Suites et séries de fonctions (corrigé niveau 1).

Convergence simple et uniforme de suites de fonctions.

1. a. Soit x fixé dans ℝ.

• si : $x = 0$, alors : $\forall\ n \in$ ℕ, $u_n(x) = 0$, et la suite numérique $(u_n(0))$ converge vers 0.

• si : $x \neq 0$, alors : $\forall\ n \in$ ℕ, $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n.x^3}{n^2.x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n}$, et la suite numérique $(u_n(x))$ converge vers 0.

Donc la suite (u_n) converge simplement sur ℝ vers la fonction nulle (notée u).

Pour n fixé si la fonction u_n est continue sur ℝ, donc : $|u_n - u| = |u_n|$, est bornée sur tout segment $[a,b]$.

Puis u_n est dérivable sur ℝ et : $\forall\ x \in$ ℝ, $u_n'(x) = \dfrac{3.n.x^2 + n^3.x^4}{(1+n^2.x^2)^2} \geq 0$, donc que u_n est croissante sur ℝ.

Ainsi, pour tout segment $[a,b]$, on a :

$\forall\ n \in$ ℕ, $\forall\ x \in [a,b]$, $|u_n(x)| \leq \max(|u_n(a)|,|u_n(b)|) \leq |u_n(a)| + |u_n(b)|$, d'où : $\sup\limits_{[a,b]}|u_n| \leq |u_n(a)| + |u_n(b)|$.

Puisque la suite majorante tend vers 0, on en déduit la convergence uniforme de (u_n) sur tout segment $[a,b]$ vers la fonction nulle.

b. Soit x fixé dans ℝ⁺.

• si : $x = 0$, alors : $\forall\ n \in$ ℕ*, $u_n(x) = 0$, et la suite numérique $(u_n(0))$ converge vers 0.

• si : $x \neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{x}{n}\right)$ tend vers 0 et $(u_n(x))$ aussi.

Donc la suite (u_n) converge simplement sur ℝ vers la fonction nulle (notée u).

Pour n entier fixé, il est clair que u_n est continue sur ℝ⁺, donc : $|u_n - u| = |u_n|$, est bornée sur tout segment $[a,b]$.

De plus : $\forall\ n \in$ ℕ*, $\forall\ x \in [a,b]$, $0 \leq u_n(x) - u(x) \leq \ln\left(1 + \dfrac{b}{n}\right) = u_n(b)$, d'où : $\sup\limits_{[a,b]}|u_n| \leq u_n(b)$.

On en déduit que la suite (u_n) converge uniformément sur tout segment vers la fonction nulle.

c. Soit n fixé dans ℝ⁺.

Si α est nul, la suite (u_n) est la suite nulle, et elle converge simplement et uniformément sur ℝ vers la fonction nulle.

• si : $x = 0$, alors : $\forall\ n \in$ ℕ, $u_n(x) = 0$, et la suite numérique $(u_n(0))$ converge vers 0.

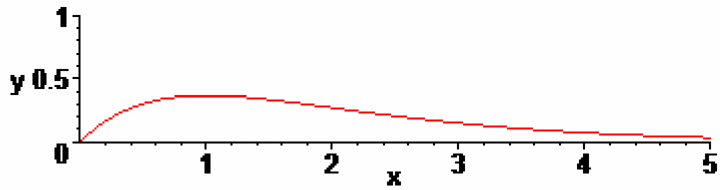
• si : $x \neq 0$, alors : $\forall\ n \in$ ℕ, $|u_n(x)| \leq e^{-n.x}$, et la suite $(u_n(x))$ converge vers 0.

La suite (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers la fonction nulle (notée u).

Puis, pour tout n fixé, la fonction u_n est continue sur ℝ⁺, donc : $|u_n - u| = |u_n|$, est bornée sur tout segment $[a,b]$.

Enfin : $\forall\ n \in$ ℕ*, $\forall\ x \in [a,b]$, $0 \leq |u_n(x) - u(x)| \leq e^{-n.x}.n.x.|\alpha| = |\alpha|.\varphi(n.x)$, avec : $\forall$ u $\geq$ 0, $\varphi(u) = u.e^{-u}$.

Or l'étude des variations de φ montre qu'elle présente un maximum en 1 où elle vaut $\dfrac{1}{e}$ et son graphe a l'allure ci-contre.



Donc :

• si : $a > 0$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall\ n \geq n_0$, $1 \leq n.a$, et dans ce cas :

$\forall\ x \in [a,b]$, $0 \leq \varphi(n.x) \leq \varphi(n.a)$, soit : $\sup\limits_{[a,b]}|u_n| \leq |\alpha|.\varphi(n.a)$,

et on en déduit que la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction nulle.

• si : $0 = a < b$, il existe un rang n_0 tel que : $\forall\ n \geq n_0$, $\dfrac{\pi}{2.|\alpha|} \leq n.b$, et : $x_n = \dfrac{\pi}{2.n.|\alpha|} \in [0,b]$.

Alors : $\forall\ n \geq n_0,\ |u_n(x_n) - u(x_n)| = |u_n(x_n)| = e^{-\frac{\pi}{2.|\alpha|}}$.

Donc : $\forall\ n \geq n_0,\ e^{-\frac{\pi}{2.|\alpha|}} \leq \sup\limits_{[a,b]} |u_n|$, et la suite ($\sup\limits_{[a,b]} |u_n|$) ne peut tendre vers 0.

Il n'y a pas alors convergence uniforme de (u_n) sur $[0,b]$ (et évidemment pas non plus sur [0,+∞)).

2. a. Si x est fixé dans ℝ, alors la suite $(u_n(x))$ converge vers 0 puisque : $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Donc la suite (u_n) converge simplement sur ℝ vers la fonction nulle.

b. Puisque : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n(-n) - u(-n)| = u_n(-n) = 1$, on en déduit que : $\sup\limits_R |u_n - u| \geq |u_n(-n) - u(-n)| = 1$,

et la suite ($\sup\limits_R |u_n - u|$) ne peut tendre vers 0.

Remarque : pour tout n, il est immédiat que $|u_n - u|$ est bornée sur ℝ.

c. Si on veut éviter la valeur qui semble poser problème, on peut proposer $[a,+\infty)$, avec $a \in \mathbb{R}$.

En effet, pour : $n \in \mathbb{N}$, tel que : $-n \leq -n_0 \leq a$,

(ce qui arriver toujours puisque $(-n)$ tend vers -∞), la fonction u_n devient décroissante et positive sur $[a,+\infty)$ comme le montre son tableau de variations, et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0) \Rightarrow (\sup\limits_{[a,+\infty)} |u_n - u| = u_n(a))$.

Donc puisque la suite $(u_n(a))$ converge vers 0 (vu avec la convergence simple), on en déduit que la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,+\infty)$ vers la fonction nulle.

3. a. Puisque, pour f fixé dans ℝ, la suite $\left(\frac{x}{n}\right)$ tend vers 0, la continuité de $\sin$ en 0 montrer que ($f_n(x)$) tend vers x^2.

Donc la suite converge simplement sur ℝ vers la fonction f définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

b. Pour un entier : $n \geq 1$, la fonction $f_n - f$ est non bornée sur ℝ : en effet, si on calcule :

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ (f_n - f)\left(n.\left(-\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right)\right) = n^2.\left(-\frac{\pi}{2} + 2.k.\pi\right)^2.e,$$

et quand k tend vers +∞, l'image obtenue tend vers +∞.

La fonction $f_n - f$ n'étant pas bornée sur ℝ, il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) vers f sur ℝ.

c. On commence par remarquer que : $\forall\ x \in [0,a]$, $|f_n(x) - f(x)| = x^2.\left|e^{-\sin\left(\frac{x}{n}\right)} - 1\right|$.

Puis : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_0$, $a \leq n.\frac{\pi}{2}$, et la fonction : $x \mapsto \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, est alors monotone sur $[-a,+a]$.

Donc : $\forall\ n \geq n_0$, $\forall\ x \in [-a,+a]$, $\left|e^{-\sin\left(\frac{x}{n}\right)} - 1\right| \leq \max((1 - e^{-\sin\left(\frac{a}{n}\right)}), (e^{\sin\left(\frac{a}{n}\right)} - 1))$.

D'où : $\forall\ n \geq n_0$, $\sup\limits_{[-a,+a]} |f_n - f| \leq \max(a.(1 - e^{-\sin\left(\frac{a}{n}\right)}), a.(e^{\sin\left(\frac{a}{n}\right)} - 1)) \leq a.(1 - e^{-\sin\left(\frac{a}{n}\right)}) + a.(e^{\sin\left(\frac{a}{n}\right)} - 1)$.

Enfin, quand n tend vers +∞, la suite majorante tend vers 0, et on en déduit la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a,+a]$ vers f.

4. a. Pour f fixé dans ℝ$^+$, et : $n \geq 1$, on a :

$$u_n(x) = \sin\left(2.n.\pi.\sqrt{1+\frac{x}{4.\pi^2.n^2}}\right) - \frac{x}{4.n.\pi} = \sin\left(2.n.\pi.\left(1+\frac{x}{2.4.\pi^2.n^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) - \frac{x}{4.n.\pi}, \text{ soit :}$$

$$u_n(x) = \sin\left(\frac{x}{4.\pi.n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{x}{4.n.\pi} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right),$$

et la suite $(u_n(x))$ tend vers 0.

Donc la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur ℝ vers la fonction nulle.

b. Puisque, pour n entier fixé dans ℕ*, la fonction : $|u_n - u| = |u_n|$, n'est pas bornée sur ℝ, la convergence de (u_n) ne peut pas être uniforme sur ℝ.

En revanche sur $[0,a]$ (pour : $a > 0$), on a :

$$\forall\ n \geq 1,\ \forall\ x \in [0,a],\ \sin(\sqrt{x+4.n^2.\pi^2}) = \sin(\sqrt{x+4.n^2.\pi^2} - 2.n.\pi).$$

Or : $0 \leq 2.n.\pi.\sqrt{1+\frac{x}{4.n^2.\pi^2}} - 2.n.\pi \leq 2.n.\pi.\left(1+\frac{x}{4.n^2.\pi^2}\right) - 2.n.\pi = \frac{x}{2.n.\pi}$,

et comme : $\forall\ u \in$ ℝ$^+$, $|\sin(u)| \leq u$, on en déduit que :

$$\forall\ n \geq 1,\ \forall\ x \in [0,a],\ |u_n(x)| \leq \frac{x}{2.n.\pi} + \frac{x}{4.n.\pi} \leq \frac{3.a}{4.n.\pi}.$$

On en déduit que u_n est bornée sur $[0,a]$ et que : $\sup_{[0,a]} |u_n| \leq \frac{3.a}{4.n.\pi}$.

Finalement, la suite (u_n) converge uniformément que $[0,a]$ vers la fonction nulle.

5. a. On commence par étudier la fonction $f : t \mapsto t - \ln(1+t)$.

Elle est définie et de classe C^1 sur ℝ$^+$ et : ∀ t ∈ ℝ$^+$, $f'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$.

Donc f est croissante sur [0,+∞) et elle atteint son minimum en 0 où elle est nulle.

On en déduit que : ∀ t ∈ ℝ$^+$, $f(t) \geq 0$, et donc : $\ln(1+t) \leq t$.

De même, on pose : ∀ t ∈ ℝ$^+$, $g(t) = \ln(1+t) - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)$, et g est de classe C^1 sur ℝ$^+$.

Puis : ∀ t ∈ ℝ$^+$, $g'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$,

donc g est également croissante sur ℝ$^+$ et étant aussi nulle en 0, on en déduit que :

∀ t ∈ ℝ$^+$, $f(t) \geq 0$, et donc : $\ln(1+t) \leq t$

b. On peut écrire :

$$\forall\ x \geq 0,\ \forall\ n \geq 1, u_n(x) = \exp\left(-n.\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(-n.\left(\frac{x}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-x+o_{+\infty}(1)),$$

et sous cette forme, il est clair que $(u_n(x))$ tend vers e^{-x}.

Donc la suite (u_n) converge simplement sur ℝ vers la fonction $u : x \mapsto e^{-x}$.

Puis : $\forall\ n \geq 1,\ \forall\ x \in$ ℝ$^+$, $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$, et : $-n.\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \geq -x$,

Enfin la fonction exponentielle étant croissante, on conclut avec : $u_n(x) \geq e^{-x} = \lim_{p\to+\infty} u_p(x) = u(x)$.

c. Soient : $a > 0$, et : $n \geq 1$.

On déduit de ce qui précède que : $\forall\ x \in [0,a]$, $\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2.n^2} \leq \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}$,

d'où avec les mêmes arguments que dans la question b. :

$\forall\ x \in [0,a],\ e^{-x} \leq u_n(x) \leq e^{-x}.e^{\frac{x^2}{2.n}}$.

D'où : $\forall\ x \in [0,a],\ 0 \leq u_n(x) - u(x) \leq e^{-x}.(e^{\frac{x^2}{2.n}} - 1) \leq e^{\frac{a^2}{2.n}} - 1$, d'où : $\sup\limits_{[0,a]} |u_n - u| \leq e^{\frac{a^2}{2.n}} - 1$.

Enfin, quand n tend vers +∞ le majorant trouvé tend vers 0 et la suite converge uniformément sur $[0,a]$.

d. Pour : $n \geq 1$ et puisque la fonction $u_n - u$ est continue sur ℝ⁺, vaut 0 en 0 et tend vers 0 en +∞, elle est bornée sur ℝ⁺.

Alors on a comme précédemment : $\forall\ x \in [0,\sqrt[4]{n}],\ 0 \leq u_n(x) - u(x) \leq e^{-x}.(e^{\frac{x^2}{2.n}} - 1) \leq e^{\frac{\sqrt{n}}{2.n}} - 1 = e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}} - 1$,

et : $\forall\ x \in [\sqrt[4]{n}, +\infty),\ 0 \leq u_n(x) - u(x) \leq u_n(x) \leq u_n(\sqrt[4]{n})$.

Donc : $\sup\limits_{R^+} |u_n - u| \leq \max(u_n(\sqrt[4]{n}), e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}} - 1) \leq u_n(\sqrt[4]{n}) + (e^{\frac{1}{2.\sqrt{n}}} - 1)$.

Enfin : $u_n(\sqrt[4]{n}) = \exp\left(-n.\ln\left(1 + \frac{\sqrt[4]{n}}{n}\right)\right) = \exp\left(-n.\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{\sqrt[4]{n}}{n}\right)\right)\right) = \exp(-\sqrt[4]{n} + o_{+\infty}(\sqrt[4]{n}))$.

Donc la suite majorante tend vers 0 et la suite converge uniformément sur ℝ⁺.

6. a. Pour : $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x \neq 0$, la suite $(\cos^n(x))$ est géométrique et : $|\cos(x)| < 1$.

Donc la suite $(\cos^n(x))$ tend vers 0 et la suite $(u_n(x))$ aussi.

Pour : $x = 0$, la suite $(u_n(x))$ est nulle et tend aussi vers 0.

Donc la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction nulle.

Puis : $\forall\ n \in$ ℕ, $\forall\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ u_n'(x) = \cos^{n-1}(x).(\cos^2(x) - n.\sin^2(x)) = \cos^{n-1}(x).(1 - (n+1).\sin^2(x))$.

Donc pour : $n \in$ ℕ, la fonction u_n est croissante de 0 à $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ puis décroissante jusqu'en $\frac{\pi}{2}$.

Comme : $\forall\ n \in$ ℕ*, $u_n(0) = u_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, et : $0 \leq u_n\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

on en déduit que : $\forall\ n \in$ ℕ*, $\sup\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} |u_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, et la convergence de (u_n)sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est uniforme.

b. On a immédiatement : $\forall\ n \in$ ℕ, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t).dt = [-\cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

c. La suite (v_n) converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers 0.

En effet, pour : $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ x \neq 0$, la suite $((n+1).\cos^n(x))$ tend vers 0 par le théorème des croissances comparées, donc la suite $(v_n(x))$ aussi.

Et la suite $(v_n(0))$ est toujours la suite nulle.

En revanche la suite (v_n) ne converge pas uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers 0 car sinon on aurait :

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v_n(t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n\to+\infty} v_n(t).dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0.dt = 0.$$

7. a. Soit x fixé dans [0,1].

Si x est nul, alors la suite $(u_n(0))$ est constante nulle donc tend vers 0.

Si x est non nul, alors : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ n \geq n_0,\ \dfrac{1}{n} < x$, car la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 0.

Donc : $\forall\ n \geq n_0,\ u_n(x) = 0$.

Donc dans ce cas la suite est $(u_n(x))$ est constante nulle à partir d'un certain rang donc elle tend vers 0.

Finalement, la suite converge simplement sur [0,1] vers la fonction nulle.

b. On a immédiatement : $\forall\ n \geq 1,\ \int_0^1 u_n(t).dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2.t.(1-n.t).dt = \left[\dfrac{n^2.t^2}{2} - \dfrac{n^3.t^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{6}$.

Donc la suite (u_n) ne converge pas uniformément sur [0,1] sinon on aurait :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t).dt = \int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t).dt = 0$, ce qui n'est pas le cas.

c. Enfin, sur $[a,1]$ la convergence est uniforme puisque : $\exists\ n_a \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ n \geq n_a,\ \dfrac{1}{n} < a$.

Donc : $\forall\ n \geq n_a,\ \forall\ x \in [a,1],\ u_n(x) = u(x) = 0$, et : $\sup\limits_{[a,1]} |u_n - u| = 0$, d'où le résultat.

8. a. Soit x fixé dans [-1,+1].

Il est immédiat que $(u_n(x))$ tend vers $|x|$.

Donc la suite (u_n) converge simplement sur [-1,+1] vers la fonction valeur absolue.

b. Les fonctions u_n sont-elles C^1 sur [-1,+1] pour tout entier : $n \geq 1$, car : $x \mapsto x^2 + \dfrac{1}{n^2}$, est de classe C^1 de [-1,+1] dans $\mathbb{R}^{+*}$, et la fonction $\sqrt{\ }$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction limite u, à savoir la valeur absolue, n'est évidemment pas de classe C^1 sur [-1,+1].

c. La suite des dérivées ne converge donc pas uniformément sur [-1,+1].

On peut aussi en conclure que la convergence uniforme de la suite (u_n) sur [-1,+1] ne suffit pas pour que la limite soit de classe C^1, même si toutes les fonctions u_n le sont.

Convergence simple, uniforme ou normale de séries de fonctions.

9. a. Pour x fixé dans $\mathbb{R}$, on constate que :

- si : $x > 0$, la série diverge grossièrement.
- si : $x \leq 0$, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n(x)| = \dfrac{e^{n.x}}{n^2 - n + 1} \leq \dfrac{1}{n^2 - n + 1}$, et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ converge.

On en déduit la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^-$.

Pour la convergence normale sur $\mathbb{R}^-$, on remarque que l'inégalité précédente donne :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \sup\limits_{x\leq 0} |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2 - n + 1} = \alpha_n$ (il y a même égalité avec la valeur en 0).

On en déduit la convergence normale de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}^-$ (la convergence de $\sum \alpha_n$ suffit).

b. Soit x fixé dans $\mathbb{R}^+$.

Alors : $u_n(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$, et cette suite (à termes positifs) converge car $n^{\frac{3}{2}}.\dfrac{\ln(n)}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ tend vers 0 en $+\infty$.

Donc la série converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Soit maintenant $[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Alors : $\forall$ x $\in [a,b],\ 0 \leq |u_n(x)| \leq \dfrac{\ln(n+b)}{n^2 + a^2}$, et puisque la série majorante converge (même argument qu'au-dessus), il y a bien convergence normale de la série sur $[a,b]$.

c. Pour x réel fixé, on distingue deux cas :

- si : $x=0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n(0)$ étant la série nulle, elle converge.
- si : $x\neq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ converge car : $n^2.u_n(x)=n^2.x.e^{-n.x^2}$, tend vers 0 en $+\infty$.

Il y a donc convergence simple de la série sur ℝ.

Chaque fonction u_n est impaire et u_n atteint un maximum sur ℝ$^+$ (à l'aide de la dérivée) en $\dfrac{1}{2.\sqrt{n}}$.

On en déduit que : $\sup_R |u_n| \leq u_n(\frac{1}{2.\sqrt{n}}) = \frac{1}{2.\sqrt[4]{e}}.\frac{1}{\sqrt{n}}$, et la série des sup divergeant, la série ne converge pas normalement sur ℝ.

Si $[a,b]$ est un segment contenant 0 (par exemple $[0,b]$, avec : $b>0$, les autres cas du même type se traitant de façon similaire), alors : $0\leq \frac{1}{2.\sqrt{n}} \leq b$, d'où : $\sup_{[0,b]} |u_n| \geq u_n(\frac{1}{2.\sqrt{n}}) = \frac{1}{2.\sqrt[4]{e}}.\frac{1}{\sqrt{n}}$,

et la série de fonctions ne converge par normalement sur $[0,b]$, $\sum \sup_{[0,b]} |u_n|$ étant divergente.

Si $[a,b]$ est un segment qui évite 0 (par exemple $[a,b]$, avec : $0<a<b$, les autres cas du même type se traitant de façon similaire), alors : $\exists\ n_0 \in$ ℕ, $\forall\ n\geq n_0$, $\frac{1}{2.\sqrt{n}} \leq a$.

De plus, on a alors : $\forall\ n\geq n_0$, u_n décroissante sur $[a,b]$, et : $\sup_{[a,b]} |u_n| = u_n(a)$.

Or $\sum_{n\geq n_0} |u_n(a)|$ converge (voir convergence simple) donc la série converge bien, donc il y a convergence normale de la série sur $[a,b]$.

d. Pour x fixé dans [0,1], on a :

- si : $x\neq 1$, $\forall\ n \in$ ℕ, $0\leq u_n(x)\leq x^n$, et la série converge,
- si : $x=1$, $\forall\ n \in$ ℕ*, $0\leq u_n(1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, et la série diverge.

Il y a donc convergence simple de la série sur [0,1[.

Sur [0,1[, il n'y a pas convergence normale de la série puisque : $\forall\ n\geq 1$, $\sup_{[0,1[} |u_n| \geq \lim_{x\to 1} u_n(x) = \frac{1}{1+n}$.

Sur $[0,a]$, avec : $0<a<1$, il y a convergence normale, car : $\forall\ x \in [0,a]$, $0\leq u_n(x)\leq a^n$, et la série $\sum a^n$ est convergente.

10. a. Pour x réel fixé, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ est alternée et vérifie le critère spécial des séries alternées.

En effet, les termes généraux en valeur absolue constitue bien une suite décroissante qui tend vers 0.
Donc il y convergence simple de la série de fonctions sur ℝ.
De plus, toujours pour x fixé, le critère spécial montre encore que :

$\forall\ x \in$ ℝ, $\forall\ n \in$ ℕ*, $|R_n(x)| = |S(x)-S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$,

où on a noté S_n la somme partielle d'ordre n de la série, et S sa somme.

Donc pour n fixé dans ℕ, on a : $\forall\ x \in$ ℝ, $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$, d'où : $\sup_R |S-S_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

On en déduit que la série de fonctions converge uniformément sur ℝ.

b. Si I est un intervalle de ℝ, la série ne peut converger normalement sur I, car sinon pour tout élément x de I, la série $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ convergerait absolument.

Or cette dernière série est toujours divergente et la série de fonctions ne converge donc normalement sur aucun intervalle de ℝ.

Propriétés d'une somme de série de fonctions.

11. a. Notons : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{\cos(n.\pi.x)}{n^3+1}$ (qui dont bien toutes définies sur ℝ).

Il est immédiat que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur ℝ, puisque :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{n^3+1}$, et la série $\sum \dfrac{1}{n^3+1}$ converge.

Donc la série de fonctions converge simplement sur ℝ, et f est définie sur ℝ.

b. Pour x réel, on a : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = u_n(-x)$, donc en sommant ces égalités pour n variant de 0 à +∞ (les deux séries convergeant), on en déduit que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, et f est paire.

On aurait pu aussi plu simplement dire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$.

c. De même on constate que f est 1-périodique (1 est une période **commune** à toutes les fonctions u_n) :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$.

12. a. Pour : $n \in \mathbb{N}$, et : $x \in \mathbb{R}$, posons : .

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| = \dfrac{|\sin(3^n.x)|}{3^n} \le \dfrac{1}{3^n} = \alpha_n$,

et comme la série $\sum_{n\ge 0} \alpha_n$ converge, la série de fonctions $\sum_{n\ge 0} u_n$ converge normalement sur ℝ et f est définie sur ℝ.

Comme de plus, toutes les fonctions u_n sont continues sur ℝ, f est de plus continue sur ℝ.

b. Pour : $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(3.x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(3^{n+1}.x)}{3^n} = 3.\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(3^{n+1}.x)}{3^{n+1}} = 3.\sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(3^p.x)}{3^p} = 3.(f(x) - \sin(x))$.

En particulier : $\forall\ x \ne 0$, $\dfrac{f(3.x) - f(0)}{3.x - 0} = \dfrac{f(3.x)}{3.x} = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} - \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$.

Si f était dérivable en 0, on aurait, en faisant tendre x vers 0 : $f'(0) = f'(0) - \sin'(0) = f'(0) - 1$, ce qui est impossible.

Donc que f n'est pas dérivable en 0.

13. Notons M un majorant de la suite $(|a_n|)$, et posons : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u_n(x) = a_n.e^{-n.x}$.

Alors : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| \le M.(e^{-.x})^n$,

et le majorant est le terme général d'une série géométrique convergente.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus, toutes les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u_n'(x) = -n.a_n.e^{-n.x}$.

Enfin, la série $\sum u_n'$ converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty)$ avec : $0 < a$.

En effet :

- $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|u_n'(x)| \le M.n.e^{-.a.n} = \beta_n$, et :
- $\lim_{n\to+\infty} n^2.\beta_n = 0$, donc : $\beta_n = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, et la série $\sum \beta_n$ converge.

Donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on obtient sa dérivée sur $\mathbb{R}^{+*}$ en dérivant terme à terme la série.

14. a. Il est immédiat que $\sum u_n$ converge normalement sur ℝ, car : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \le \dfrac{1}{n!}$.

Donc elle converge uniformément et simplement sur ℝ.

b. Le même argument montre que $\sum v_n$ converge aussi normalement donc uniformément sur ℝ.

c. La fonction σ est de classe C^∞ sur ℝ car :

- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, v_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$,
- pour tout : $p \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum v_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car :

  $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $v_n^{(p)}(x) = \dfrac{n^p}{n!}.\cos(n.x + p.\dfrac{\pi}{2})$, et : $\left|v_n^{(p)}(x)\right| \leq \dfrac{n^p}{n!} = \alpha_{p,n}$.

  Or on a plus : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2.\alpha_{p,n} = 0$, par le théorème des croissances comparées et : $\alpha_{p,n} = o_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, ce qui garantit bien la convergence de $\sum\limits_{n\geq0}\alpha_{p,n}$ et la convergence normale de $\sum v_n^{(p)}$ sur $\mathbb{R}$.

d. On remarque ensuite que : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $\cos^3(t) = \dfrac{1}{4}.(\cos(3.t) + 3.\cos(t))$.

Donc : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{4}.(v_n(3.x) + v_n(x))$, puis en sommant : $S(x) = \dfrac{1}{4}.(\sigma(3.x) + \sigma(x))$.

e. Il est alors immédiat que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Etude de sommes de séries de fonctions (limite en un point, tracé de courbes…).

15. a. On va noter : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall$ t $\in \mathbb{R}^{+*}$, $u_n(t) = a_n.e^{i.n.t}$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $|u_n(t)| = |a_n|$, et la série $\sum\limits_{n\geq0}|a_n|$ converge.

Donc la série $\sum\limits_{n\geq0}u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Comme de plus, toutes les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, donc S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Notons cette fois : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall$ t $\in \mathbb{R}^{+*}$, $v_{p,n}(t) = a_n.e^{i.n.t}.e^{-i.p.t}$.

Alors pour p fixé, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq0}v_{p,n}$ converge encore normalement sur $\mathbb{R}$ puisque :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $|v_{p,n}(t)| = |a_n|$.

Donc on peut intervertir série et intégrale et :

$$I_p = \int_0^{2.\pi} S(t).e^{-i.p.t}.dt = \int_0^{2.\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} v_{p,n}(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2.\pi} v_{p,n}(t).dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.\int_0^{2.\pi} e^{i.(n-p).t}.dt.$$

De plus :

- si : $n \neq p$, alors : $\displaystyle\int_0^{2.\pi} e^{i.(n-p).t}.dt = \left[\frac{e^{i.(n-p).t}}{i.(n-p)}\right]_0^{2.\pi} = 0$,
- si : $n = p$, alors : $\displaystyle\int_0^{2.\pi} e^{i.(n-p).t}.dt = \int_0^{2.\pi} dt = 2.\pi$.

Finalement : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $I_p = 2.\pi.a_p$.

16. a. La fonction sous l'intégrale est définie et continue sur [0,2.π], comme quotient de fonctions définie et continues sur [0,2.π], la seconde ne s'annulant pas sur [0,2.π].

Puis : $\forall$ θ $\in$ [0,2.π], $\dfrac{e^{i.n.\theta}}{2 + e^{i.\theta}} = S(\theta) = \dfrac{e^{i.n.\theta}}{2}.\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{e^{i.\theta}}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k.\frac{e^{i.(k+n).\theta}}{2^{k+1}}$,

l'écriture sous forme de série géométrique étant garantie par le fait que : $\forall$ θ $\in$ [0,2.π], $\left|-\dfrac{e^{i.\theta}}{2}\right| < 1$.

b. Puisque : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall$ θ $\in$ [0,2.π], on a : $\left|(-1)^k.\dfrac{e^{i.(k+n).\theta}}{2^{k+1}}\right| \leq \dfrac{1}{2^{k+1}}$, on en déduit la convergence normale de cette série de fonctions sur [0,2.π].

c. On peut donc écrire, en intervertissant les symboles : $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^{2.\pi}(-1)^k.\frac{e^{i.(k+n).\theta}}{2^{k+1}}.d\theta$.

On calcule alors : $\forall\ n \in \mathbb{Z}$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2.\pi}(-1)^k.\frac{e^{i.(k+n).\theta}}{2^{k+1}}.d\theta = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}.\int_0^{2.\pi} e^{i.(k+n).\theta}.d\theta$.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{Z}$,

- si : $k+n \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{2.\pi} e^{i.(k+n).\theta}.d\theta = \left[\frac{e^{i.(k+n).\theta}}{i.(k+n)}\right]_0^{2.\pi} = 0$,
- si : $k+n = 0$, $\displaystyle\int_0^{2.\pi} e^{i.(k+n).\theta}.d\theta = 2.\pi$.

Conclusion :

- si : $n > 0$, alors : $I_n = 0$,
- si : $n \leq 0$, alors : $I_n = \dfrac{(-1)^{-n}}{2^{-n+1}}.2.\pi = (-2)^n.\pi$.

17. a. Si : $0 \leq x < 1$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n} = 1$, et la série définissant $f(x)$ diverge grossièrement.

Si : $x = 1$, alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{2}$, et il y a encore divergence grossière.

Si : $x > 1$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{x^n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$.

La série majorante étant géométrique et convergente, la série définissant $f(x)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

On conclut que : $\mathcal{D}_f$ =]1,+∞).

b. Si on note : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x > 1$, $u_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$, alors :

- toutes les fonctions u_n sont continues sur]1,+∞),
- $\forall\ a > 1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [a,+\infty)$, $|u_n(x)| \leq \left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \alpha_n$,
- $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ converge, ce qui entraîne la convergence normale de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ sur $[a,+\infty)$.

Donc f est continue sur]1,+∞).

c. Puisque toutes les fonctions puissances (à exposant positif) sont croissantes sur $\mathbb{R}^+$, les fonctions u_n sont décroissantes sur]1,+∞) et comme somme (même infinie), f est décroissante.

Donc f admet une limite (finie ou infinie) en 1^+.

On peut également écrire : $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\forall\ x > 1$, $f(x) \geq \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{1+x^n} = S_N(x)$.

Et comme : $\forall\ N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} S_N(x) = \frac{N+1}{2}$, on aurait : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) \geq \frac{N+1}{2}$, si cette limite était finie.

Comme ça ne peut pas se produire, on conclut que : $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

18. a. On commence par poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{x}{n.(1+n.x^2)}$.

Pour réel fixé, on distingue deux cas :

- si : $x = 0$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(0)$ est la série nulle et converge (de somme 0),
- si : $x \neq 0$, alors $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2.|x|}$, et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, et : $\mathcal{D}_S = \mathbb{R}$.

b. On constate immédiatement que : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ S(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = S(x)$, et S est impaire.

Puis : $S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(1+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{1+n}\right] = 1$, comme somme d'une série télescopique convergente.

c. On constate que :

- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C[1] sur $\mathbb{R}^*$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n'(x) = \frac{1-n.x^2}{n.(1+n.x^2)^2}$,
- la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc sur tout segment : $[a,b] \subset \mathbb{R}^*$,
- la série $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment : $[a,b] \subset \mathbb{R}^*$, car :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in [a,b],\ |u_n'(x)| \leq \frac{1+n.b^2}{n.(1+n.a^2)^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{b^2}{n^2.a^4}$, et la série majorante converge.

Donc S est de classe C[1] sur $\mathbb{R}^*$, et : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-n.x^2}{n.(1+n.x^2)^2}$.

d. Utilisons un argument pour une double limite :

- la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty)$ car :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \geq 1,\ |u_n(x)| \leq \frac{x}{n^2.x^2} = \frac{1}{n^2.x} \leq \frac{1}{n^2}$,

- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, u_n a une limite finie en $+\infty$ égale à : $L_n = \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$,
- la série des limites en $+\infty$ est convergente.

On peut alors écrire : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} L_n = 0$.

e. Puisque, pour : $x > 0$, la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n.(1+n.x^2)}$, est à termes positifs et qu'elle converge, toute somme partielle de cette série est inférieure à sa somme, d'où le résultat demandé.

f. Etudions, pour : $x > 0$, le taux d'accroissement en 0 : $T(x) = \frac{S(x)-S(0)}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(1+n.x^2)}$.

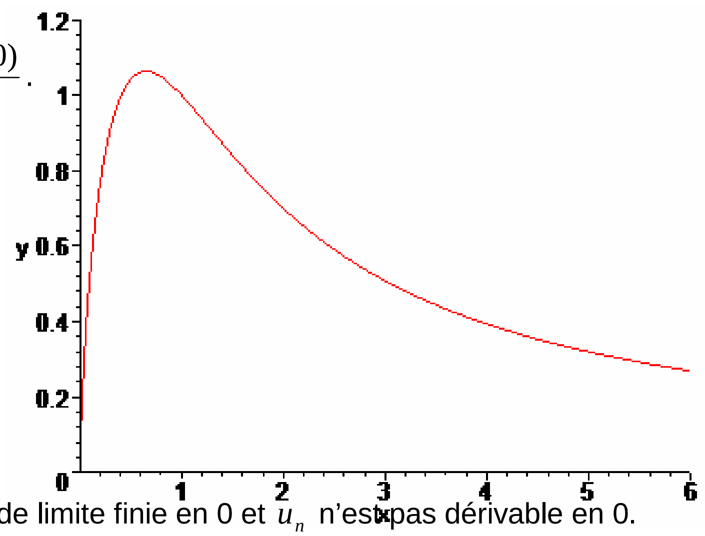
On constate que :

$\forall\ x > 0,\ \forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n.(1+n.x^2)} \leq \frac{S(x)-S(0)}{x}$.

Si ce taux d'accroissement avait une limite finie L en 0, alors en passant à la limite en 0 dans l'inégalité précédente, on aurait :

$\forall\ N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq L$.

L serait donc supérieure à toutes les sommes partielles de la série harmonique, ce qui est impossible puisque la série harmonique diverge vers $+\infty$.



Donc le taux d'accroissement de S en 0 n'a pas de limite finie en 0 et u_n n'est pas dérivable en 0.

On peut pour finir remarquer que T, comme somme de fonctions décroissantes (somme infinie mais convergente) est elle-même décroissante, donc en 0^+, elle tend vers une limite finie ou $+\infty$.
Mais puisque T n'a pas de limite finie en 0, T tend vers $+\infty$ en 0^+ (mais aussi en 0^- par imparité).
Donc la courbe présente de S présente bien une tangente verticale en 0.

g. On trouvera plus haut le graphe de S, conforme aux résultats obtenus dans les questions précédentes.

19\. a. On commence par définir : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ u_n(x) = \frac{n.x^{n-1}}{1+x^n}$.

Soit donc x un réel positif.

• si : $x=0$, $S(x)$ existe comme somme de la série nulle,

• si : $0<x<1$, on a : $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} n.x^{n-1}$, et puisque $n^2.n.x^{n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers +∞, la série numérique correspondante est absolument convergente,

• si : $x=1$, on a : ∀ $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1)=\dfrac{n}{2}$, et la série correspondante diverge grossièrement,

• si : $1<x$, on a : $|u_n(x)| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n}{x}$, et la série correspondante diverge à nouveau grossièrement.

Donc la série de fonctions converge simplement sur [0,1[et S est définie sur [0,1[.

b. On commence par constater que : $\forall\ n\geq 2$, $\forall\ x \in [0,1[$, $u_n'(x)=\dfrac{x^{n-2}.(n-1-x^n)}{(1+x^n)^2}\geq 0$.

Donc φ : $x\mapsto S(x)-\dfrac{1}{1+x}=S(x)-u_1(x)$, est croissante comme somme (convergente) de fonctions croissantes sur [0,1[.

On en déduit que φ admet une limite (finie ou infinie) en 1, et comme u_1 admet pour limite $\dfrac{1}{2}$ en 1, S admet également une limite (finie ou infinie) en 1.

On va montrer que S ne peut avoir en 1 une limite finie.

Pour cela, supposons que ce soit le cas, à savoir : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x)=L$.

Alors on constate qu'on a aussi : $\forall\ x \in [0,1[$, $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n.x^{n-1}}{1+x^n}\geq\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{n.x^{n-1}}{1+x^n}$.

Donc toutes les fonctions apparaissant au-dessus ayant une limite finie en 1^-, on aurait :

$$L=\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x)\geq \lim_{\substack{x\to 1\\ <}}\sum_{n=1}^{N}\frac{n.x^{n-1}}{1+x^n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2}=\frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{N}n.$$

Or c'est impossible puisque la série harmonique diverge vers +∞.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x)=+\infty$.

20. a. On commence par poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{n}.e^{-x\sqrt{n}}$.

Soit : $x \in \mathbb{R}$.

• si : $x>0$, on constate que : $|n^2.u_n(x)|=(\sqrt{n})^2.e^{-x.\sqrt{n}}$, tend vers 0 en +∞, du fait du théorème des croissances comparées et la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n(x)$ converge absolument,

• si : $x=0$, la série converge par le critère spécial des séries alternées (série harmonique alternée),

• si : $x<0$, la série diverge grossièrement, toujours avec le théorème des croissances comparées.

Donc la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}^+$, et : $\mathscr{D}_S=\mathbb{R}^+$.

b. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et : $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $u_n'(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.e^{-x\sqrt{n}}$.

Pour x dans $\mathbb{R}^+$, on constate alors que la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n'(x)$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

En effet, la suite des termes généraux est bien alternée et décroît en valeur absolue (comme produit de suites positives décroissantes) vers 0.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, $|R_n(x)|=\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k'(x)\right|\leq|u_{n+1}'(x)|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}.e^{-x\sqrt{n+1}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

On en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{R^+}|R_n|\leq\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, et la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

En résumé :

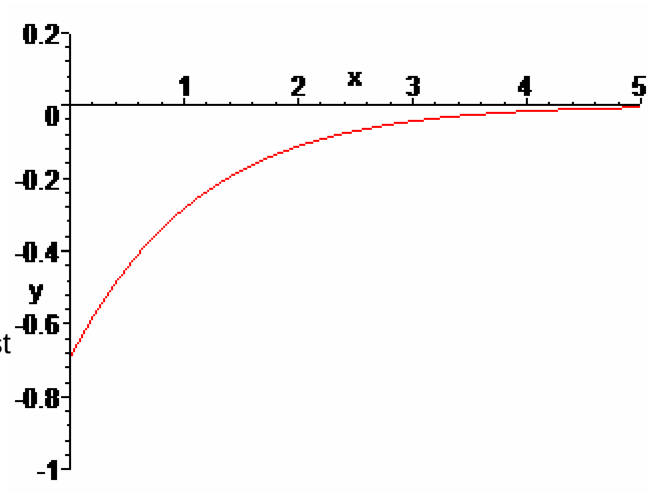
• ∀ $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$,

• la série $\sum u_n$ converge simplement sur ℝ⁺,

• la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur ℝ⁺,

donc S est de classe C¹ sur ℝ⁺ et :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}.e^{-x\sqrt{n}}$$



c. On constate de plus que pour tout : $x \in \mathbb{R}^+$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n'(x)$ vérifie aussi le critère spécial des séries alternées et en particulier la somme de cette série est du signe du premier terme, donc positive.

S est donc croissante ℝ⁺ et négative sur ℝ⁺ (même argument pour la somme $S(x)$ que pour $S'(x)$).

Enfin :

• $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, u_n a pour limite 0 en +∞,

• la série de ces limites est évidemment convergente,

• la série de fonctions converge uniformément sur ℝ⁺ (démonstration identique à celle faite pour la série des dérivées),

donc : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$.

On en déduit l'allure du graphe de S (voir plus haut).

21. a. Pour : $x \leq 0$, la série définissant $S(x)$ diverge grossièrement.

Pour : $x > 0$, on a avec le théorème des croissances comparées :

$\lim_{n\to+\infty} n^2.e^{-x\sqrt{n}} = 0$, car : $n^2.e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n}+2.\ln(n)}$, et la série converge.

Donc : D = ℝ⁺*

b. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$.

Toutes les fonctions u_n sont continues sur ℝ⁺* et :

$\forall\ a > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in [a,+\infty)$, $|u_n(x)| \leq e^{-a\sqrt{n}} = \alpha_n$,

et la convergence de $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ entraîne la convergence normale de $\sum_{n\geq 0} u_n$ sur $[a,+\infty)$.

Donc S est continue sur]0,+∞).

De plus, toutes les fonctions u_n sont décroissantes sur ℝ⁺*, donc comme somme (même infinie) de fonctions décroissantes, S est également décroissante sur]0,+∞).

c. Chaque fonction u_n a une limite finie en +∞ (nulle pour : $n \geq 1$, et égale à 1 pour : $n = 0$).

De plus la série des limites converge et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur [1,+∞).

Donc : $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1$.

d. Pour : $x > 0$, la fonctions exponentielle étant croissante, on peut écrire :

$\forall\ n \geq 0$, $\forall\ t \in [n, n+1]$, $e^{-x\sqrt{n+1}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{n}}$, et donc : $e^{-x\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}.dt \leq e^{-x\sqrt{n}}$.

Toutes les quantités qui apparaissent étant convergentes, on somme pour n variant de 0 à +∞, et :

$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n+1}} \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}.dt \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$, ou encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}} = S(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}.dt \leq S(x)$.

Avec le changement de variable croissant et de classe C¹ sur ℝ⁺* : $u = x.\sqrt{t}$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}.dt = \frac{2}{x^2}.\int_0^{+\infty} u.e^{-u}.du,$$

puis classiquement par intégration par partie (la partie intégrée a une limite finie en +∞) :

$$\int_0^{+\infty} u.e^{-u}.du = [-u.e^{-u}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u}.du = 0 + [-e^{-u}]_0^{+\infty} = 1,$$

soit : $\forall\ x > 0$, $\frac{2}{x^2} \leq S(x) \leq \frac{2}{x^2} + 1$, et finalement avec le théorème des gendarmes : $S(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$.

22. a. On montre immédiatement par récurrence que les fonctions u_n sont définies et continues sur [0,1].

Si on étudie la fonction : $t \mapsto t - t^2$, sur [0,1], on vérifie que : $\forall$ t $\in$ [0,1], $0 \leq t - t^2 \leq \frac{1}{4}$,

son maximum étant atteint en $\frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$.

Pour le résultat suivant, on le démontre également par récurrence :

- $\sup\limits_{[0,\frac{1}{4}]} |u_0| = 1 = \frac{1}{4^0}$.
- et si on suppose le résultat vrai pour un entier : $n \geq 0$, donné alors :

$$\forall\ x \in [0,\frac{1}{4}],\ |u_{n+1}(x)| = \left|\int_0^x u_n(t-t^2).dt\right| \leq \int_0^x |u_n(t-t^2)|.dt \leq x.\sup_{[0,\frac{1}{4}]} |u_n| \leq \frac{1}{4}.\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}},$$

d'où : $\sup\limits_{[0,\frac{1}{4}]} |u_{n+1}| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$, ce qui termine la récurrence.

b. On en déduit que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in$ [0,1], $\forall$ t $\in [0, x]$, $0 \leq t - t^2 \leq \frac{1}{4}$,

donc : $|u_n(x)| = x.\sup\limits_{[0,\frac{1}{4}]} |u_n| \leq \frac{1}{4^n}$,

et on en déduit bien la convergence normale de la série de fonctions sur [0,1].

Fonction ζ de Riemann.

23. a. L'étude des séries de Riemann montre que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, ($\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ converge) $\Leftrightarrow$ ($x > 1$),

d'où : $\mathscr{D}_\zeta$ =]1,+∞).

b. Notons : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x > 1$, $u_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x.\ln(n)}$.

Alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ p \geq 1$, u_n est de classe C^p sur]1,+∞), et :

$$\forall\ x > 1,\ u_n^{(p)}(x) = \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

Puis, pour : $a > 1$, on a :

$$\forall\ p \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [a,+\infty),\ \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leq \frac{(\ln(n))^p}{n^a} = \frac{1}{n^c}.\frac{(\ln(n))^p}{n^{a-c}} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^c}\right),$$

avec : $1 < c < a$, du fait du théorème des croissances comparées.

Donc $\sum\limits_{n\geq 1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a,+\infty)$, pour tout : $a > 1$

On en déduit que ζ est de classe C^∞ sur $\mathscr{D}_\zeta$.

De plus : $\forall\ p \geq 0$, $\forall\ x > 1$, $\zeta^{(p)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}$.

c. ζ est de classe C^2 sur]1,+∞), et :
$\forall\ x > 1$, $\zeta''(x) \geq 0$, comme somme d'une série à termes positifs.

d. La série définissant ζ converge normalement sur [2,+∞), chaque fonction u_n a une limite finie en +∞, nulle pour : $n \geq 2$, égale à 1 pour : $n = 1$, et la série de ces limites converge.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}u_n(x)=1$.

La dérivée de ζ étant négative, ζ est décroissante sur]1,+∞), donc ζ admet une limite (finie ou infinie) en 1 qu'on va noter L.

On peut ensuite écrire : $\forall\ N\in\mathbb{N}^*$, $\forall\ x>1$, $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}\geq\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}$.

Si L était réelle, en passant à la limite en 1, on aurait : $L\geq\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$.

Or la série harmonique diverge vers +∞, donc L ne peut être réelle et : $\lim\limits_{x\to1}\zeta(x)=+\infty$.

La courbe représentative de ζ présente deux asymptotes, l'une verticale en 1, l'autre horizontale en +∞.