{\sqrt{y^2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{y^2}-\sqrt{y^2+\frac{1}{n}}}{\sqrt{y^2}.\sqrt{y^2+\frac{1}{n}}}\right|=\frac{1}{n.\sqrt{y^2}.\sqrt{y^2+\frac{1}{n}}.(\sqrt{y^2}+\sqrt{y^2+\frac{1}{n}})}$, et donc :

$\forall\ y \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{1}{\sqrt{y^2+\frac{1}{n}}} - \dfrac{1}{\sqrt{y^2}}\right| \leq \dfrac{1}{y.\sqrt{n}.\sqrt{n.y^2+1}.(2.y)} \leq \dfrac{1}{2.y^2.\sqrt{n}}$.

On en déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, tel que : $y = f(x) \neq 0$, $\left|g_n(x) - |f(x)|\right| = \left|\dfrac{y^2}{\sqrt{y^2+\frac{1}{n}}} - \dfrac{y^2}{\sqrt{y^2}}\right| \leq \dfrac{y^2}{2.y^2.\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2.\sqrt{n}}$.

Comme de plus, cette inégalité est encore vérifiée si : $f(x) = 0$, on en déduit que ($g_n - |f|$) est bornée sur $\mathbb{R}$, et que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_R \left|g_n - |f|\right| \leq \dfrac{1}{2.\sqrt{n}}$.

Finalement, la suite (g_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $|f|$.

41. a. Puisque la suite ($\sup\limits_{[0,1[}|u_n - f|$) converge vers 0, on en déduit que :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_0$, $\sup\limits_{[0,1[}|u_n - f| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, et donc avec l'inégalité triangulaire :

$\forall\ n \geq n_0$, $\forall\ p \geq n_0$, $\sup\limits_{[0,1[}|u_n - u_p| \leq \sup\limits_{[0,1[}|u_n - f| + \sup\limits_{[0,1[}|u_p - f| \leq \varepsilon$.

Donc : $\forall\ n \geq n_0$, $\forall\ p \geq n_0$, $\forall\ x \in [0,1[$, $|u_n(x) - u_p(x)| \leq \sup\limits_{[0,1[}|u_n - u_p| \leq \varepsilon$.

Mais comme les fonctions u_n sont toutes continues sur [0,1], on peut faire tendre x vers 1 et :

$\forall\ n \geq n_0$, $\forall\ p \geq n_0$, $|u_n(1) - u_p(1)| \leq \varepsilon$.

Donc la suite ($u_n(1)$) est une suite de Cauchy et donc elle converge vers une valeur qu'on note $f(1)$.

b. Montrons maintenant que la suite (u_n) converge uniformément sur [0,1] vers f.

Pour cela, il suffit de dire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{[0,1]}|u_n - f| \leq \max(\sup\limits_{[0,1[}|u_n - f|, |u_n(1) - f(1)|)$

(il y a même égalité), puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{[0,1]}|u_n - f| \leq \sup\limits_{[0,1[}|u_n - f| + |u_n(1) - f(1)|$.

On en déduit par le théorème des gendarmes que ($\sup\limits_{[0,1]}|u_n - f|$) tend vers 0.

Il y a donc bien convergence uniforme de (u_n) sur [0,1] vers f (qui est d'ailleurs continue sur [0,1]).

42. a. Remarquons que : $\forall$ t $\in$ [0,1], $f(t) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, puis que : $\forall\ x \in [0,1]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x))$.

On en déduit que : $\forall\ x \in [0,1]$, $\forall\ n \geq 1$, $f_n(x) \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

De plus : $\forall$ t $\in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, $f(t) - t = t - 2.t^2 = t.(1 - 2.t) \geq 0$, donc :

$\forall\ x \in [0,1]$, $\forall\ n \geq 1$, $f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) \geq f_n(x)$, et la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante.

Etant de plus majorée par $\dfrac{1}{2}$, elle est donc convergente.

De plus :

- si : $x = 0$, ou : $x = 1$, alors la suite ($f_n(x)$) est constante nulle donc converge vers 0.
- si : $x \in]0,1[$, $f(x) > 0$, et la suite ($f_n(x)$) étant croissante, elle converge vers une limite dans]0,1].

Or cette limite L (puisque f est continue sur [0,1]) doit vérifier : $f(L) = L$, en passant à la limite dans la première égalité.

Donc : $L = 0$, ou : $L = \frac{1}{2}$.

Finalement, pour : $x \in]0,1[$, ($f_n(x)$) converge vers $\frac{1}{2}$.

La suite (f_n) converge donc simplement sur [0,1] vers la fonction u , constante égale à $\frac{1}{2}$ sauf en 0 ou en 1 ou elle vaut 0.

b. Il est immédiat par récurrence que toutes les fonctions f_n sont continues sur [0,1].
Puisque u n'est pas continue sur [0,1], il en peut y avoir convergence uniforme de (f_n) sur [0,1].

Soit maintenant : $0 < a < \frac{1}{2}$.

On remarque que f est croissante de $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ dans $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, donc pour tout entier : $n \geq 1$, f_n est également croissante sur cet intervalle.

Donc : $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in \left[a,\frac{1}{2}\right]$, $f_n(a) \leq f_n(x) \leq \frac{1}{2} = u(x)$,

on en déduit que : $|f_n(x) - u(x)| = \frac{1}{2} - f_n(x) \leq \frac{1}{2} - f_n(a) = |f_n(a) - u(a)|$, et :

$\forall\ n \geq 1, \sup\limits_{[a,\frac{1}{2}]} |f_n - u| \leq |f_n(a) - u(a)|$.

Enfin, puisque : $\forall\ x \in [0,1]$, $f(x) = f(1-x)$ on a finalement : $\sup\limits_{[a,1-a]} |f_n - u| \leq |f_n(a) - u(a)|$.

On en déduit la convergence uniforme de (f_n) vers u sur [a, 1 – a].

43. Pour x réel et n entier non nul, on peut écrire :

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x) + \frac{1}{n}.f'(x) + \frac{1}{2.n^2}.f''(c_{x,n}).$$

Et puisque f'' est bornée sur ℝ, on en déduit que :

$\forall\ n \in$ ℕ*, $\forall\ x \in$ ℝ, $\left| n.\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) - f'(x)\right| \leq \frac{1}{2.n}.M$,

où M est un majorant de $|f''|$ sur ℝ.

Donc : $\forall\ n \in$ ℕ*, $\sup\limits_{x \in R} \left| n.\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) - f'(x)\right| \leq \frac{1}{2.n}.M$,

ce qui montre que (g_n) converge uniformément sur ℝ vers f'.

Remarque : on aurait aussi pu utiliser l'égalité de Taylor avec reste intégral.

44. a. On sait que : $\forall\ n \in$ ℕ, u_n est continue et bornée sur le segment $[a,b]$ et que le sup de $|u_n|$ est atteint sur $[a,b]$ en au moins une valeur qu'on note x_n.

b. On peut écrire successivement :

$\forall\ n \in$ ℕ, $\sup\limits_{[a,b]} |u_{n+1}| = u_{n+1}(x_{n+1}) \leq u_n(x_{n+1}) \leq \sup\limits_{[a,b]} |u_n|$,

notamment parce que la suite ($u_n(\alpha)$) est toujours décroissante (pour tout α dans $[a,b]$).

Donc la suite ($\sup\limits_{[a,b]} |u_n|$) est bien décroissante et étant positive, elle admet une limite : $L \geq 0$.

c. Soit : $p \in$ ℕ.

Alors : $\forall\ n \geq p$, $\sup\limits_{[a,b]}|u_n| = u_n(x_n) \leq u_p(x_n)$.

Donc puisque $(\sup\limits_{[a,b]}|u_k|)$ décroît, on en déduit que : $L \leq \sup\limits_{[a,b]}|u_n| \leq u_p(x_n)$.

d. La suite (x_n) étant une suite d'éléments du compact $[a,b]$, il est possible d'en extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$.

e. L'inégalité obtenue en c. permet encore d'écrire :

$\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, tel que : $\varphi(n) \geq p$, alors : $L \leq u_p(x_{\varphi(n)})$,

ce qui se produit toujours à partir d'un certain rang puisque φ est strictement croissante.

Et si on fait tendre n vers +∞, on en déduit que : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $L \leq u_p(\alpha)$.

f. Vu l'hypothèse faite au début sur u_n, on sait également que : $\forall\ x \in [a,b]$, $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(\alpha) = 0$.

Donc : $L = 0$.

Conclusion : la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction nulle.

g. On peut proposer la suite de fonctions (u_n) définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $u_n(x) = \dfrac{x}{n+1}$,

qui vérifie bien les hypothèses de l'exercice et qui évidemment ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

45. a. Il suffit pour commencer de constater que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, alors : $\eta = 2^{-n} > 0$, et : $\exists\ (x_n, y_n) \in [a,b]^2$, $|x_n - y_n| \leq \eta$, et : $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

Puis la suite (x_n) est bornée et on en extrait une suite $(x_{\alpha(n)})$ convergente, et la suite $(y_{\alpha(n)})$ étant elle-même bornée, on peut à nouveau en extraire une suite $(y_{\alpha(\beta(n))})$ convergente.

Mais alors $(x_{\alpha(\beta(n))})$ comme suite extraite d'une suite convergente est encore convergente.

En posant : $\varphi = \alpha o \beta$, les suites $(x_{\varphi(n)})$ et $(y_{\varphi(n)})$ sont bien convergentes respectivement vers x et y.

On constate alors en passant à la limite dans : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq 2^{-\varphi(n)}$, que : $|x - y| \leq 0$,

puisque $(\varphi(n))$ tend vers +∞, et donc que : $x = y$.

Par ailleurs avec : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon$, on obtient : $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$,

par continuité de f en x (ou en y) et donc : $0 \geq \varepsilon$, ce qui est impossible.

Donc un tel ε n'existe pas et : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$, $\forall\ (x,x') \in [a,b]^2$, $(|x - x'| \leq \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon)$.

b. Le ν cherché est simplement celui que garantit l'affirmation précédente pour : $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$.

c. Il est immédiat que les deux ensembles proposés forment bien une partition de $\mathbb{N}_n$, car disjoints et de réunion égale à $\mathbb{N}_n$.

d. Puisque : $\forall\ k \in E_1$, on a : $\left|x - \dfrac{k}{n}\right| \leq \eta$, alors : $\left|f(x) - f\left(\dfrac{k}{n}\right)\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, et en sommant ces inégalités :

$$S_1 = \sum_{k\in E_1}\binom{n}{k}.\frac{\varepsilon}{2}.x^k.(1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}.\sum_{k\in E_1}\binom{n}{k}.x^k.(1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}.\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{k}.x^k.(1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2}.(x+(1-x))^n = \frac{\varepsilon}{2},$$

puisque tous les termes rajoutés sont positifs.

Puis : $\forall\ k \in E_2$, $\eta < \left|x - \dfrac{k}{n}\right|$, donc : $1 < \dfrac{\left|x - \frac{k}{n}\right|}{\eta}$, d'où :

$$S_2 \leq \sum_{k\in E_2}\binom{n}{k}.2.\sup_{[0,1]}|f|.\frac{1}{\eta^2}.\left(x - \frac{k}{n}\right)^2.x^k.(1-x)^{n-k} = \frac{2}{\eta^2}.\sup_{[0,1]}|f|.\sum_{k\in E_2}\binom{n}{k}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k.(1-x)^{n-k}$$, et enfin :

$$S_2 \leq \frac{2}{\eta^2}.\sup_{[0,1]}|f|.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 x^k.(1-x)^{n-k} = \frac{2}{\eta^2}.\sup_{[0,1]}|f|.S'_2.$$

e. Si pour : $n \geq 1$, on dérive la fonction de t : $t \mapsto (t+y)^n$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.k.t^{k-1}.y^{n-k} = n.(t+y)^{n-1}$,

et en multipliant par t puis en prenant les valeurs : $t = x$, et : $y = 1-x$, on obtient successivement :

$t.\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.k.t^{k-1}.y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.k.t^{k}.y^{n-k} = n.t.(t+y)^{n-1}$, puis :

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.k.x^{k}.(1-x)^{n-k} = n.x.1^{n-1} = n.x$.

Enfin cette égalité est encore vraie pour : $n = 0$.

En redérivant puis en remultipliant par t, on obtient encore (toujours avec : $t = x$, et : $y = 1-x$) :

$\forall\ n \geq 2$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.k^2.t^{k-1}.y^{n-k} = n.(t+y)^{n-1} + n.t.(n-1).(t+y)^{n-2}$, et :

$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.k^2.t^{k}.y^{n-k} = n.t.(t+y)^{n-2}.[t+y+(n-1)t]$, d'où :

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.k^2.x^{k}.(1-x)^{n-k} = n.x.(1+(n-1).x)$,

et cette dernière égalité est encore vraie pour : $n = 0$, ou : $n = 1$, comme on le vérifie à la main.

Enfin : $S'_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\left[x^2 - 2.\frac{k}{n}.x + \frac{k^2}{n^2}\right].x^k.(1-x)^{n-k} = x^2.1 - 2.\frac{x}{n}.n.x + \frac{1}{n^2}.n.x.(1+(n-1).x) = \frac{x.(1-x)}{n}$.

f. On peut alors remarquer que la fonction : $x \mapsto x.(1-x)$, est bornée par $\frac{1}{4}$ sur [0,1], donc :

$S_2 \leq \frac{2}{\eta^2}.\sup_{[0,1]}|f|.\frac{x.(1-x)}{n} \leq \frac{2}{\eta^2}.\sup_{[0,1]}|f|.\frac{1}{4.n} = \frac{1}{2.\eta^2.n}.\sup_{[0,1]}|f|$, puis :

$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2.\eta^2.n}.\sup_{[0,1]}|f|$.

La présence du n au dénominateur garantit alors que :

$\exists\ N \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ n \geq N$, $\frac{1}{2.\eta^2.n}.\sup_{[0,1]}|f| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et :

$\forall\ x \in [0,1]$, $|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \varepsilon$.

Finalement : $\forall\ n \geq N$, $\sup_{[0,1]}|f - B_n(f)| \leq \varepsilon$, et la suite ($B_n(f)$) est une suite de polynômes qui converge uniformément sur [0,1] vers f.

g. On constate que la fonction g est continue (par opérations) de [0,1] dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La suite (P_n) est par ailleurs une suite de polynômes.

Enfin : $\forall$ t $\in [a,b]$, on pose : $x = \frac{t-a}{b-a} \in [0,1]$, et on constate que :

$|f(t) - P_n(t)| = \left|f(a + x.(b-a)) - B_n(g)\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right| = |g(x) - B_n(g)(x)| \leq \sup_{[0,1]}|g - B_n(g)|$.

Donc : $\sup_{[a,b]}|f - P_n| \leq \sup_{[0,1]}|g - B_n(g)|$,

et le théorème des gendarmes montre que (P_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers f.

Approximations uniformes de la valeur absolue par des polynômes.

46. a. Notons tout d'abord que pour tout n, l'intégrale au dénominateur est non nulle, puisque la fonction intégrée est continue et positive sur [0,1], et non nulle en 0.

Puis le numérateur est une primitive d'un polynôme donc c'est une fonction polynomiale sur [-1,+1].

b. A l'aide du changement de variable : $u = -t$, on obtient :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in$ [-1,+1], $\int_0^{-x}(1-t^2)^n.dt = -\int_0^{x}(1-u^2)^n.du$, et donc P est une fonction impaire.

On va donc se contenter d'étudier le problème sur $[\varepsilon,1]$ et pour cela :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [\varepsilon,1],\ |P_n(x)-1| = \left|\frac{\int_0^x (1-t^2)^n.dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n.dt} - 1\right| = \frac{\int_x^1 (1-t^2)^n.dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n.dt}.$$

Or :

- sur l'intervalle considéré, la fonction polynôme est majorée par $(1-\varepsilon^2)^n$,
- $\forall$ t $\in$ [0,1], on a : $1-t^2 \geq 1-t$, et donc : $\frac{1}{(1-t^2)^n} \leq \frac{1}{(1-t)^n}$.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [\varepsilon,1]$, $|P_n(x)-1| \leq \frac{(1-\varepsilon^2)^n.(1-\varepsilon)}{\int_0^1 (1-t)^n.dt} = (n+1).(1-\varepsilon^2)^n.(1-\varepsilon)$.

On en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{[\varepsilon,1]} |P_n - 1| \leq (n+1).(1-\varepsilon^2)^n.(1-\varepsilon)$,

et la suite (P_n) converge uniformément sur $[\varepsilon,1]$ vers la fonction constante égale à 1.

Par imparité, (P_n) converge uniformément sur [-1,-ε] ∪ [ε,1] vers la fonction signe

c. Chaque fonction P_n étant impaire, Q_n est paire.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in$ [0,1], $|Q_n(x) - x| = \left|\int_0^x (P_n(t)-1).dt\right| \leq \int_0^x |P_n(t)-1|.dt$.

On constate alors que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto (1-t^2)^n$, est positive sur [0,1], donc P_n est croissante sur [0,1], et étant majorée par 1, elle vérifie : $\forall\ x \in$ [0,1], $0 \leq P_n(x) \leq 1$.

Si alors on prend : $\varepsilon > 0$, alors :

- $\forall\ x \in [0,\varepsilon]$, $|Q_n(x) - x| \leq \int_0^\varepsilon |P_n(t)-1|.dt + \int_\varepsilon^x |P_n(t)-1|.dt \leq \varepsilon + (x-\varepsilon).\sup\limits_{[\varepsilon,1]}|P_n - 1| \leq \varepsilon + \sup\limits_{[\varepsilon,1]}|P_n - 1|$.

Or la question précédente garantit que : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_0$, $\sup\limits_{[\varepsilon,1]}|P_n - 1| \leq \varepsilon$.

Finalement : $\forall\ n \geq n_0$, $\forall\ x \in$ [0,1], $|Q_n(x) - x| \leq 2.\varepsilon$, puis : $\sup\limits_{x\in[0,1]} |Q_n(x) - x| \leq 2.\varepsilon$.

On en déduit que (Q_n) converge uniformément sur [0,1] vers la fonction : $x \mapsto x$, et par imparité, (Q_n) converge uniformément sur [-1,+1] vers la fonction valeur absolue.

47. a. On commence par remarquer qu'il est immédiat par récurrence que P_n est un polynôme à valeurs positives sur [0,1].
On va ensuite démontrer le résultat demandé par récurrence.

Il est immédiat pour : $n = 0$, puisque : $\forall\ x \in$ [0,1], $0 \leq \sqrt{x} - P_0(x) = \sqrt{x} = \frac{2.\sqrt{x}}{2+0.\sqrt{x}}$.

Supposons-le vrai pour un entier : $n \geq 0$, donné.

Alors : $\forall\ x \in$ [0,1], $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = \sqrt{x} - P_n(x) - \frac{(x - P_n(x)^2)}{2} = (\sqrt{x} - P_n(x)).(1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2})$.

Dans la dernière expression, la première parenthèse est positive par hypothèse de récurrence), et :

$\forall\ x \in$ [0,1], $P_n(x) \leq \sqrt{x}$, donc : $1 - \frac{\sqrt{x} + P_n(x)}{2} \geq 1 - \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{2} = 1 - \sqrt{x} \geq 0$.

Donc la différence étudiée est positive ce qui fournit la première inégalité au rang $n+1$.

Puis : $\forall\ x \in$ [0,1], $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x)).(1 - \frac{\sqrt{x}+P_n(x)}{2}) \leq \frac{2.\sqrt{x}}{2+n.\sqrt{x}}.(1 - \frac{\sqrt{x}}{2})$.

Il suffit donc de démontrer que : $\forall\ x \in$ [0,1], $\frac{2.\sqrt{x}}{2+n.\sqrt{x}}.(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}) \leq \frac{2.\sqrt{x}}{2+(n+1).\sqrt{x}}$, pour obtenir la deuxième inégalité, ou encore que :

$\forall\ x \in [0,1],\ (2+(n+1).\sqrt{x}).(1-\frac{\sqrt{x}}{2}) \leq (2+n.\sqrt{x})$.

Or : $\forall\ x \in [0,1],\ (2+n.\sqrt{x})-(2+(n+1).\sqrt{x}).(1-\frac{\sqrt{x}}{2}) = (n+1).\frac{x}{2} \geq 0$.

On conclut donc que la deuxième inégalité est vérifiée au rang $n+1$ ce qui termine la récurrence.
Remarque : l'indication ne sert à rien.

b. On constate alors que la fonction φ : $t \mapsto \frac{2.t}{2+n.t}$, est dérivable sur [0,1], de dérivée égale à :

$\forall$ t ∈ [0,1], $\varphi'(t) = \frac{4}{(2+n.t)^2}$, donc qu'elle est croissante sur [0,1].

On en déduit que : $\forall\ x \in$ [0,1], $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \varphi(1) = \frac{2}{2+n}$, et : $\sup_{x\in[0,1]} \left|\sqrt{x} - P_n(x)\right| \leq \frac{2}{2+n}$.

On en déduit que la suite (P_n) converge uniformément sur [0,1] vers la racine carrée.

c. Vu ce qu'on a obtenu à la question précédente, on peut écrire :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall$ t ∈ [-1,+1], $0 \leq |t| - (P_n(|t|))^2 = (\sqrt{|t|} - P_n(|t|)).(\sqrt{|t|} + P_n(|t|)) \leq 2.\sqrt{|t|}.(\sqrt{|t|} - P_n(|t|))$,

et donc : $0 \leq |t| - Q_n(|t|) \leq 2.(\sqrt{|t|} - P_n(|t|))$.

On en déduit finalement que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sup_{t\in[-1,1]} \left||t| - Q_n(|t|)\right| \leq 2.\sup_{x\in[0,1]}\left|\sqrt{x} - P_n(x)\right|$, ce qui prouve bien la convergence uniforme sur [-1,+1] de la suite (Q_n) vers la fonction vers la valeur absolue.

Convergence et sommes de séries de fonctions.

48. a. Notons : $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x > -1$, $u_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

Alors pour : $x \in [a,b]$, $|u_n(x)| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right| = \frac{|x|}{n.(n+x)} \leq \frac{\max(|a|,|b|)}{n.(n+a)} = \alpha_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\max(|a|,|b|)}{n^2}$.

Donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]-1,+\infty)$.

Comme de plus, toutes les fonctions u_n sont continues sur $]-1,+\infty)$, la fonction S est définie et continue sur $]-1,+\infty)$.

b. On peut utiliser un théorème de dérivation, ou remarquer simplement que :

$\forall\ n \geq 1$, $\forall\ -1 < x < y$, $u_n(x) \leq u_n(y)$, et donc par sommation de séries convergentes : $S(x) \leq S(y)$.

S est donc croissante sur $]-1,+\infty)$.

c. Soit : $N \in \mathbb{N}^*$, et notons S_N une somme partielle de la série S.

Alors : $\forall\ x > -1$, $\forall\ N \geq 1$,

$$S_N(x+1) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+x+1} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n+x} = S_N(x) + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x}.$$

Puis en faisant tendre N vers +∞ : $S(x+1) = S(x) + \frac{1}{1+x}$, soit : $S(x+1) - S(x) = \frac{1}{1+x}$.

d. Quand x tend vers -1, $S(x+1)$ tend vers : $S(0) = 0$, puisque S est continue sur $]-1,+\infty)$.

Donc : $S(x) \underset{-1}{\sim} \frac{-1}{1+x}$.

e. On reprend des sommes partielles et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ N \geq n,\ S_N(n) = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{k+n} = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{N+n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=N+1}^{N+n}\frac{1}{k}.$$

Comme de plus : $0 \leq \sum_{k=N+1}^{N+n}\frac{1}{k} \leq \frac{n}{N+1}$, on en déduit, en faisant tendre à nouveau N vers +∞, que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Enfin, S étant croissante sur $]-1,+\infty)$: $\forall\ x > 0$, $S(\lfloor x \rfloor) \leq S(x) \leq S(\lfloor x \rfloor + 1)$.

Or les quantités encadrantes sont toutes deux équivalentes entre elles et à $\ln(x)$ en +∞, donc :

$S(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$.

49. a. Il suffit d'effectuer le changement d'indice : $k = n - p$, pour obtenir l'égalité demandée.

b. Il suffit de poser par exemple, pour tout entier : $k \in \mathbb{N}$:

- $\forall\ 1 \leq x \leq k$, $f_k(x) = 0$,
- $\forall\ k < x$, $f_k(x) = \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x$.

Alors on a bien : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n)$.

c. Pour x fixé dans [1,+∞), $f_k(x)$ est nul dès que k est supérieur ou égal à x, donc la série numérique $\sum_{k\geq 0} f_k(x)$ est nulle à partir d'un certain rang et donc converge.

De plus :

- chaque fonction f_k a une limite finie en +∞ qui vaut : $\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = e^{-k}$,
- la série des limites converge comme série géométrique,
- la série de fonctions converge normalement sur [1,+∞).

En effet : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \geq 1$, $f_k'(x) = f_k(x).\left[\ln\left(1 - \frac{k}{x}\right) + \frac{k}{x-k}\right]$,

puis la fonction g_k donnée par le crochet a pour dérivée : $g_k'(x) = \frac{-k}{x.(x-k)^2}$, qui est négative.

Donc g_k est décroissante et tend vers 0 en +∞ donc reste positive sur [1,+∞).

Donc f_k' est donc aussi positive sur [1,+∞) et f_k est croissante.

D'où : $\forall\ x \geq 1,\ 0 \leq f_k(x) \leq \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{k}{x}\right)^x = e^{-k} = \alpha_k$,

ce qui donne bien la convergence normale de $\sum_{k\geq 0} f_k$ sur [1,+∞) vu la série géométrique et convergente.

On en déduit donc que : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}$.

50. a. Pour x fixé dans [1,+∞), $u_k(x)$ est nul dès que k est strictement plus grand que x, donc la série numérique $\sum_{k\geq 0} u_k(x)$ est nulle à partir d'un certain rang et elle converge.

b. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $S(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k!}.\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.\left(\frac{z}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

c. Pour : $x \in$ [1,+∞), on a : $\forall\ k \geq 0$, $|u_k(x)| \leq \frac{|z|^k}{k!} = \alpha_k$.

Puisque la série $\sum_{k\geq 0} \alpha_k$ converge, on en déduit la convergence normale de $\sum_{k\geq 0} u_k$ sur [1,+∞).

d. Enfin :

- chaque fonction u_k a une limite finie en +∞ qui est : $\lim_{x\to+\infty} u_k(x) = \frac{z^k}{k!}$,
- la série des limites est convergente comme série exponentielle,

• la série $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge normalement sur [1,+∞).

Donc : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = e^z$.

51. a. Notons tout d'abord : $\forall\ n\geq 0$, $\forall\ x>0$, $u_n(x) = \dfrac{\lambda^n}{x.(x+1)...(x+n)}$.

Pour : $x>0$, fixé, on a : $\forall\ n\geq 1$, $\left|\dfrac{\lambda^n}{x.(x+1)...(x+n)}\right| \leq \dfrac{1}{x}.\dfrac{|\lambda|^n}{n!}$,

et on en déduit la convergence de la série par comparaison avec une série exponentielle.

b. On constate que :

• chaque fonction u_n a une limite finie (nulle) en +∞,

• la série de ces limités est évidemment convergente,

• la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur [1,+∞), puisque :

$\forall\ n\geq 1$, $\forall\ x\geq 1$, $|u_n(x)| \leq \dfrac{1}{x}.\dfrac{|\lambda|^n}{n!} \leq \dfrac{|\lambda|^n}{n!} = \alpha_n$, et $\sum_{n\geq 1}\alpha_n$ converge.

Donc on peut intervertir limite et somme et : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\lambda^n}{x.(x+1)...(x+n)} = 0$.

c. Enfin, on peut remarquer que : $\forall\ x>0$, $x.S(x) = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^n}{(x+1)...(x+n)}$,

et la nouvelle série qui apparaît converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ car :

$\forall\ n\geq 1$, $\forall\ x\geq 0$, $\left|\dfrac{\lambda^n}{(x+1)...(x+n)}\right| \leq \dfrac{|\lambda|^n}{n!}$.

Comme toutes les fonctions composant cette série sont continues sur $\mathbb{R}^+$, sa somme l'est aussi et :

$\lim_{x\to 0} x.S(x) = 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$.

On en déduit que : $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{e^\lambda}{x}$.

52. a. Pour x dans [0,1[, la suite $(u_n(x))$ converge vers 0 puisque (x^n) tend vers 0.

Par ailleurs, ($u_n(1)$) est constante égale à $f(1)$.

Donc il y a toujours convergence simple de (u_n) sur [0,1].

Notons alors M un majorant de $|f|$ sur [0,1].

• si : $f(1)\neq 0$, il ne peut y avoir convergence uniforme de (u_n) sur [0,1] puisque toutes les fonctions u_n sont continues sur [0,1] alors que la limite simple de la suite ne l'est pas.

Il est donc nécessaire que : $f(1)=0$, pour qu'il y ait convergence uniforme sur [0,1].

• réciproquement, supposons que : $f(1)=0$.

Alors :

- d'une part f étant continue en 1, on sait que :

$\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \alpha>0$, $\forall\ x \in$ [0,1], $(|x-1|\leq\alpha) \Rightarrow (|f(x)-f(1)|\leq\varepsilon)$.

Dans ce cas : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [1-\alpha,1]$, $|u_n(x)-0| = x^n|f(x)| = x^n|f(x)-f(1)| \leq |f(x)-f(1)| \leq \varepsilon$.

- d'autre part : $\forall\ x \in$ [0,1], $(0\leq x\leq 1-\alpha) \Rightarrow (|u_n(x)-0| = x^n.|f(x)| = (1-\alpha)^n.M)$, et :

$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n\geq n_0$, $(1-\alpha)^n.M\leq\varepsilon$, puisque la suite géométrique tend vers 0.

Conclusion : $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n\geq n_0$, $\forall\ x \in$ [0,1], $|u_n(x)-0|\leq\varepsilon$, et la suite ($u_n$) converge uniformément sur [0,1] vers 0.

b. • Il est déjà nécessaire que $f(1)$ soit nul pour que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur [0,1], car la suite (u_n) doit déjà converger simplement sur [0,1] vers 0 et en particulier ($u_n(1)$) doit converger vers 0.
Supposons alors cette condition remplie.
Si la série converge uniformément sur [0,1], alors il y a convergence simple sur [0,1] de cette série, et :

$\forall\ x \in$ [0,1[, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.f(x) = \dfrac{f(x)}{1-x}$, et : $S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(1) = 0$.

Toutes les fonctions u_n étant continues sur [0,1], la convergence uniforme sur [0,1] de la série garantit que la somme S est continue sur [0,1] donc en 1.
Par conséquent $S(x)$ tend vers $S(1)$ quand x tend vers 0 autrement dit :

$$0 = S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{1-x}.$$

On en déduit que f est dérivable en 1 et que : $f'(1) = -\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{1-x} = 0$.

• Réciproquement, supposons que : $f(1)=0$, f dérivable en 1, et : $f'(1)=0$.

Alors : $\forall\ x \in$ [0,1[, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|S(x)-S_n(x)| = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}.|f(x)| = x^{n+1}.\dfrac{|f(x)-f(1)|}{1-x}$,

où on a noté S_n la somme partielle de la série.
Soit alors : $\varepsilon > 0$.

• puisque f est dérivable en 1, on sait qu'il existe : $\alpha > 0$, tel que :

$(1-\alpha \le x \le 1) \Rightarrow (\dfrac{|f(x)-f(1)|}{1-x} \le \varepsilon)$, et donc : $(1-\alpha \le x \le 1) \Rightarrow (\forall\ n \in \mathbb{N},\ |S(x)-S_n(x)| \le \varepsilon)$,

• si : $x=1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|S(1)-S_n(1)| = 0 \le \varepsilon$,

• si : $0 \le x \le 1-\alpha$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|S(x)-S_n(x)| = x^{n+1}.\dfrac{|f(x)|}{1-x} \le (1-\alpha)^{n+1}.M'$,

où M' majore le quotient qui est une fonction continue sur le segment $[0,1-\alpha]$.
Donc : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \ge n_0$, $(1-\alpha)^{n+1}.M' \le \varepsilon$, puisque la suite géométrique tend vers 0.
On vient donc de montrer que :

$\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \ge n_0$, $\forall\ x \in$ [0,1], $|S(x)-S_n(x)| \le \varepsilon$, et : $\sup_{[0,1]} |S-S_n| \le \varepsilon$.

Autrement dit la série converge uniformément sur [0,1].

53. On peut remarquer que comme toutes les fonctions dans la série sont impaires, on peut limiter l'étude aux réels positifs (puisqu'on obtiendra des résultats « symétrique » sur $\mathbb{R}^-$).
On pose par ailleurs : $\forall\ n \ge 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{sh(n.x)}$.

a. La série n'est pas définie pour : $x = 0$.
Pour : $x > 0$, on a : $\forall\ n \ge 1$, $\dfrac{1}{sh(n.x)} = \dfrac{2}{e^{n.x} - e^{-n.x}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{e^{n.x}} = 2.(e^{-x})^n$,

et la série $\sum_{n\ge 1} u_n(x)$ converge par comparaison avec une série géométrique positive convergente.

Donc : D = $\mathbb{R}$* (on utilise l'argument d'imparité pour ne pas traiter le cas des réels négatifs).
De plus et puisque sh est croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$\forall\ a > 0$, $\forall\ n \ge 1$, $\forall\ x \in [a,+\infty)$, $0 \le u_n(x) \le \dfrac{1}{sh(n.a)} = \alpha_n$,

et comme la série $\sum_{n\ge 1} \alpha_n$ converge, on en déduit la convergence normale de la série $\sum_{n\ge 1} u_n$ sur $[a,+\infty)$.

Comme enfin, toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$, f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc sur $\mathbb{R}$*.

b. Puisque sh est croissante sur ℝ$^{+*}$ et à valeurs positives, les fonctions u_n sont décroissantes comme composées avec la fonction inverse et f comme somme (même infinie) est également décroissante sur ℝ$^{+*}$.
Par imparité, f est également décroissante sur ℝ$^{-*}$.

c. On peut traiter les deux points en même temps (sachant que la limite de f en $+\infty$ peut s'obtenir avec un argument de convergence uniforme ou normale).
Pour cela :

- f est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty)$,
- $\forall\ x>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{e^{n.x}}=2.e^{-x}.\frac{1}{1-e^{-x}}=\frac{2}{e^x-1}\underset{+\infty}{\sim}2.e^{-x}$, et :
- $\forall\ x>0$, $\displaystyle\left|f(x)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{e^{n.x}}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2.e^{-n.x}}{e^{n.x}.(e^{n.x}-e^{-n.x})}\le e^{-2.x}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(e^{n.x}-e^{-n.x})}=e^{-2.x}.f(x)\le e^{-2.x}.f(1)$.

Donc : $\displaystyle f(x)=2.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{e^{n.x}}+O_{+\infty}(e^{-2.x})=\frac{2}{e^x-1}+O_{+\infty}(e^{-2.x})$, et : $f(x)\underset{+\infty}{\sim}2.e^{-x}$.

En particulier : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

d. Pour : $x>0$, comme tous les termes de la série sont positifs, on a : $f(x)\ge\dfrac{1}{sh(x)}$, et : $\displaystyle\lim_{x\to0}f(x)=+\infty$.

Puis on va utiliser une comparaison série intégrale et pour cela, pour : $x>0$, on a :

$\forall\ n\ge1$, $\forall$ t $\in[n,n+1]$, $\dfrac{1}{sh((n+1).x)}\le\dfrac{1}{sh(t.x)}\le\dfrac{1}{sh(n.x)}$,

d'où en intégrant sur $[n,n+1]$ et en sommant de 1 à $+\infty$ (les quantités qui apparaissent convergent) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{sh((n+1).x)}\le\int_1^{+\infty}\frac{dt}{sh(t.x)}\le\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{sh(n.x)},$$

ce qui avec translation d'indice donne : $\displaystyle f(x)-\frac{1}{sh(x)}\le\int_1^{+\infty}\frac{dt}{sh(t.x)}\le f(x)$.

Puis en notant : $\displaystyle\varphi(x)=\int_1^{+\infty}\frac{dt}{sh(t.x)}$, on a : $\displaystyle\varphi(x)=\int_1^{+\infty}\frac{2.e^{t.x}}{e^{2.t.x}-1}.dt=\frac{1}{x}.\int_{e^x}^{+\infty}\frac{2}{u^2-1}.du$,

en utilisant le changement de variable croissant et de classe C^1 : $u=e^{t.x}$.

Donc : $\displaystyle\varphi(x)=\frac{1}{x}.\int_{e^x}^{+\infty}\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\right).du=\frac{1}{x}.\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{e^x}^{+\infty}=\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$.

Lorsque x tend vers 0, on utilise un développement limité et :

$\displaystyle\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)=\ln\left(\frac{2+x+o_0(x)}{x+o_0(x)}\right)=-\ln(x)+\ln(2)+o_0(1)$, et : $\displaystyle\varphi(x)\underset{0}{\sim}\frac{-\ln(x)}{x}$.

On revient ensuite à : $\forall\ x>0$, $\displaystyle\varphi(x)\le f(x)\le\varphi(x)+\frac{1}{sh(x)}$,

et comme : $\displaystyle\frac{1}{sh(x)}\underset{0}{\sim}\frac{1}{x}=o_0\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$, on en déduit que : $\displaystyle\varphi(x)+\frac{1}{sh(x)}\underset{0}{\sim}\frac{-\ln(x)}{x}$,

soit finalement : $\displaystyle f(x)\underset{0}{\sim}\frac{-\ln(x)}{x}$.

54. Pour une valeur de a donnée, on va noter : $\forall\ n\in$ ℕ, $\forall\ x\in$ ℝ, $u_n(x)=\dfrac{a^n}{n+x}$.

a. Remarquons tout d'abord que quelque soit la valeur de a, x ne peut être un entier négatif puisqu'alors l'un des termes de la série n'est pas défini.
On notera dans la suite D l'ensemble des réels privé des entiers négatifs.

- Pour : $|a|>1$, la série $\displaystyle\sum_{n\ge0}u_n(x)$ diverge grossièrement pour toute valeur de x dans D.

En effet, le théorème des croissances comparées garantit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$.

• Pour : $a = 1$, la série diverge pour tout x dans D car : $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

• Pour : $a = -1$, la série converge pour tout x dans D.
En effet, elle est alors alternée à partir d'un certain rang (pour : $n \geq n_x = \lfloor -x \rfloor + 1$) et elle vérifie le critère spécial des séries alternées à partir de ce rang car :

$\forall\ n \geq n_x\ |u_n(x)| = \frac{1}{n+x}$, qui décroît bien vers 0.

• Pour : $|a| < 1$, la série converge pour tout x dans D car :

$\forall\ x \in D$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2.u_n(x) = 0$,

avec le théorème des croissances comparées, ce qui garantit bien la convergence de la série.
Donc l'ensemble des valeurs de a que l'on cherche est [-1,+1[.
Pour toutes ces valeurs, l'ensemble de définition de S est l'ensemble D précisé au-dessus.

b. $\mathbb{R}^{+*}$ est inclus dans D.
Pour : $|a| < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$, car :

$\forall\ n \geq 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $|u_n(x)| \leq |a|^n = \alpha_n$, et la série $\sum\limits_{n\geq1} \alpha_n$ converge.

Comme de plus toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$, la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Enfin : $S = u_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, est également continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour : $a = -1$, on utilise un argument de convergence uniforme exploitant la majoration classique du reste d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées.

c. Il est immédiat que si x n'est pas un entier négatif, $x+1$ n'en est pas un non plus.
On en déduit le résultat voulu.

Puis : $\forall\ x \in D$, $a.S(x+1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}}{n+x+1} = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{p+x} = S(x) - \frac{1}{x}$,

par translation d'indice : $p = n+1$.

d. Lorsque x tend vers 0, $S(x+1)$ tend vers $S(1)$ par continuité de S.

Puisque : $\forall\ x > 0$, $S(x) = \frac{1}{x} + a.S(x+1)$,on en déduit que : $S(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$.

e. Toutes les fonctions u_n tendent vers 0 en +∞, et la série de ces limites est évidemment convergente.
Comme de plus, on a convergence normale (ou uniforme) de $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, le théorème de la double limite permet d'écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Enfin (pour : $|a| < 1$), on a : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\left| S(x) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x} \right| = \left| \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n.a^n}{(n+x).x} \right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n.|a|^n}{(n+x).x} \leq \frac{1}{x^2}.\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n.|a|^n$.

Si on pose : $K = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n.|a|^n$ (la série est évidemment convergente), alors : $\left| S(x) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x} \right| \leq \frac{K}{x^2}$.

Or : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x} = \frac{1}{x}.\frac{1}{1-a}$, et donc : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $S(x) = \frac{1}{x}.\frac{1}{1-a} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, ce qui permet de conclure :

$S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.\frac{1}{1-a}$.

Remarque : dans cette dernière question pour le cas : $a = -1$, on peut transformer $S(x)$ en regroupant les termes deux par deux, puis utiliser une comparaison série-intégrale qui permet d'obtenir finalement un équivalent de $S(x)$ en +∞, et on trouve : $S(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2.x}$.

55. Pour : $0 < a < 1$, on va noter : $M(a) = \sup\limits_{[-a,+a]} |f|$.

Montrons maintenant par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ a \in]0,1[$, $\sup\limits_{[-a,+a]} |f_n| \le M(a).a^n$.

- le résultat est vrai pour : $n = 0$.
- soit : $n \in \mathbb{N}$, et supposons la proposition vraie pour cet entier n.

Alors : $\forall\ a \in]0,1[$, $\forall\ x \in [0, a]$, $|f_{n+1}(x)| \le \int_0^x |f_n(t)|.dt \le \int_0^x M(a).a^n.dt = M(a).a^n.x \le M(a).a^{n+1}$.

Si maintenant x est dans $[-a,0]$, la démonstration s'adapte avec : $|f_{n+1}(x)| \le \int_x^0 |f_n(t)|.dt \le M(a).a^{n+1}$.

Donc : $\forall\ a \in]0,1[$, $\sup\limits_{[-a,+a]} |f_{n+1}| \le M(a).a^{n+1}$.

On en déduit la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur tout intervalle $[-a,+a]$ inclus dans]-1,+1[, ce qui suffit pour la suite de l'exercice.
En fait, si f est bornée sur]-1,+1[, il y a convergence normale de cette série sur]-1,+1[, en montrant, toujours par récurrence que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ a \in]0,1[$, $\sup\limits_{[-a,+a]} |f_n| \le M.\dfrac{a^n}{n!}$, et où on a noté : $\sup\limits_{]-1,+1[} |f| = M$.

En effet, si le résultat est supposé vrai pour un entier n donné, alors :

$\forall\ a \in]0,1[$, $\forall\ x \in [0,+a]$, $|f_{n+1}(x)| \le \int_0^x |f_n(t)|.dt \le \int_0^x M.\dfrac{t^n}{n!}.dt = M.\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \le M.\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!}$.

De même on adapte la démonstration pour traiter les valeurs entre $-a$ et 0.

Mais alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ a \in]0,1[$, $\sup\limits_{[-a,+a]} |f_n| \le \dfrac{M}{n!}$, et finalement : $\sup\limits_{]-1,+1[} |f_n| \le \dfrac{M}{n!}$, d'où le résultat annoncé.

Notons maintenant S la somme de la série.
Par récurrence, toutes les fonctions f_n sont continues sur]-1,+1[puisque :

- $f_0 = f$, est continue sur]-1,+1[,
- si f_n est supposée continue sur]-1,+1[, f_{n+1} comme primitive d'une fonction continue sur]-1,+1[est de classe C^1 sur]-1,+1[donc y est continue.

S étant continue, on note σ la primitive de S qui s'annule en 0 (qui est donc de classe C^1 sur]-1,+1[).
Soit maintenant : $x \in]-1,+1[$.
Alors :

$$\sigma(x) = \int_0^x S(t).dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = S(x) - f_0(x) = \sigma'(x) - f(x).$$

La convergence normale de la série sur $[0, x]$ a en effet permis d'intervertir intégrale et somme.
On constate donc que σ est solution de l'équation différentielle : $y' - y = f(x)$.
La résolution classique de cette équation différentielle (avec variation de la constante) donne les solutions : $y(x) = e^x.(C + \int_0^x e^{-t}.f(t).dt)$, avec : $C \in \mathbb{C}$.

Enfin, puisque : $\sigma(0) = 0$, on en déduit que : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $\sigma(x) = e^x.\int_0^x e^{-t}.f(t).dt$,

et en dérivant : $\forall\ x \in]-1,+1[$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sigma'(x) = f(x) + e^x.\int_0^x e^{-t}.f(t).dt$.

56. a. Si f est continue sur [0,1], en notant M un majorant de $|f|$ sur [0,1], la série converge normalement sur [0,1] puisque : $\forall\ x \in [0,1]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{f(x^n)}{2^n}\right| \le \dfrac{M}{2^n}$.

b. Soit : $x \in [0,1]$.

Remarquons tout d'abord que $h(x)$ existe puisque f est continue sur le segment $[0,x]$.

Alors : $f(x) = \dfrac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$, et : $\dfrac{f(x)}{2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n}$, donc : $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^{n+1})}{2^n}$.

Puis : $\forall\ n \geq 1$, $\forall$ t $\in [0,x]$, $0 \leq t^{n+1} \leq t^2$, et : $\left|f(t)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\left|f(x^{n+1})\right|}{2^n} \leq h(t^2).\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = h(t^2) \leq h(x^2)$.

Donc : $h(x) = \sup_{t\in[0,x]} \left|f(t)\right| \leq h(x^2)$.

On peut alors en déduire par récurrence que : $\forall\ x \in [0,1[$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \left|f(x)\right| \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$,

et comme (2^n) tend vers $+\infty$, (x^{2^n}) tend vers 0.

Enfin f étant continue en 0, $h(u)$ tend vers 0 quand u tend vers 0, donc :

$\forall\ x \in [0,1[$, $0 \leq \left|f(x)\right| \leq h(x) \leq \lim_{n\to+\infty} h(x^{2^n}) = h(0) = 0$, et donc : $f(x) = 0$.

Et comme f est continue sur [0,1], f est nulle sur [0,1].

c. On vient de montrer que si f est solution du problème et nulle en 0, alors f est la fonction nulle.

Puis si on ne suppose plus f nulle en 0 mais toujours solution du problème, alors : $g = f - f(0)$, est encore solution du problème car :

$\forall\ x \in [0,1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{g(x^n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^n) - f(0)}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n} - f(0).\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = f(x) - f(0) = g(x)$.

Comme de plus : $g(0) = f(0) - f(0) = 0$, on en déduit que g est nulle, donc que f est constante.

Réciproquement, si f est constante, alors f est immédiatement solution du problème car f est bien continue sur [0,1] et si C est la valeur constante de f, alors :

$\forall$ x $\in [0,1]$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{f(x^n)}{2^n} = C.\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n} = C = f(x)$.

Conclusion : les solutions du problème initial sont les fonctions constantes.

57. a. La fonction φ est clairement positive et majorée par $\dfrac{1}{2}$ car c'est le cas sur [0,1] et elle est 1-périodique.

On a alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\left|\varphi_n(x)\right| \leq \dfrac{1}{4^n}$, et la série de fonctions converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Donc S est définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, φ est continue sur $\mathbb{R}$, donc toutes les fonctions φ_n le sont aussi et la convergence normale sur $\mathbb{R}$ assure la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

b. Supposons que les deux intervalles proposés $]4^{p-1}.\alpha - \dfrac{1}{4}, 4^{p-1}.\alpha[$ et $]4^{p-1}.\alpha, 4^{p-1}.\alpha + \dfrac{1}{4}[$ contiennent chacun un demi-entier n_1 et n_2.

Alors on aurait : $\dfrac{1}{2} \leq \left|n_2 - n_1\right|$, mais aussi : $\left|n_2 - n_1\right| \leq \left|n_2 - 4^{p-1}.\alpha\right| + \left|4^{p-1}.\alpha - n_1\right| < \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$,

ce qui est impossible.

Donc l'un des deux intervalles proposés ne contient aucun demi-entier et il est ainsi possible de choisir une valeur de ε_p (égale à ±1) répondant à la question.

c. On a donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\tau_{n,p} = \dfrac{1}{\varepsilon_p.4^{-p}}.4^{-n}.[\varphi_0(4^n.\alpha + \varepsilon_p.4^{n-p}) - \varphi_0(4^n.\alpha)]$.

Distinguons alors deux cas :

- si : $n \geq p$, alors $(\varepsilon_p.4^{n-p})$ est un entier et φ_0 étant 1-périodique, on a : $\tau_{n,p} = 0$.
- si : $n \leq p-1$, supposons qu'il existe un demi-entier k entre $(4^n.\alpha)$ et $(4^n.\alpha + \varepsilon_p.4^{n-p})$.

En multipliant les deux valeurs précédentes par 4^{-n+p-1}, on constate que $4^{p-1-n}.k$ serait un demi-entier

(car : $p-1-n \geq 0$) entre $(4^{p-1}.\alpha)$ et : $(4^{p-1}.\alpha + \frac{\varepsilon_p}{4})$,
ce qui est impossible par construction.
Il n'y a donc pas de demi-entier entre $(4^n.\alpha)$ et $(4^n.\alpha + \varepsilon_p.4^{n-p})$.

On en déduit qu'il existe : $N \in \mathbb{N}$, tel que ces deux valeurs sont dans le même intervalle $\left[\frac{N}{2}, \frac{N+1}{2}\right]$.

Or sur un tel intervalle φ_0 est affine de pente 1 ou -1, et donc : $\tau_{n,p} = \frac{\varphi_n(\alpha + \varepsilon_p.4^{-p}) - \varphi_n(\alpha)}{\varepsilon_p.4^{-p}} = \pm 1$.

En conclusion :

- $\forall\ n \geq p$, $\tau_{n,p} = |\tau_{n,p}| = 0$,
- $\forall\ n \leq p-1$, $|\tau_{n,p}| = 1$.

d. Pour : $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tau_p = \frac{S(\alpha + \varepsilon_p.4^{-p}) - S(\alpha)}{\varepsilon_p.4^{-p}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\varphi_n(\alpha + \varepsilon_p.4^{-p}) - \varphi_n(\alpha))}{\varepsilon_p.4^{-p}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tau_{n,p} = \sum_{n=0}^{p-1} \tau_{n,p}.$$

Or chaque $\tau_{n,p}$ vaut 1 ou -1, donc la somme de p tels entiers est encore un entier (relatif), de même parité que p.
Enfin, on sait qu'une suite d'entiers convergente est nécessairement constante à partir d'un certain rang, ce qui ici n'est pas possible puisque la parité du terme général n'est pas constante.
Donc la suite (τ_p) diverge.

e. Soit α un réel strictement positif.

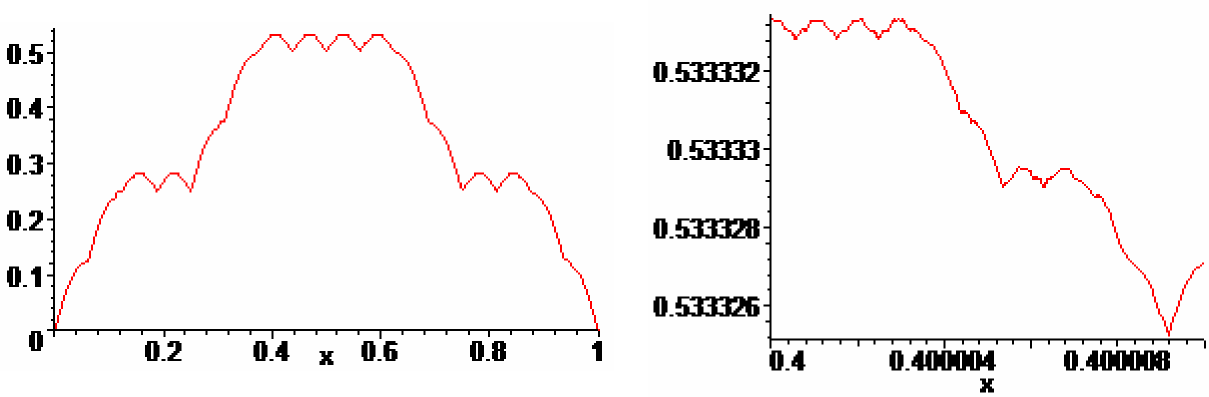
Si S était dérivable en α, alors pour toute suite (a_p) convergeant vers α, la suite $\left(\frac{S(a_p) - S(\alpha)}{a_p - \alpha}\right)_p$ convergerait vers $S'(\alpha)$, donc en particulier convergerait.

Mais si on pose : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $a_p = \alpha + \varepsilon_p.4^{-p}$, on constate alors que :

- la suite (a_p) converge bien vers α,
- la suite $\left(\frac{S(a_p) - S(\alpha)}{a_p - \alpha}\right)_p$ est la suite (τ_p) précédente qui diverge.

Donc S n'est pas dérivable en α.
Enfin, la fonction φ_0 étant 1-périodique, les fonctions φ_n le sont aussi ainsi que S.
S n'étant dérivable nulle part sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle n'est dérivable nulle part dans $\mathbb{R}$.

En dessous le graphe de la fonction S, avec à droite son allure sur [0.4, 0.40001], donc un intervalle très petit où elle reste chaotique, contrairement aux fonctions dérivables dont la courbe paraît très lisse à petite échelle.



Quelques tracés de la fonction de Van der Waerden