Séries Numériques (corrigé niveau 1).

Séries télescopiques.

1. La série proposée est clairement télescopique, construite avec la suite (a_n) donnée par :

   $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n = e^{\frac{1}{n}}$.

   Puisque (a_n) converge (vers 1), la série converge et sa somme vaut $e-1$.

2. Ecrivons comme proposé : $(1-x).u_n = \dfrac{x^n - x^{n+1}}{(1-x^n).(1-x^{n+1})} = \dfrac{1}{(1-x^{n+1})} - \dfrac{1}{(1-x^n)}$,

   et la série apparaît bien comme télescopique en posant : $\forall\ n \geq 1,\ a_n = \dfrac{1}{(1-x^n)}$.

   Pour x dans l'intervalle proposé, (a_n) converge vers 1, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1}(1-x).u_n$ converge et sa somme vaut : $\dfrac{1}{1-x} - 1 = \dfrac{x}{1-x}$.

   Puisque $1-x$ est non nul, la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge aussi et sa somme est $\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

3. On peut écrire : $\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \ln(n^2-1) - \ln(n^2) = [\ln(n+1) - \ln(n)] - [\ln(n) - \ln(n-1)]$,

   et la série est bien télescopique en posant : $\forall\ n \geq 2,\ a_n = \ln(n) - \ln(n-1) = -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.

   Puisque la suite (a_n) converge (vers 0), la série est donc convergente et sa somme vaut :

   $a_2 - 0 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

   Remarque : la convergence de la série pouvait être obtenue simplement avec un équivalent.

4. On peut s'inspirer d'une situation déjà rencontrée et chercher à mettre u_n sous forme télescopique.

   Toujours en s'inspirant d'un exercice déjà vu, on peut poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n.(n+1)\ldots(n+m-1)}$.

   On constate alors que :

   $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)\ldots(n+1+m-1)} - \dfrac{1}{n.(n+1)\ldots(n+m-1)} = \dfrac{n-(n+m)}{n.(n+1)\ldots(n+1+m-1)}$,

   autrement dit : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = -m.u_n$.

   Puisque la suite (a_n) converge clairement vers 0, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 1}(a_{n+1} - a_n)$ converge donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ aussi.

   Enfin : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = -\dfrac{1}{m}.\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1} - a_n) = -\dfrac{1}{m}.(0 - a_1) = \dfrac{1}{m}.\dfrac{1}{m!} = \dfrac{1}{m.m!}$.

Séries à termes positifs ou de signe constant.

5. • La première série est à termes positifs et : $\dfrac{n}{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc la série diverge puisque la série harmonique diverge.

   • Pour la deuxième série, elle est encore à termes positifs et : $\dfrac{ch(n)}{ch(2.n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{e^{2.n}} = e^{-n}$.

   Comme cette dernière série est géométrique, de raison positive strictement intérieure à 1, elle converge et la série de départ aussi.

• Utilisons un développement limité pour cette troisième série en écrivant :

$$\forall\ n \geq 1,\ u_n = \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) = \ln(n^2+n+1) - \ln(n^2+n-1) = \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$$

Puis par exemple : $\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

De même : $\ln\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^2 + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} - \frac{3}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Finalement : $u_n = \frac{2}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$.

• Pour cette dernière série, on écrit simplement :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = e.\exp\left(-\frac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

soit : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.\left(1 - \frac{1}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, et donc : $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2.n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Finalement, les deux séries sont toutes deux positives (également garanti à partir d'un certain rang) et la seconde est divergente, donc la série proposée l'est aussi.

6. • La première série converge car : $n^2.(n^2.e^{-\sqrt{n}}) = n^4.e^{-\sqrt{n}}$, tend vers 0 en $+\infty$.

• $\sum \frac{n!}{\ln(n).e^{2.n}}$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0 (théorème des croissances comparées).

• $\sum \frac{1}{n.\sqrt[n]{n}}$ diverge car c'est une série à termes positifs et : $\frac{1}{n.\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{n}.\exp\left(-\frac{\ln(n)}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Par comparaison de séries à termes positifs, la série proposée diverge.

7. a. Tout d'abord, les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, donc (v_n) est bien définie.

Puis : $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1).n^n}{(n+1)^{n+1}}\right) + 1 + \alpha.\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 + \alpha.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

On utilise alors un développement limité de ln(1+u) à l'ordre 3 pour le premier logarithme et à l'ordre 2 pour l'autre, et :

$$v_n = -n.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + \frac{1}{3.n^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) + 1 + \alpha.\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2.n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \left(\alpha + \frac{1}{2}\right).\frac{1}{n} - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3}\right).\frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Distinguons alors plusieurs cas :

• $\alpha > -\frac{1}{2}$; on a : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right).\frac{1}{n}$, et les deux séries ont des termes généraux de même signe (positif) à partir d'un certain rang, la seconde divergeant et la série $\sum v_n$ aussi.

• $\alpha < -\frac{1}{2}$; on a toujours : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\alpha + \frac{1}{2}\right).\frac{1}{n}$, et le même argument (pour des séries à termes négatifs cette fois) montre que la série $\sum v_n$ diverge encore.

• $\alpha = -\frac{1}{2}$; on a cette fois : $v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12}.\frac{1}{n^2}$, et les deux séries ont des termes généraux de même signe (négatif) à partir d'un certain rang mais cette fois convergent.

b. Pour : $\alpha = -\frac{1}{2}$, la série $\sum v_n$ converge donc la suite $(\ln(u_n))$ converge vers une valeur réelle L.

Donc (u_n) converge vers : $C = e^L > 0$, ce qui s'écrit encore : $u_n \underset{+\infty}{\sim} C$, d'où l'équivalent (qui correspond au début de la formule de Stirling) : $n! \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.n^{-\left(-\frac{1}{2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} C.n^n.e^{-n}.\sqrt{n}$

8. Toutes les séries évoquées sont à termes réels positifs.
   • pour la première, on peut écrire simplement : $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $0 \le \max(u_n, v_n) \le u_n + v_n$.
   Donc par majoration (pour des séries à termes positifs), la série $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
   • pour la deuxième, on a encore : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \le \sqrt{u_n.v_n} \le \dfrac{u_n + v_n}{2}$, car : $\dfrac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n.v_n} = \dfrac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2}$.
   Donc à nouveau par majoration, la série $\sum \sqrt{u_n.v_n}$ converge.
   • pour la troisième, on a toujours : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \le \dfrac{u_n.v_n}{u_n + v_n} \le \dfrac{u_n + v_n}{2}$, car : $(u_n + v_n)^2 - 2.u_n.v_n = (u_n - v_n)^2$.
   Une fois de plus par majoration, la série $\sum \dfrac{u_n.v_n}{u_n + v_n}$ converge.

9. a. Puisque $\sum u_n$ est à termes positifs, les termes de $\sum v_n$ sont définis et positifs.
   Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $0 \le \dfrac{u_n}{1 + u_n} \le u_n$, donc par majoration de série à termes positifs, $\sum v_n$ converge.
   b. Supposons maintenant que $\sum v_n$ converge.
   Alors son terme général v_n tend vers 0.
   De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{v_n}{1 - v_n} \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est donc convergente.

10. Puisque la série $\sum a_n$ converge, son terme général a_n tend vers 0.
   Dans ce cas, il existe un rang n_0 tel que : $\forall\ n \ge n_0$, $0 < a_n \le 1$, et donc : $a_n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\dfrac{\ln(a_n)}{n}\right) \le 1$.
   Donc : $\forall\ n \ge n_0$, $0 < a_n^{1+\frac{1}{n}} = a_n.a_n^{\frac{1}{n}} \le a_n$, et la série $\sum\limits_{n\ge1} a_n^{1+\frac{1}{n}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

11. a. On peut évidemment penser à une récurrence.
   • Le résultat annoncé est vrai pour : $n = 1$, puisque : $1 - \sqrt{1}.u_1 = 1 - \sqrt{1}.\dfrac{\sqrt{0!}}{1 + \sqrt{1}} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} = u_1 = \sum\limits_{k=1}^{1} u_k$.
   • Soit : $n \ge 1$, tel qu'on ait : $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = 1 - \sqrt{n}.u_n$.
   Alors : $\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \sqrt{n}.u_n + u_{n+1} = 1 - \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})} + \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n+1})}$, soit :
   $$\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 1 - \frac{\sqrt{n!}.(1+\sqrt{n+1}-1)}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n+1})} = 1 - \frac{\sqrt{n!}.\sqrt{n+1}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n+1})} = 1 - \sqrt{n+1}.u_{n+1},$$
   ce qui termine la récurrence.
   b. Comme il est clair que la série est à termes positifs, on en déduit que la suite des sommes partielles est croissante, puis que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \le 1$, autrement dit que cette suite est majorée.

Donc la suite des sommes partielles converge et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ aussi.

c. La série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est à termes positifs et : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente.

d. Si on note alors : $\forall\ n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{(1+\sqrt{k})}{\sqrt{k}}\right) = \ln\left(\frac{(1+\sqrt{1})...(1+\sqrt{n})}{\sqrt{n!}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}.u_n}\right), \text{ et : } \sqrt{n}.u_n = e^{-S_n}.$$

On en déduit, puisque : $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, du fait de la divergence de cette série à termes positifs, donc que : $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}.u_n = 0$, et finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

Pour un équivalent de u_n, on pourra se reporter à la feuille d'exercices « intégration », dans le paragraphe « comparaison série-intégrale » niveau 3.

12. a. Pour n fixé, non nul, R_n apparaît comme le reste d'ordre n de la série exponentielle donnant e^1 et à ce titre est une série convergente.
On peut aussi constater que R_n est la somme d'une série vérifiant le critère de d'Alembert.

b. On peut ensuite écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ R_n = \frac{1}{n!}.\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$.

Puis : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\ k \geq n+2,\ \frac{n!}{k!} = \frac{1}{(n+1)...k} \leq \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}$.

Or la quantité majorante est le terme général d'une série géométrique convergente car : $\left|\frac{1}{n+1}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$.

Donc en sommant les inégalités précédentes pour k variant de $n+2$ à $+\infty$, on obtient :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{p} = \frac{1}{n+1}.\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}, \text{ et : } R_n = \frac{1}{n!}.\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \frac{1}{n.n!}.$$

Séries de signe quelconque, sommes de séries.

13. La série est alors convergente, puisque somme de deux séries convergentes.
Notons ensuite : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = a_n + u_n$, où $\sum a_n$ est absolument convergente et $\sum u_n$ semi-convergente.
Si la série $\sum v_n$ était absolument convergente, on aurait :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n - a_n$, donc : $|u_n| = |v_n| + |a_n|$, et la série $\sum(|v_n| + |a_n|)$ étant convergente, la série $\sum |u_n|$ serait aussi convergente ce qui n'est pas le cas.
Donc la série $\sum v_n$ n'est que semi-convergente.

14. • La première série est convergente puisque : $\forall\ n \geq 1,\ 0 \leq \frac{1}{(2.n+1)^2} \leq \frac{1}{4.n^2}$, et par majoration la série considérée est bien convergente.
Puis : $\forall\ n \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \sum_{p=1}^{2.n+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2.p)^2} = \sum_{p=1}^{2.n+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4}.\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = S_{2.n+1} - \frac{1}{4}.S_n$, où S_n est la somme partielle de la série dont on donne la somme.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2.n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}$.

• La seconde série est absolument convergente et : $\forall\ n \geq 0$, $\sum_{k=1}^{2.n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2}$.

Donc : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2.k)^2} - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2.k+1)^2} = \frac{1}{4}.\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{2}{24}.\pi^2 = -\frac{\pi^2}{12}$.

15. Pour les deux séries, plusieurs façons de montrer leur convergence :

• on peut écrire pour la première (comme pour la deuxième) : $\frac{n^2}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n.(n-1)}{n!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{(n-2)!}$, d'où la convergence de la série (par équivalence de séries à termes positifs), ou :

• $\lim_{n\to+\infty} n^2.\frac{n^2}{n!} = 0$, du fait du théorème des croissances comparées, d'où la convergence de la série.

Puis on écrit : $\forall\ n \geq 2$, $n^2 = n.(n-1) + n$, et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 0 + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n.(n-1)+n}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n.(n-1)}{n!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n!}$, puisque les deux séries qui apparaissent sont convergentes.

Enfin : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 1 + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} = 1 + e + (e-1) = 2.e$, à l'aide de translations d'indice dans les deux dernières sommes de séries.

En travaillant de la même façon, et à partir de :

$\forall\ n \geq 3$, $n_3 - n = n.(n-1).(n-2) + 3.n^2 - 3.n = n.(n-1).(n-2) + 3.n.(n-1)$, on aboutit à :

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n}{n!} = 0 + 0 + \frac{6}{2!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n.(n-1).(n-2) + 3.n.(n-1)}{n!} = 3 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n.(n-1).(n-2)}{n!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3.n.(n-1)}{n!}$, et à nouveau : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - n}{n!} = 3 + \sum_{p=3}^{+\infty} \frac{1}{p!} + 3.\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} = 3 + e + 3.(e-1) = 4.e$.

16. • Pour : $n = 4.k + 2$, on a pour la première série : $2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n = 2^{2.k+1}.x^{4.k+2}.(-1)^k = (-1)^k.2.x^2.(2.x^2)^{2.k}$.

Si ce terme général ne tend pas vers 0, la série diverge donc une condition nécessaire pour qu'elle converge est : $\left|2.x^2\right| < 1$, soit : $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour ces valeurs de x, on peut alors écrire : $2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n = \frac{1}{2.i}.[(\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}})^n - (\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}})^n]$.

Les deux séries géométriques qui apparaissent sont alors convergentes (de raison en module strictement plus petites que 1) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n = \frac{1}{2.i}.[\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}})^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}})^n] = \frac{1}{2.i}.\left[\frac{1}{1-\sqrt{2}.x.e^{i.\frac{\pi}{4}}} - \frac{1}{1-\sqrt{2}.x.e^{-i.\frac{\pi}{4}}}\right].$$

En réduisant au même dénominateur, on aboutit à : $\forall\ |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{\frac{n}{2}}.\sin\left(\frac{n.\pi}{4}\right).x^n = \frac{x}{1-2.x+2.x^2}$.

• Pour la deuxième série, elle converge pour : $x = 0$, et sinon s'écrit : $\sum x^{2n+1} = x.\sum (x^2)^n$.

x étant maintenant supposé non nul, ces séries ont même comportement et convergent si et seulement si : $\left|x^2\right| < 1$, soit encore : $|x| < 1$.

Pour ces valeurs de x, on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2.n+1} = x.\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n = \frac{x}{1-x^2}$

17. a. On utilise pour cela la formule du binôme de Newton (en posant : $\varepsilon = \pm 1$) et :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ (2+\varepsilon.\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .2^{n-k}.\varepsilon^k.\sqrt{3}^k \text{ , puis : } (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .2^{n-k}.\sqrt{3}^k.(1+(-1)^k).$$

Dans cette dernière somme ne restent que les k pairs ($k = 2.p$), et :

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2.\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2.p} .2^{n-2.p}.3^p ,$$

Enfin la somme étant un entier, la quantité proposée est bien un entier pair que l'on notera $2.N_n$.

b. On peut alors écrire : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \sin(2.N_n.\pi - \pi.(2-\sqrt{3})^n) = -\sin(\pi.(2-\sqrt{3})^n)$.

Il est clair que la quantité dans le sinus tend vers 0 (suite géométrique) donc :

$u_n \underset{+\infty}{\sim} -\pi.(2-\sqrt{3})^n$.

Par équivalence de séries à termes négatifs, la série $\sum u_n$ converge, l'autre étant géométrique et convergente.

18. On peut utiliser des développements limités en +∞, et :

$$\forall\ n \geq 1,\ \ln(n) + a.\ln(n+1) + b.\ln(n+2) = (1+a+b).\ln(n) + a.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b.\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \text{, soit :}$$

$$\forall\ n \geq 1,\ \ln(n) + a.\ln(n+1) + b.\ln(n+2) = (1+a+b).\ln(n) + (a+2.b).\frac{1}{n} - \frac{a+4.b}{2}.\frac{1}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc il est nécessaire que : $a + b + 1 = 0$, pour que (u_n) tende vers 0.

Si cette condition est remplie et si : $a + 2.b \neq 0$, le terme général de la série est équivalent à celui d'une série de signe constant et divergente $\left(\sum (a+2.b).\frac{1}{n}\right)$, donc $\sum u_n$ diverge.

On doit donc choisir : $a + b + 1 = 0$, $a + 2.b = 0$, soit : $b = 1$, $a = -2$.

Dans ce cas : $u_n = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$, et la série $\sum u_n$ converge.

Pour calculer sa somme on peut revenir à des sommes partielles ou remarquer que :

$\forall\ n \geq 1,\ u_n = (\ln(n) - \ln(n+1)) - (\ln(n+1) - \ln(n+2))$, soit le terme général d'une série télescopique.

Finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = [\ln(1) - \ln(2)] - \lim_{n\to+\infty} [\ln(n) - \ln(n+1)] = -\ln(2)$.

Produit infini.

19. a. On peut commencer par remarquer que : $\forall\ N \in \mathbb{N},\ \ln(P_N) = \ln(\prod_{n=0}^{N} u_n) = \sum_{n=0}^{N} \ln(u_n)$.

- si on suppose (P_N) convergente vers L non nulle, la continuité de $\ln$ en L montre que la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \ln(u_n)$ converge vers $\ln(L)$ et la série $\sum_{n\geq 0} \ln(u_n)$ converge.
- si on suppose que la série $\sum_{n\geq 0} \ln(u_n)$ converge vers L, alors la suite $(\ln(P_N))$ converge vers L et par continuité de $\exp$ en L, (P_N) converge vers e^L qui est bien non nulle.

b. Si (P_N) tend vers 0, la suite $(\ln(P_N))$ tend vers -∞, et la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} \ln(u_n)$ diverge vers -∞ : dans ce cas, la série $\sum_{n\geq 0} \ln(u_n)$ diverge.

Séries alternées et autour des séries alternées.

20. • La première série est définie pour : $n \geq 2$, et est bien alternée puisqu'alors le dénominateur garde un signe constant.

Puis : $\forall\ n \geq 2$, $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n}.\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} = \dfrac{(-1)^n}{n}.\left(1-\dfrac{(-1)^n}{n}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Si on note u_n le terme général de cette série, alors u_n apparaît comme la somme de deux termes :

$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, et $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ converge du fait du critère spécial,

$b_n = -\dfrac{1}{n^2}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^2}$, et $\sum\limits_{n\geq 2} b_n$ converge, par comparaison de séries à termes négatifs.

Finalement $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge.

• Pour la deuxième série, elle est encore alternée puisque l'argument du cosinus reste entre 0 et $\pi/2$.

Puis : $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\left(1+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

A nouveau le terme général v_n de la série s'écrit encore : $u_n = a_n + b_n$, avec $\sum a_n$ convergente du fait du critère spécial, et $\sum b_n$ absolument convergente car de terme général négligeable devant celui d'une série absolument convergente, donc convergente.

Autrement dit, la série $\sum u_n$ converge.

• Pour la troisième série, elle est alternée à partir du rang 2, et :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n.\sqrt{n+1}}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$, d'où :

$$\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.(1+o_{+\infty}(1))\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}.\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

soit finalement : $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n.\sqrt{n+1}} = \dfrac{(-1)^n}{n}-\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}+o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

Le terme général de la série s'écrit à nouveau : $u_n = a_n + b_n$, avec $\sum a_n$ convergente du fait du critère spécial, et $\sum b_n$ absolument convergente avec un équivalent.

Donc la série $\sum u_n$ converge.

21. On commence par noter que les termes de cette série sont définis au moins à partir d'un certain rang.
En effet, pour : $n \geq n_0 = \max(2, \lfloor -\alpha \rfloor + 1)$, on a : $\sqrt{n} > (-1)^{n+1}$, et : $n+\alpha > 0$.

Puis : $\forall\ n \geq n_0$, $\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}} = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).\left(1-\dfrac{\alpha}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

En développant, on obtient : $\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}} = 1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{\alpha}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$,

puis : $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right) = \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{\alpha}{2.n}\right)-\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\dfrac{\alpha+1}{2.n}+O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right) = a_n + b_n$.

Puis :

- $\sum a_n$ converge avec le critère spécial,
- $\sum b_n$

  - diverge si : $\alpha \neq -1$, car : $b_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{\alpha+1}{2.n}$, et par comparaison de séries de signe constant,

  - converge si : $\alpha = -1$, car alors : $b_n = O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n.\sqrt{n}}\right)$.

Comme somme de deux séries, la série $\sum \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+\alpha}}\right)$ converge si et seulement si : $\alpha = -1$.

22. • On note de même : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n.n^\alpha.\left(\dfrac{1}{n} - \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n.n^\alpha.\left(\dfrac{1}{6.n^3} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^n}{6.n^{3-\alpha}}$.

On en déduit que :
si : $3-\alpha \leq 0$, c'est-à-dire : $3 \leq \alpha$, u_n ne tend pas vers 0 et la série $\sum u_n$ diverge.
si : $3-\alpha > 0$, c'est-à-dire : $3 > \alpha$, on peut préciser :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = (-1)^n.n^\alpha.\left(\frac{1}{6.n^3} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{6.n^{3-\alpha}} + O_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{5-\alpha}}\right) = a_n + b_n.$$

et $\sum a_n$ converge (critère spécial des séries alternées) et $\sum b_n$ converge absolument car : $5-\alpha > 2$.
Donc la série converge si et seulement si : $3 > \alpha$.

• Notons : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{1+(-1)^n.n^\alpha}{n^{2.\alpha}} = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} + \dfrac{1}{n^{2.\alpha}} = a_n + b_n$.

Si : $\alpha < 0$, alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{2.\alpha}}$, et (u_n) tend vers $+\infty$, donc la série $\sum u_n$ diverge.

Si : $\alpha = 0$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1+(-1)^n$, et (u_n) ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge.

Si : $\alpha > 0$, alors $\sum a_n$ converge d'après le critère spécial des séries alternées et $\sum b_n$ converge si et seulement si : $2.\alpha > 1$, soit : $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Dans ce dernier cas, la série $\sum u_n$ converge donc (comme somme) si et seulement si : $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

23. a. Il est immédiat que u_n existe pour tout entier n.
De plus, on montre également par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
En effet, on a : $u_0 > 0$, et si pour une valeur : $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n > 0$, alors : $e^{-u_n} < 1$, et : $u_{n+1} > 0$.
Enfin, si on pose que : $\forall\ x > 0,\ f(x) = 1 - e^{-x} - x$, alors : $f'(x) = e^{-x} - 1 < 0$.
f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme : $f(0) = 0$, f est strictement négative sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On peut noter que : $f(x) = x$, a pour unique solution : $x = 0$, sur $\mathbb{R}^+$.
De plus : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) \leq 0$,
et la suite (u_n) est décroissante ; étant de plus minorée par 0, (u_n) est donc convergente.
Sa limite L est positive et vérifie (puisque f est continue sur $\mathbb{R}$) : $0 = L - L = f(L)$, donc : $L = 0$.

b. Puisque (u_n) est décroissante et tend vers 0, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n.u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées et donc converge.

c. Toujours parce que (u_n) tend vers 0, on a :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - e^{-u_n} = 1 - \left(1 - u_n + \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2)\right) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2).$$

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$, et : $u_n^2 \underset{+\infty}{\sim} 2.(u_n - u_{n+1})$.

Or la série télescopique $\sum_{n\geq 0}(u_n - u_{n+1})$ converge puisque la suite (u_n) converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge aussi.

d. La série $\sum_{n\geq 0}\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est télescopique et divergente puisque :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, et la suite $(\ln(u_n))$ diverge vers -∞.

Puis on repart de l'égalité : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2)$, d'où on déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{u_n}{2} + o_{+\infty}(u_n)$, et : $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{u_n}{2} + o_{+\infty}(u_n)\right) = -\dfrac{u_n}{2} + o_{+\infty}(u_n) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{u_n}{2}$.

Par comparaison de séries à termes négatifs, la série $\sum\limits_{n\geq 0} -\dfrac{u_n}{2}$ diverge donc ainsi que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Vrai-faux.

24. • ($\sum u_n$ converge) ⇒ ((u_n^2) converge) : implication vraie car si $\sum u_n$ converge, la suite (u_n) tend vers 0 et la suite (u_n^2) aussi.

• ($\sum u_n$ diverge) ⇒ ($\sum u_n^2$ diverge) : implication fausse car $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge.

• ($\sum u_n$ converge, $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$) ⇒ ($\sum u_n^2$ converge) : implication vraie car (par exemple) si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0, et : $u_n^2 = u_n.u_n = o_{+\infty}(u_n)$.
Or $\sum u_n$ est absolument convergente (car à termes positifs et convergente) donc $\sum u_n^2$ converge.

• ($\sum u_n$ convergente, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n \neq -1$) ⇒ ($\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ convergente) : implication fausse comme le montre le contrexemple : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, pour : $n \geq 2$.
En effet dans ce cas, le terme général de la deuxième série s'écrit :
$\forall\ n \geq 2,\ u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et ce terme général est la somme des termes généraux d'une série semi-convergente et d'une série divergente.
Remarque : l'implication devient vraie si (u_n) est à termes positifs, car si $\sum u_n$ converge, alors (u_n) tend vers 0 et : $\dfrac{u_n}{1+u_n} \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

Autour de la série harmonique.

25. On commence par remarquer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = H_{2.n} - H_n = (\ln(2.n) + \gamma + \varepsilon(2.n)) - (\ln(n) + \gamma + \varepsilon(n))$, et : $u_n = \ln(2) + \varepsilon(2.n) - \varepsilon(n)$, où la fonction ε tend vers 0 en +∞.
(u_n) est donc convergente de limite $\ln(2)$.
Remarque : on peut également obtenir ce résultat par exemple avec des sommes de Riemann.

26. a. On se souvient que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$,
que l'on peut redémontrer par récurrence.

b. Puis : $\dfrac{1}{1^2 + 2^2 + ... + n^2} = \dfrac{6}{n.(n+1).(2.n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n^3}$,
d'où la convergence, par comparaison de séries à termes positifs.

c. Enfin : $\dfrac{6}{X.(X+1).(2.X+1)} = \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c}{2.X+1}$, et : $a = 6$, $b = 6$, $c = -24$.
On revient ensuite aux sommes partielles pour écrire :
$\forall\ N \geq 2,\ S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{6}{n.(n+1).(2.n+1)} = 6.\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n} + 6.\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{n+1} - 24.\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{2.n+1}$.

De plus : $\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n+1} = \sum_{n=1}^{2.N+1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2.n} - 1$.

On termine avec : $S_N = 6.H_N + 6.(H_{N+1} - 1) - 24.(H_{2.N+1} - \frac{H_N}{2})$, et :

$S_N = 18.[\ln(N) + \gamma + \varepsilon(N)] + 6.[\ln(N+1) + \gamma + \varepsilon(N+1) - 1] - 24.[\ln(2.N+1) + \gamma - 1 + \varepsilon(2.N+1)]$, puis :

$S_N = 18 - 24.\ln(2) + 6.\ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) - 24.\ln\left(1 + \frac{1}{2.N}\right) + 18.\varepsilon(N) + 6.\varepsilon(N+1) - 24.\varepsilon(2.N+1)$,

et finalement : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = \lim_{N \to +\infty} S_N = 18 - 24.\ln(2)$.