

Séries Numériques (corrigé niveau 2).

Séries télescopiques.

27. a. On peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \frac{1+u_n-1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n)} = \frac{1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_{n-1})} - \frac{1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n)},$$

avec le cas particulier : $v_0 = \frac{1+u_0-1}{(1+u_0)} = 1 - \frac{1}{1+u_0}$.

On peut ainsi poser : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{1}{(1+u_0).(1+u_1)...(1+u_{n-1})}$, et : $a_0 = 1$,

ce qui donne bien : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = a_n - a_{n+1}$.

b. La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est équivalente à celle de la suite (a_n) .

Or cette suite est positive et décroissante puisque (u_n) est à termes positifs, donc convergente.

La série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est donc convergente.

c. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$ puisque $\sum_{n \geq 0} u_n$ est à termes positifs.

On a également : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n) \geq u_0 + \dots + u_n$,

car en développant le produit on voit apparaître la quantité minorante et d'autres termes positifs.

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1+u_0).(1+u_1)...(1+u_n) = +\infty$, et (a_n) tend vers 0.

Donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a_0 = 1$.

28. Notons tout d'abord que la suite (u_n) est toujours correctement définie et à termes positifs.

a. On constate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot (u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2 + 2u_n \cdot a_n}) \leq \frac{1}{2} \cdot (u_n + u_n + a_n) = u_n + \frac{1}{2} a_n, \text{ et :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \frac{1}{2} \cdot (u_n + \sqrt{u_n^2}) \leq \frac{1}{2} \cdot (u_n + u_n) = u_n, \text{ d'où :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{2} a_n.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge donc la suite (u_n) aussi.

b. La suite (u_n) proposée est strictement croissante, à premier terme strictement positif et convergente

(suite des sommes partielles d'une série de Riemann convergente) de somme : $L = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} > 0$.

Par ailleurs, on voudrait une suite (a_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2})$.

Il suffit pour cela que : $\forall n \in \mathbb{N}, (2u_{n+1} - u_n)^2 - u_n^2 = a_n^2 = 4u_{n+1}^2 - 4u_{n+1}u_n = 4u_{n+1} \cdot (u_{n+1} - u_n)$,

et donc on va poser : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2 \cdot \sqrt{u_{n+1} \cdot (u_{n+1} - u_n)}$.

La suite (a_n) est ainsi bien définie car la suite (u_n) est croissante et à termes positifs et on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n^2}).$$

Mais par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2 \cdot \sqrt{u_{n+1} \cdot (u_{n+1} - u_n)} \underset{+\infty}{\sim} 2 \cdot \sqrt{L \cdot (u_{n+1} - u_n)} = \frac{2 \cdot L}{n}$,

et la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

La réciproque de l'implication de la question a n'est donc pas vraie.

29. a. Il est immédiat que la suite (u_n) est bien définie et par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$.

En effet, ce résultat est vrai pour u_0 et s'il est vrai pour un entier : $n \geq 0$, alors :

$$u_n^2 \in]0,1[, \text{ et donc : } u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (u_n + u_n^2) \in]0,1[.$$

$$\text{Puis : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \cdot (u_n^2 - u_n) = \frac{1}{2} \cdot u_n \cdot (u_n - 1) < 0 ,$$

et la suite est strictement décroissante.

Etant de plus minorée par 0, elle converge vers une limite L .

$$\text{Enfin, } L \text{ vérifie : } L = \frac{1}{2} \cdot (L + L^2), \text{ soit : } L = L^2, \text{ et } L \text{ vaut } 0 \text{ ou } 1.$$

Mais (u_n) étant à termes dans $]0,1[$ et strictement décroissante, on en déduit que : $L = 0$.

$$\text{b. Puisque } (u_n) \text{ tend vers } 0, \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \cdot u_n \cdot (u_n - 1) \sim_{+\infty} -\frac{u_n}{2} .$$

Or la série télescopique $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge car la suite (u_n) converge.

Par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n \geq 0} -\frac{u_n}{2}$ converge et donc aussi la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

30. a. Puisque la fonction f définie par : $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, f(x) = \sin(x) - x$, a une dérivée strictement négative,

est donc strictement décroissante et nulle en 0, elle reste strictement négative sur l'intervalle.

Donc la suite (u_n) est décroissante et étant minorée par 0, elle converge.

Enfin sa limite L est dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et comme elle ne peut pas être dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, elle est nulle et (u_n)

converge vers 0.

b. La série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est télescopique et converge car la suite (u_n) converge.

$$\text{De plus : } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n = -\frac{u_n^3}{6} + o_{+\infty}(u_n^3) \sim_{+\infty} -\frac{u_n^3}{6} .$$

Donc par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n \geq 0} -\frac{u_n^3}{6}$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} u_n^3$ aussi.

c. La série télescopique $\sum_{n \geq 0} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ est tout d'abord bien définie (puisque (u_n) est à termes dans

$]0,1[$) et divergente car la suite (u_n) tend vers 0 donc $(\ln(u_n))$ tend vers $-\infty$.

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o_{+\infty}(u_n^2)\right) = -\frac{u_n^2}{6} + o_{+\infty}(u_n^2) \sim_{+\infty} -\frac{u_n^2}{6} .$$

Donc par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum_{n \geq 0} -\frac{u_n^2}{6}$ diverge et la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ aussi.

31. On constate immédiatement que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n w_k = \sum_{k=0}^n \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{dt}{t} = \int_{u_0}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t} = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_0)$.

Donc la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ diverge (vers $+\infty$).

Par ailleurs : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{t} \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{dt}{u_n} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = v_n$.

Donc par minoration de série à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

32. • Pour la première série, on peut écrire :

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp\left(-n^2 \cdot \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n^2 \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n^2 \cdot \left(\frac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-n + o_{+\infty}(n)).$$

Donc : $n^2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \exp(-n + o_{+\infty}(n) + 2 \cdot \ln(n)) = \exp(-n + o_{+\infty}(n))$,

qui tend vers 0 en $+\infty$.

Donc la série $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

• Pour la deuxième, on écrit : $(n^a + 1)^{\frac{1}{a}} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{n^a}\right)^{\frac{1}{a}} = n \cdot \left(1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n^a} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) = n + \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n^{a-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right)$.

On distingue alors plusieurs cas :

si : $a = b$, la série est la série nulle et converge,

si : $a > b$, on a : $u_n = (n^a + 1)^{\frac{1}{a}} - (n^b + 1)^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n^{a-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{a-1}}\right) - \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{n^{b-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{b-1}}\right) \sim -\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{n^{b-1}}$.

Par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si : $b - 1 > 1$, soit : $b > 2$.

si : $a < b$, on a de même : $u_n \sim \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n^{a-1}}$, et la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si : $a > 2$.

Conclusion : la série converge si et seulement si : $(a = b)$ ou $(a > 2, \text{ et } b > 2)$.

• Pour la troisième, on réécrit le terme général :

$$\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \exp(-\ln(n) \cdot \ln(\ln(n))) = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}.$$

Et puisque $(\ln(\ln(n)))$ tend vers $+\infty$, il existe un rang n_0 à partir duquel : $\ln(\ln(n)) \geq 2$, soit :

$$\forall n \geq n_0, 0 \leq \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} \leq \frac{1}{n^2},$$

et par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$ converge.

33. a. S_N étant une somme partielle de série, pour que la suite (S_N) converge, il est nécessaire que son terme général tende vers 0.

Or :

- $(|x| > 1) \Rightarrow (n \cdot |x|^n \text{ tend vers } +\infty)$,
- $(|x| = 1) \Rightarrow (n \cdot |x|^n \text{ tend vers } +\infty)$.

Donc on doit prendre : $|x| < 1$.

b. A partir de là, et pour : $|x| < 1$, on a : $(1-x) \cdot S_N = \sum_{n=1}^N n \cdot x^n - \sum_{n=1}^N n \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^N n \cdot x^n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1) \cdot x^n$.

En regroupant ce qu'on peut regrouper : $(1-x) \cdot S_N = \sum_{n=1}^N n \cdot x^n - \sum_{n=2}^{N+1} (n-1) \cdot x^n = x + \sum_{n=2}^N x^n - N \cdot x^{N+1}$.

Si on fait tendre N vers $+\infty$, on conclut que $((1-x) \cdot S_N)$ converge et : $(1-x) \cdot S = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N x^n = \frac{x}{1-x}$.

Finalement :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

34. a. On montre de façon immédiate par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ existe et est strictement positif.

Dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \geq 0$, et (u_n) est bien croissante.

b. Supposons que (u_n) converge.

Alors puisque la suite est strictement croissante, sa limite L est supérieure à u_0 , donc : $L > 0$.

Mais alors : $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a_n}{L}$.

Les deux séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum \frac{a_n}{L}$ étant à termes positifs, elles ont alors même comportement.

Or la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge puisque la suite (u_n) converge, donc la série $\sum \frac{a_n}{L}$ puis la série $\sum a_n$ convergent aussi.

c. Réciproquement, si $\sum a_n$ converge, on commence par dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n$ (puisque (u_n) est

croissante), et : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n} \leq \frac{a_n}{u_0}$.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, la série télescopique $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge et la suite (u_n) est convergente.

35. a. On peut réécrire l'hypothèse en : $\forall n \geq n_0, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \leq \frac{u_n}{\alpha_n} \leq C = \frac{u_{n_0}}{\alpha_{n_0}}$.

Donc on a bien : $u_n = O_{+\infty}(\alpha_n)$, (soit $\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right)$ bornée).

b. D'où : $(\sum \alpha_n \text{ converge}) \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge})$, par comparaison de séries à termes positifs.

36. a. Notons tout d'abord que suivant P , la suite (u_n) présente un problème de définition.

Il est nécessaire que le coefficient dominant de P soit positif car sinon, P deviendrait négatif à partir d'un certain rang.

Dans le cas donc où le coefficient dominant de P (notons-le a) est positif, on peut alors écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = a \cdot n^k + \dots \underset{+\infty}{\sim} a \cdot n^k$, où k désigne le degré de P .

Cet équivalent garantit que $P(n)$ devient positif pour n assez grand et que u_n est alors défini à partir de ce rang.

Puis : $\sqrt{P(n)} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{a \cdot n^{\frac{k}{2}}}$, et d'autre part : $\sqrt{n^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} n$.

Distinguons alors plusieurs cas :

- $k < 2$, alors $\sqrt{P(n)}$ est négligeable en $+\infty$ devant $\sqrt{n^2 + 1}$ et (u_n) tend vers $+\infty$: la série $\sum u_n$ diverge.

- $k > 2$, alors $\sqrt{n^2 + 1}$ devient négligeable devant $\sqrt{P(n)}$, et (u_n) tend vers $-\infty$: la série diverge encore.

- $k = 2$, et : $a \neq 1$, on a alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} (1 - \sqrt{a}) \cdot n$, u_n à nouveau ne tend pas vers 0, et $\sum u_n$ diverge.

Finalement pour que la série converge, il faut que : $k = 2, a = 1$, soit : $P = X^2 + b \cdot X + c$.

b. On peut sous la dernière hypothèse écrire :

$$\sqrt{P(n)} = \sqrt{n^2 + bn + c} = n \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = n \left(1 + \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{8} \right) \cdot \frac{1}{n^2} + \left(-\frac{b \cdot c}{4} + \frac{b^3}{16} \right) \cdot \frac{1}{n^3} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right),$$

$$\text{et : } \sqrt{n^2 + 1} = n \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} = n \left(1 + \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^3} \right) \right).$$

$$\text{D'où : } u_n = \left(-\frac{b}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2} + \frac{b^2}{8} \right) \cdot \frac{1}{n} + \left(\frac{b \cdot c}{4} - \frac{b^3}{16} \right) \cdot \frac{1}{n^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

On doit donc prendre : $b = 0$, pour que u_n tende vers 0.

Si : $c \neq 1$, alors : $u_n \sim \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2} \right) \cdot \frac{1}{n}$, et la série $\sum u_n$ a son terme général équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente, et à ce titre diverge.

Donc on doit prendre : $c = 1$, et dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, et la série $\sum u_n$ converge.

Conclusion : la série converge si et seulement si : $P = X^2 + 1$, et la série est alors la série nulle.

Remarque : le développement limité (si u_n n'avait pas été constamment nul) nous aurait permis dans tous les cas de déterminer la nature de $\sum u_n$ qui aurait été alors convergente, grâce à un équivalent.

Séries de signe quelconque, somme de séries convergentes.

$$37. \text{ a. Tout d'abord : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{x} \cdot \ln \left(1 + \frac{x}{n+1} \right) = \frac{n+1}{x} \cdot \left(\frac{x}{n+1} - \frac{x^2}{2 \cdot (n+1)^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = 1 - \frac{x}{2 \cdot (n+1)} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right),$$

$$\text{ce qui donne encore : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{x}{2 \cdot n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

$$\text{Puis : } \forall n \geq 1, \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ln \left(1 - \frac{x}{2 \cdot n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right) = -\frac{x}{2 \cdot n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \sim -\frac{x}{2 \cdot n}.$$

Par équivalence avec une série de signe constant ($x > 0$), la série $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ diverge vers $-\infty$ et la suite $(\ln(u_n))$ aussi.

Donc (u_n) tend vers 0.

$$\text{b. Pour } \alpha \text{ donné, on a : } \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = -\frac{x}{2 \cdot n} - \frac{\alpha}{n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, pour que la série converge, il faut que :

$$\alpha + \frac{x}{2} = 0, \text{ soit : } \alpha = -\frac{x}{2}.$$

$$\text{Pour cette valeur de } \alpha, \text{ le terme général s'écrit : } \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) - \alpha \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{A}{n^2} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

où A est une constante et ce terme est la somme des termes de deux séries absolument convergentes. On en déduit que cette valeur de α conduit bien à une série convergente.

Remarque : c'est un cas où la notation $O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ (« grand O ») est pratique.

c. La série précédente a pour terme général celui d'une série télescopique car :

$$\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) - \alpha \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = [\ln(u_{n+1}) - \alpha \cdot \ln(n+1)] - [\ln(u_n) - \alpha \cdot \ln(n)].$$

Puisque cette série converge, on en déduit que la suite $(\ln(u_n) - \alpha \cdot \ln(n))$ converge vers une limite notée L , et $(u_n \cdot n^{-\alpha})$ converge vers : $A = e^L$, soit : $u_n \cdot n^{-\alpha} \underset{+\infty}{\sim} A$, ou encore : $u_n \underset{+\infty}{\sim} A \cdot n^\alpha$.

d. Par comparaison de séries à termes positifs et puisque : $u_n \sim_{+\infty} \frac{A}{n^2}$, on en déduit que :

- si : $\frac{x}{2} \leq 1$, ou encore : $0 < x \leq 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge,
- si : $\frac{x}{2} > 1$, ou encore : $x > 2$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

38. Notons, pour : $n \in \mathbb{N}$: $P_n = \prod_{k=0}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

Alors : $\forall n \geq 1$, on a : $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot P_n = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) \cdot P_{n-1}$, et par récurrence : $\sin\left(\frac{x}{2^n}\right) \cdot P_n = \frac{1}{2^n} \cdot \sin(x) \cdot P_0$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = \ln(P_n) = \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) - \ln\left(\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + \ln(\sin(x)) + \ln(P_0)$, pour : $x \neq 0$, et :

$$\sum_{k=0}^n \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\right) = -\ln\left(2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)).$$

Or quand n tend vers $+\infty$, la suite $\left(\ln\left(2^n \cdot \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)\right)\right)$ tend vers $\ln(x)$ (avec un équivalent).

Donc la série converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\right) = -\ln(x) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)) = \ln\left(\frac{\sin(x) \cdot \cos(x)}{x}\right) = \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right).$$

39. Un équivalent du terme général donne la convergence de la série : $\frac{2n-1}{n \cdot (n^2-1)} \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série proposée converge.

Puis : $\frac{2X-1}{X \cdot (X-1) \cdot (X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$, puis : $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{2}$, d'où :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{2k-1}{k \cdot (k^2-1)} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On simplifie alors la partie commune aux trois sommes et :

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=2}^n \frac{2k-1}{k \cdot (k^2-1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

En passant à la limite, on en déduit la somme de la série qui vaut $\frac{5}{4}$.

40. a. On peut par exemple raisonner par récurrence sur N :

- pour : $N = 1$, on a : $\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = z_1$, et : $\sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n \cdot (n+1)} + \frac{S_N}{N+1} = \frac{S_1}{1 \cdot 2} + \frac{S_1}{2} = S_1 = z_1$, d'où l'égalité.

- si on suppose l'égalité vraie pour un : $N \in \mathbb{N}^*$, donné, alors :

$$\sum_{n=1}^{N+1} \frac{S_n}{n \cdot (n+1)} + \frac{S_{N+1}}{N+2} = \left(\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} - \frac{S_N}{N+1}\right) + \frac{S_{N+1}}{(N+1) \cdot (N+2)} + \frac{S_{N+1}}{N+2} = \sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} + \frac{S_{N+1}}{N+1} - \frac{S_N}{N+1},$$

et comme : $\frac{S_{N+1}}{N+1} - \frac{S_N}{N+1} = \frac{z_{N+1}}{N+1}$,

on en déduit l'égalité voulue au rang $N+1$, ce qui termine la récurrence.

b. Puisque la série $\sum z_n$ converge, la suite (S_n) est convergente donc bornée.

Par conséquent, la suite $\left(\frac{S_N}{N+1}\right)$ converge vers 0.

De plus, si on note A un majorant de $|S_n|$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{S_n}{n.(n+1)} \right| \leq \frac{A}{n^2}$,

et la série $\sum \frac{S_n}{n.(n+1)}$ est absolument convergente, donc convergente.

Finalement la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge, et la série $\sum_{n \geq 1} \frac{z_n}{n}$ converge.

41. a. Il est immédiat que la suite (S_n) est croissante (et convergente puisque la série converge).

De même, il est immédiat que la suite $(T_n - S_n)$ tend vers 0.

$$\text{Enfin : } \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!},$$

$$\text{et donc : } T_{n+1} - T_n = \frac{n+2-(n+1)^2}{(n+1).(n+1)!} = \frac{-n^2-n+1}{(n+1).(n+1)!} \leq 0, \text{ puisque : } n \geq 1.$$

Donc les suites sont bien adjacentes (et on retrouve la convergence de la suite (S_n)).

Leur limite commune est évidemment e .

b. Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq e \leq T_n$, on a : $n!.S_n \leq n!.e < n!.T_n = n!.S_n + \frac{1}{n}$,

car (T_n) est strictement décroissante.

De plus, il est clair que : $n!.S_n = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$, comme somme d'entiers.

Si on pose alors : $p_n = n!.S_n$, et : $0 \leq r_n = n!.e - n!.S_n < \frac{1}{n}$, on a ainsi construit deux suites (p_n) et (r_n) que l'on peut au besoin compléter avec : $p_0 = 2$, et : $r_0 = e - 2$, répondant aux exigences à savoir que (p_n) est une suite d'entiers naturels et (r_n) tend bien vers 0 par le théorème des gendarmes.

c. On a immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq e - S_{n+1} \leq T_{n+1} - S_{n+1} = \frac{1}{(n+1).(n+1)!}$.

$$\text{Puis : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n!.e - n!.S_{n+1} \leq \frac{n!}{(n+1).(n+1)!}, \text{ d'où : } 0 \leq n!.e - n! \left(S_n + \frac{1}{(n+1)!} \right) \leq \frac{n!}{(n+1).(n+1)!},$$

$$\text{et : } 0 \leq r_n - \frac{n!}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ puisque : } r_n = n!.e - n!.S_n.$$

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq r_n - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)^2}, \text{ soit : } r_n = \frac{1}{n+1} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right), \text{ et : } r_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

d. On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(2.\pi.n!.e) = \sin(2.\pi.(p_n + r_n)) = \sin(2.\pi.r_n) \sim_{+\infty} 2.\pi.r_n \sim_{+\infty} \frac{2.\pi}{n}$,

et donc la série $\sum_{n \geq 0} \sin(2.\pi.n!.e)$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

e. La question c donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_n = \frac{1}{n+1} + x_n$, avec : $0 \leq x_n \leq \frac{1}{(n+1)^2}$, d'où : $x_n = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

$$\text{Donc on en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{1}{n} + x_n + O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{n} + O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

$$\text{puis : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(\pi.n!.e) = \sin(\pi.(p_n + r_n)) = \sin(\pi.r_n).(-1)^{p_n}.$$

$$\text{Enfin : } \forall n \geq 2, p_n = n!.S_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} = 1 + n + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} = (n+1) + n.(n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!},$$

et comme $n.(n-1)$ est pair et $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!}$ est un entier, on conclut que : $(-1)^{p_n} = (-1)^{n+1}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(\pi.n!.e) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n} + O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right),$

et la série $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi.n!.e)$ converge comme somme d'une série alternée convergente (d'après le critère spécial) et d'une série absolument convergente.

Produit infini.

42. a. Pour : $N \geq 2$, tous les termes du produit qui composent P_N sont strictement positifs et P_N l'est aussi.

De plus : $\forall N \geq 2, \ln \left(\prod_{n=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \right) = \sum_{n=2}^N \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right).$

Si on note u_n le terme qui apparaît dans la somme, alors : $u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2.n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right).$

Or la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge du fait du critère spécial et la série $\sum_{n \geq 2} \left(-\frac{1}{2.n} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right)$ diverge vers $-\infty$ par comparaison de séries à termes négatifs.

Donc la suite $(\ln(P_N))$ diverge vers $-\infty$ et (P_N) tend vers 0.

Remarque : l'écriture « intuitive » qu'on aurait pour ce résultat : $\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = 0,$

montre qu'il faut être prudent car ce « produit » (ça n'en est pas un) est nul alors que tous ses termes sont non nuls.

b. Si on pousse le développement de u_n à un ordre de plus, on obtient :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2.n} + \frac{(-1)^n}{3.n.\sqrt{n}} + o_{+\infty} \left(\frac{1}{n.\sqrt{n}} \right) = a_n + b_n + c_n.$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum c_n$ convergent (la deuxième par absolue convergence), et donc :

$$\ln(P_N) = \sum_{n=2}^N a_n + \sum_{n=2}^N b_n + \sum_{n=2}^N c_n = L_a - \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 1 \right) + L_c + o_{+\infty}(1) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(N) + K + o_{+\infty}(1), \text{ d'où :}$$

$$P_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot e^{K+o_{+\infty}(1)} \sim_{+\infty} \frac{e^K}{\sqrt{N}} \sim_{+\infty} \frac{C}{\sqrt{N}}, \text{ avec : } C = e^K \in \mathbb{R}^*.$$

43. Remarquons tout d'abord que : $\forall N \in \mathbb{N}, \ln(P_N) = \sum_{n=0}^N \ln(1+u_n),$ et raisonnons par double implication :

- si (P_N) converge, et puisque tous les termes du produit sont supérieurs à 1, la limite P de (P_N) est supérieure à 1.

La série $\sum \ln(1+u_n)$ converge alors vers $\ln(P)$ et son terme général tend vers 0.

Mais alors : $\ln(1+u_n) \sim_{+\infty} u_n,$ et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

- si la série $\sum u_n$ converge, alors son terme général tend vers 0 et : $\ln(1+u_n) \sim_{+\infty} u_n.$

Donc la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge, et la suite $\ln(P_N)$ aussi, ce qui entraîne la convergence de $(P_N).$

Séries alternées et autour de la série alternée.

44. Attention à ne pas se contenter d'un équivalent.

On peut écrire : $(-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sin \left(\frac{1}{n} \right) = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{n} + \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{n}}{3.n^3} + o_{+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3} \right).$

On écrit ainsi le terme général u_n comme la somme de deux termes, a_n et $b_n.$

La deuxième série converge par absolue convergence car : $|b_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{n}}{3 \cdot n^3} + o_{+\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n^3} \right) \right| \sim \frac{\sqrt[n]{n}}{3 \cdot n^3} \sim \frac{1}{3 \cdot n^3}$.

En effet, la suite $(\sqrt[n]{n})$ tend vers 1.

La première est alternée.

Posons alors f la fonction : $x \mapsto x^{1-x} = \exp((1-x) \cdot \ln(x))$, et étudions-la sur $]0,1[$.

Elle y est dérivable et : $\forall x \in]0,1[, f'(x) = \left(-\ln(x) + \frac{1-x}{x} \right) \cdot f(x)$.

On pose alors : $g(x) = -\ln(x) + \frac{1}{x} - 1$, sur $]0,1[$, et : $g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} < 0$.

g est donc décroissante sur $]0,1[$ et s'annule en 1 : elle reste positive sur l'intervalle.

On en déduit que f' est positive et f est donc croissante sur $]0,1[$.

La série $\sum a_n$, avec : $\forall n \geq 1, a_n = (-1)^n \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{n} \right)^{1-\frac{1}{n}} = (-1)^n \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$,

vérifie donc le critère spécial des séries alternées et est donc convergente.

Finalement la série proposée $\sum (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

45. La série proposée est alternée.

De plus : $\forall n \geq 0, \frac{8^{n+1}}{(2 \cdot n + 2)!} \cdot \frac{(2 \cdot n)!}{8^n} = \frac{8}{(2 \cdot n + 1) \cdot (2 \cdot n + 2)} = \frac{4}{(2 \cdot n + 1) \cdot (n + 1)}$,

et ce quotient est plus petit que 1 dès que : $n \geq 1$.

Donc la série vérifie les hypothèses du critère spécial à partir du rang 1.

On peut alors écrire : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8^n}{(2 \cdot n)!} = 1 - 4 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8^n}{(2 \cdot n)!} = -3 + S'$, avec : $S' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot 8^n}{(2 \cdot n)!}$.

S' positif et : $|S'| \leq \left| \frac{8^2}{4!} \right| = \frac{64}{24} = \frac{8}{3} < 3$.

Donc : $S < 0$.

46. a. Pour : $n \geq 1$, et comme reste d'une série convergente, R_n existe et est du signe de son premier terme à savoir $(-1)^{n+1}$ puisque la série définissant R_n vérifie le critère spécial des séries alternées.

b. On a immédiatement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \right),$$

en ayant effectué une translation d'indice et réappelé k le nouvel indice p .

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}, R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot (k+1)}.$$

c. On peut alors écrire : $\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_{n+1}$, donc : $2 \cdot R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + R_n + R_{n+1}$.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n \cdot (n+1)}$ est alternées et vérifie le critère spécial de façon immédiate.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n + R_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k \cdot (k+1)} \right| \leq \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)}$, et : $R_n + R_{n+1} = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$.

Donc : $R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot (n+1)} + O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot n} + O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2 \cdot n}$.

d. L'équivalent obtenu au-dessus ne permet pas d'en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} R_n$, mais comme somme d'une série convergente (alternée vérifiant le critère spécial) et d'une série absolument convergente, la série $\sum_{n \geq 1} R_n$ converge.

Autour de la série harmonique.

47. a. On peut penser à comparer S_n à H_n .

$$\text{Pour cela : } \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n - H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = -\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{k \cdot (k + \sqrt{k})}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n \cdot (n + \sqrt{n})}$ converge par comparaison de séries à termes positifs, donc la suite de ses sommes partielles est bornée.

$$\text{Donc : } \frac{S_n}{\ln(n)} = \frac{H_n}{\ln(n)} + \frac{S_n}{n}, \text{ avec } \left(\frac{H_n}{\ln(n)} \right) \text{ qui tend vers 1 et } \left(\frac{a_n}{\ln(n)} \right) \text{ qui tend vers 0.}$$

$$\text{Donc : } S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

b. On peut être plus précis puisque le fait que $(S_n - H_n)$ converge s'écrit aussi :

$$\exists K \in \mathbb{R}, S_n - H_n = K + o_{+\infty}(1)$$

et comme : $H_n = \ln(n) + \gamma + o_{+\infty}(1)$, finalement :

$$S_n = \ln(n) + (K + \gamma) + o_{+\infty}(1), \text{ soit bien : } S_n = \ln(n) + C + o_{+\infty}(1),$$

où C est une constante, et $o_{+\infty}(1)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Séries de Bertrand.

48. a. La fonction f est définie et de classe C^1 sur $]1, +\infty[$, et : $\forall x > 1, f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$.

$$\text{Donc : } \forall n \geq 2, \exists c_n \in]n, n+1[, f(n+1) - f(n) = f'(c_n),$$

$$\text{autrement dit : } \forall n \geq 2, \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)) = \frac{1}{c_n \cdot \ln(c_n)} \leq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}.$$

Or la série télescopique $\sum_{n \geq 2} (\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n)))$ diverge puisque la suite $(\ln(\ln(n)))$ diverge.

Donc par minoration, la série de termes positifs $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$ diverge.

b. Il est immédiat que : $\forall \alpha < 1, \forall n \geq 2, \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln(n)} \geq \frac{1}{n \cdot \ln(n)}$,

et donc par minoration (d'une série à termes positifs), la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln(n)}$ diverge.

c. Pour : $\alpha \geq 2$, et : $\forall \beta \in \mathbb{R}$, on a : $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}}$.

Or puisque : $\alpha - \frac{3}{2} > 0$, le théorème des croissances comparées montre que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\alpha - \frac{3}{2}}} = 0$.

Donc : $\frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$, et la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \cdot (\ln(n))^\beta}$ converge, par comparaison.

Produit de Cauchy.

49. Si on note a_n le terme général de cette série et b_n celui de la série correspondant au produit de Cauchy proposé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot a_{n-k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right).$$

$$\text{De plus : } \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} = 2.H_{n+1},$$

avec le changement d'indice : $p = n - k$, dans la deuxième somme.

$$\text{Donc : } \forall n \in \mathbb{N}, b_n = (-1)^n \cdot \frac{2.H_{n+1}}{n+2}.$$

La série est donc alternée et son terme général tend vers 0 puisque : $|b_n| \underset{+\infty}{\sim} \frac{2.\ln(n+1)}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2.\ln(n)}{n}$.

$$\text{Enfin : } \forall n \in \mathbb{N}, |b_{n+1}| - |b_n| = 2 \cdot \left(\frac{H_{n+2}}{n+3} - \frac{H_{n+1}}{n+2} \right) = 2 \cdot \frac{(n+2).H_{n+2} - (n+3).H_{n+1}}{(n+3).(n+2)},$$

$$\text{et : } (n+2).H_{n+2} - (n+3).H_{n+1} = (n+2).(H_{n+1} + \frac{1}{n+2}) - (n+3).H_{n+1} = 1 - H_{n+1} \leq 0.$$

Donc la série $\sum_{b \geq 0} b_n$ vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées et à ce titre, converge.

Remarque : évidemment ici la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ n'est pas absolument convergente.

50. Remarque générale : u_n est le terme général d'un produit de Cauchy de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec elle-même.

En effet, puisque la numérotation commence à 1, on a, en notant $\sum_{n \geq 1} v_n$ ce produit de Cauchy :

$$\forall n \geq 1, v_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ 1 \leq p, 1 \leq q}} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1}{q^\alpha} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{1}{(n-p)^\alpha} = u_n, \text{ sachant que : } v_1 = 0,$$

puisque l'on ne peut pas avoir : $1 \leq p, 1 \leq q$, et : $p + q = 1$, autrement dit : $\forall n \geq 2, v_n = u_n$.

$$\text{a. Si : } \alpha \leq 0, \text{ alors : } \forall n \geq 2, u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha \cdot (n-k)^\alpha} \geq \frac{1}{1^\alpha \cdot (n-1)^\alpha} = (n-1)^{-\alpha},$$

et (u_n) ne tend pas vers 0 donc la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

b. Si : $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ est le produit de Cauchy de deux séries (deux fois la même) absolument convergentes et donc converge.

c. Si : $0 < \alpha \leq 1$, alors la fonction : $x \mapsto x.(1-x)$, est positive sur $]0, 1[$ et en étudiant sa dérivée, on constate qu'elle atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ où elle vaut $\frac{1}{4}$.

Donc : $\forall n \geq 2, \forall 1 \leq k \leq n-1, \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\alpha \leq \left(\frac{1}{4}\right)^\alpha$, puisque de plus la fonction : $x \mapsto x^\alpha$, est

croissante sur \mathbb{R}^{++} et donc : $\frac{1}{k^\alpha \cdot (n-k)^\alpha} = \frac{1}{n^{2\alpha}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^\alpha} \geq \frac{1}{n^{2\alpha}} \cdot 4^\alpha$.

$$\text{Donc : } \forall n \geq 2, u_n \geq (n-1) \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} \cdot 4^\alpha \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha} \cdot 4^\alpha,$$

et la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge par comparaison d'une série à termes positifs avec une série de Riemann divergente.