Séries entières.
Exercices 2017-2018

Niveau 1.
Calcul de rayons de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes à l'aide de la règle de d'Alembert :

a. $\sum_{n\geq 1}\frac{(3.n)!}{(n!)^3.n^n}.x^n$,
b. $\sum_{n\geq 0}\frac{n^4+n}{2^n+\sqrt{n!}}.x^n$,
c. $\sum_{n\geq 1}(\sqrt[3]{n})^{2.n}.x^n$,
d. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{3.n}}{n^2+1}$,
e. $\sum_{n\geq 0}\frac{3^n}{4^n+n}.x^{4.n}$,
f. $\sum_{n\geq 0}\frac{x^{2^n}}{3^n+1}$.

2. Calculer le rayon de convergence des séries à l'aide d'équivalents :
a. $\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}).x^n$,
b. $\sum_{n\geq 0}(e^{\sqrt{n+1}}-e^{\sqrt{n}}).x^n$,
c. $\sum_{n\geq 0}\tan(\pi.\sqrt{n^2+3.n+1}).x^n$.

3. Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
Montrer que s'il existe : $z_0 \in \mathbb{C}$, tel que $\sum a_n.z_0^n$ soit semi-convergente, alors : $R=|z_0|$.

4. Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit : $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Etudier le rayon de convergence de $\sum \lambda^n.a_n.z^n$.

5. Soit $\sum a_n.z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
On considère les deux séries entières « partie paire » et « partie impaire » $\sum a_{2.p}.z^{2.p}$ et $\sum a_{2.p+1}.z^{2.p+1}$,
de rayon de convergence respectifs R_p et R_i.
Par double inégalité et à l'aide de couples $(z,-z)$ bien choisis, montrer que : $R=\min(R_p,R_i)$.

6. Soit la série entière $\sum(\cos(n)).z^n$.
a. Montrer que le rayon de convergence de cette série vaut au moins 1.
b. Montrer que $(\cos(n))_{n\geq 0}$ ne converge pas vers 0.
c. En déduire le rayon de convergence de $\sum(\cos(n)).z^n$.
d. Y a-t-il convergence au bord du disque de convergence ?

Propriété de sommes de séries entières.

7. Soit la fonction S définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$.
a. Montrer que le domaine de définition de S est [-1,+1].
b. Montrer que S est continue sur $\mathcal{D}_S$.
c. Montrer que S est de classe C^∞ sur]-1,+1[.
d. Montrer que S est dérivable en -1 et préciser $S'(-1)$.

8. Soit la série entière : $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.
a. Déterminer son rayon de convergence et étudier la convergence en $\pm R$.
On note S la somme de cette série entière.
b. Montrer que S est continue sur son domaine de définition.
c. Pour : $0\leq x<1$, transformer la quantité $(1-x).S(x)$ en somme d'une série entière.

d. A l'aide de l'étude d'une convergence normale, montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} (1-x).S(x) = 0$.

9. Soit : $I(p,q) = \int_0^1 t^p.(1-t)^q.dt$, avec : $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
   a. A l'aide d'intégrations par parties, calculer $I(p,q)$, pour tout : $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
   b. Déterminer la nature de la série de terme général : $a_n = I(n,n)$.
   c. Déterminer le domaine de définition de S définie par : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

10. Soit : $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, une série entière de rayon de convergence 1 telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \geq 0$.
   On suppose de plus que S est bornée sur]-1,+1[.
   a. En utilisant des sommes partielles de la série entière, montrer que la série $\sum a_n$ converge.
   b. Montrer que la fonction S admet une limite finie L en 1 par valeurs inférieures.
   c. Montrer par double inégalité que : $L = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Utilisation de séries entières.

11. Soit la fonction f définie sur ℝ par :
   - $f(0) = \dfrac{1}{2}$,
   - $\forall$ x $\in$ ℝ*, $f(x) = \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

   a. Montrer que f admet un développement en série entière en 0.
   b. En déduire que f est de classe C^∞ sur ℝ.
   c. Préciser le développement en série entière en 0 de sa primitive qui s'annule en 0.

12. Soit F la fonction définie sur ℝ* par : $\forall\ x \in$ ℝ*, $F(x) = \int_x^{2.x} \dfrac{\cos(t)}{t}.dt$.
   a. Justifier que F est bien définie sur ℝ*.
   b. Montrer que F se prolonge sur ℝ en une fonction de classe C^∞ et préciser $F(0)$.

13. a. Montrer que : $\forall\ a > 0$, la fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^a}$, admet un développement en série de fonctions sur [0,1[.
   b. Montrer que cette série admet une primitive sous forme de série qui converge uniformément sur [0,1].
   c. En déduire que : $\forall\ a > 0$, $\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^a} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+n.a}$.
   d. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2.n+1}$, et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3.n+1}$.

14. On note, pour x réel : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$, et : $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right).x^n$.
   a. Montrer que ces deux séries entières ont le même rayon de convergence R et préciser la valeur de $f(x)$ sur l'intervalle ouvert de convergence.
   On note : $\forall\ x \in\ ]-R,+R[$, $h(x) = g(x) - f(x)$.
   b. Montrer que h est une série entière définie sur $[-R,+R]$.
   c. En déduire un équivalent de $g(x)$ en 1.
   d. En revenant à des sommes partielles, montrer que : $h(1) = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

15. En utilisant une décomposition en éléments simples, montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0, en donnant l'intervalle sur lequel ce développement est valable :

    a. $x \mapsto \dfrac{x^2+x+3}{x^2-1}$, b. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2.x.\cos(\theta)+1}$, pour : θ ∈ ℝ.

16. En commençant par dériver les fonctions proposées (après justification), montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0, en donnant l'intervalle sur lequel ce développement est valable :

    a. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$, b. $x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}.\tan(\alpha)\right)$, avec : $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$,

    c. $x \mapsto \int_0^x sh(t^2).dt$.

17. A l'aide des formules de linéarisation, montrer que les fonctions $\sin^3$ et $\cos^3$ sont développables en série entière sur ℝ.

18. On note f la fonction définie par : $\forall\ x \in [-1,+1[$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

    a. Transformer l'écriture de f pour faire apparaître un produit.

    b. Montrer que f est développable en série entière en précisant l'intervalle où ce développement est valable.

19. Soit (a_n) la suite définie par :

    - $a_0 = 1$,
    - $a_0 = 3$,
    - $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3.a_{n+1} - 2.a_n$.

    On note par ailleurs, pour x réel : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!}.x^n$.

    a. Calculer la valeur de a_n pour tout entier n.

    b. En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière S.
    On reprend l'exercice par une autre méthode.

    c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq 4^n$, et en déduire le rayon de convergence de S.

    d. Pour x réel, exploiter la relation définissant (a_n) pour trouver une équation différentielle vérifiée par S.

    e. Retrouver la valeur de $S(x)$ pour tout réel x.

20. Pour : $p \in \mathbb{N}$, et : $z \in \mathbb{C}$, on pose : $f_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p}.z^n$.

    a. Déterminer le rayon de convergence R_p de cette série entière.

    b. Simplifier, pour : x réel, $x \in\ ]-R_p,+R_p[$, l'expression $(1-x).f_p'(x)$.

    c. Retrouver la valeur de $f_p(x)$, pour : $x \in\ ]-R_p,+R_p[$.

    d. Montrer par récurrence que la valeur trouvée à la question c. est encore valable pour tout : $p \in \mathbb{N}$, et tout z complexe tel que : $|z| < 1$.
    On pourra calculer et transformer $(1-z).f_{p+1}(z)$.

21. Déterminer le rayon de convergence R puis, à l'aide de combinaisons linéaires, la somme des séries entières suivantes :

    a. $\sum_{n\geq 0} (n^2+n+1).x^n$, b. $\sum_{n\geq 0} (n+(-1)^n).x^n$,

c. $\sum_{n\geq 1}\left(n-\frac{1}{n}\right).x^n$, d. $\sum_{n\geq 1}\frac{ch(n)}{n}.x^n$.

22. Déterminer le rayon de convergence R puis, à l'aide de décompositions en éléments simples, la somme des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+3.n+4}{n+1}.x^n$, b. $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n.(n-1)}.x^n$.

23. Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n.(n-1).2^n}$.

Produit de Cauchy.

24. a. Rappeler le développement en série entière de la fonction : $x\mapsto\frac{1}{1-x}$, en rappelant son rayon de convergence.
b. Donner la série entière correspondant au produit de Cauchy de la série précédente par elle-même.
c. Vérifier ce résultat en dérivant la fonction initiale.

Autour de l'exponentielle complexe.

25. Montrer que : $\forall(z,N)\in\mathbb{C}\times\mathbb{N}$, $\left|e^z-\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!}\right|\leq e^{|z|}-\sum_{n=0}^{N}\frac{|z|^n}{n!}$.

26. Résoudre : $\sin(z)=2$.

<u>Niveau 2.</u>
Calcul de rayons de convergence.

27. Calculer le rayon de convergence des séries suivantes :
a. $\sum_{n\geq 0}a_n.x^n$, où : $a_n=1$, si n est pair, et : $a_n=2^n$, si n est impair,
b. $\sum_{n\geq 0}a_n.x^n$, où a_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de $\sqrt{2}$.

28. Soient a et b des réels tels que : $0<a<b$.
On note (a_n) la suite définie par : $\forall\ n\in\mathbb{N}$,
- $a_n=a^n$, si n est pair,
- $a_n=b^n$, si n est impair.

Déterminer le rayon de convergence R et la somme lorsqu'elle converge de la série entière $\sum_{n\geq 0}a_n.x^n$.

29. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n.\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.z^n$, b. $\sum_{n\geq 0}\frac{z^{n^2}}{n!}$,

c. $\sum_{n\geq 1}\frac{\sum_{k=1}^{n}sh(k)}{n.e^n}.z^n$, d. $\sum_{n\geq 1}\left(\arccos\left(1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\right).z^n$,

e. $\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{1+b^n}.z^n$, où : $(a,b)\in\mathbb{R}^{+*2}$, f. $\sum_{n\geq 1}\left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}.z^n$, où : $a\in\mathbb{R}$.

Produit de Cauchy.

30. a. Donner le développement en série entière de : $x \mapsto sh^2(x)$, en utilisant un produit de Cauchy.
   b. Retrouver ce résultat en utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique.

31. En utilisant deux écritures du développement en série entière de : $x \mapsto \sin^2(x)$, donner la valeur, pour tout entier : $n \in \mathbb{N}^*$, de : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2.n}{2.k+1}$.

Propriété de sommes de séries entières.

32. Soit la série entière $\sum_{n\geq 2} (-1)^n.\ln(n).x^n$.
   a. Calculer son rayon de convergence (on notera S sa somme).
   b. Montrer : $\forall\ x \in$]-1,1[, $S(x) = \frac{1}{1+x}.\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).x^{n+1}$.
   c. En déduire que : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} S(x) = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   d. En utilisant la formule de Wallis : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2^n.n!)^2}{(2.n)!\sqrt{2.n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, (ou Stirling), calculer la limite de la question c.

33. Soit : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, la somme d'une série entière de rayon de convergence égal à 1.
   On pose, pour : $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, et pour : $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n.x^n$, de rayon de convergence noté R.
   a. Montrer que si : $|x| < R$, alors $S(x)$ converge.
   b. Montrer que si : $|x| < 1$, la suite $(S_n.x^n)$ est bornée.
   c. En déduire la valeur de R.
   d. Montrer que : $\forall\ |x| < 1$, $S(x) = (1-x).f(x)$.

34. Soit P un polynôme à coefficients réels, et f définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(P(x))$.
   On suppose que :
   - les coefficients du développement en série entière de f en 0 sont tous positifs ou nuls,
   - $\exists\ x_0 \geq 0$, $f'(x_0) = 0$, et : $P'(x_0) = 0$.

   Montrer que : $P''(x_0) \geq 0$.

Utilisation de séries entières.

35. a. Rappeler le développement en série entière de la fonction $\arctan$ en précisant l'intervalle sur lequel ce développement est valable.
   b. En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée que : $\int_0^1 \arctan(x).dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2.n+1).(2.n+2)}$.
   c. En déduire une valeur approchée rationnelle de l'intégrale à 10^{-3} près.

36. On note : $S(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.
   a. Montrer que S se développe en série entière sur]-1,1[puis que S se prolonge par continuité en 1.
   b. En déduire que : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2.n}{n}}{4^n.(4.n+1)}$.

37. a. Rappeler le développement en série entière de $\arcsin$ sur]-1,+1[.
b. Justifier que ce développement est également valable en ± 1.
c. Calculer de deux façons l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin(t)).dt$.
d. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2.n+1)^2}$.

Développements en série entière, calcul de sommes de séries entières.

38. a. Pour : $x \in \mathbb{R}$, et : $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, calculer la partie imaginaire de $\frac{\sin(\theta).e^{i.\theta}}{1-x.\sin(\theta).e^{i.\theta}}$.
b. En déduire le développement en série entière de : $f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{\tan(\theta)}\right)$.

39. a. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}$[X].
Déterminer le rayon de convergence R de $\sum P(n).x^n$.
b. On note :
- $P_0 = 1$,
- $\forall\ n \geq 1,\ P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$.

Montrer que ($P_0, P_1, P_2,..., P_n,...$) forme une base de $\mathbb{C}$[X].
c. Montrer alors que : $\exists\ Q \in \mathbb{C}$[X], $\exists\ N \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in]-R,+R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n).x^n = \frac{Q(x)}{(1-x)^{N+1}}$.
d. En déduire un algorithme permettant de calculer la somme de la série entière précédente pour tout polynôme P .
e. Appliquer cette méthode à : $\sum (n^2 + n + 1).x^n$, $\sum n^3 x^n$.

40. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 0$, et pour x non nul : $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.
a. Montrer que f est continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$*.
b. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$* et donner par récurrence la forme de $f^{(n)}$ sur $\mathbb{R}$*.
c. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et préciser $f^{(n)}(0)$ pour tout entier n .
d. Etudier la série de Taylor de f en 0.
e. Qu'en déduit-on ?

41. a. Déterminer le rayon de convergence et la somme des série entières $\sum_{n\geq 0} \cos(n.\theta).x^n$, et $\sum_{n\geq 0} \sin(n.\theta).x^n$,
pour : $\theta \in \mathbb{R}$.
b. En déduire le rayon de convergence des séries entières : $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n.\theta)}{n}.x^n$, et : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n.\theta)}{n}.x^n$.
c. Soit z un complexe non nul, tel que : $z = \rho.e^{i.\theta}$, avec : $\rho > 0$, et : $\theta \in]-\pi,+\pi[$.
Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

<u>Niveau 3.</u>
Calcul de rayons de convergence.
42. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :
a. $\sum_{n\geq 0} \left(\arctan\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{\pi}{4}\right).z^n$, b. $\sum_{n\geq 1} e^{-(\ln(n))^a}.z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$,

c. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^{a+(-1)^n}}.z^n$, où : $a \in \mathbb{R}$,

d. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}}\sin(x^2).dx\right).z^n$.

On pourra étudier, pour z réel, le problème de la convergence de ces séries en ±R.

43. a. Déterminer le rayon de convergence des séries : $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(n)}{n^2+1}.z^n$, et : $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\sin(n)}{\sqrt{n+(-1)^n}}.z^n$.

b. Préciser la nature de la série au bord de l'intervalle de convergence pour la première d'entre elles.

Transformation d'Abel et application aux séries entières.

44. Pour (u_n) et (v_n) deux suites réelles ou complexes, on note : $\forall\ p \in \mathbb{N}^*$, $\sigma_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} v_k$.

a. Montrer que : $\forall\ p \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k.v_k = u_p.\sigma_p + \sum_{k=1}^{p-1}(u_k - u_{k+1}).\sigma_k$.

b. On suppose de plus que ces suites sont telles que :

- (u_n) est réelle, décroissante de limite 0,
- la suite (σ_p) est une suite bornée.

Montrer que la série de terme général $u_n.v_n$ converge.

c. Donner le rayon de convergence et l'étude au bord des séries entières suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^\alpha}$, avec : $\alpha \in \mathbb{R}$,

b. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{\cos(n)}{n}.x^n$.

45. Soit : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$, une série entière réelle ou complexe de rayon de convergence fini non nul R , qu'on supposera égal à 1, l'exercice s'adaptant si : $R \neq 1$.

On suppose que S converge sur [0,1], que : $S(1) = 0$, et on note : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

a. Montrer que : $\forall\ x \in [0,1[$, $S(x) = (1-x).\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n.x^n$.

b. Pour : $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe : $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall\ x \in [0,1[$, $|S(x)| \leq (1-x).\displaystyle\sum_{n=0}^{n_0}|S_n| + \frac{\varepsilon}{2}$.

c. En déduire que S est continue en 1.

d. A-t-on le même résultat si on ne suppose plus : $S(1) = 0$?

Produit de Cauchy.

46. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, à valeurs complexes (on pourra se restreindre aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

On suppose que :

- $f(0) = 1$,
- $\exists\ R > 0$, $\exists\ (a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $(|z| < R) \Rightarrow (f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.z^n)$,

autrement dit que f se développe en série entière en 0 (R étant éventuellement infini).

a. Justifier que f ne s'annule pas sur un voisinage de 0.

b. Montrer qu'il existe une unique suite complexe (b_n) telle que :

- $b_0 = 1$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k.b_{n-k} = 0$.

c. Soit : $0 < r < R$.

Montrer qu'il existe : $M > 0$ tel que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\left|a_n.r^n\right| \leq M$, et : $\left|b_n.r^n\right| \leq (M+1)^n$.

d. En déduire que $\dfrac{1}{f}$ se développe en série entière en 0 et préciser ce développement.

e. Montrer que l'application : $z \mapsto \dfrac{z}{e^z - 1}$, se développe en série entière en 0 et que le rayon de convergence R de ce développement vérifie : $0 < R \leq 2.\pi$.

47. Pour : $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = e^{-x^2}.\int_0^x e^{t^2}.dt$

a. Justifier l'existence de $f(x)$ pour tout réel x puis donner le développement de f en série entière.

b. Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre dont f est solution, puis retrouver un développement de f en série entière.

c. En déduire que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2.k+1}.\binom{n}{k} = \frac{4^n}{(2.n+1).\binom{2.n}{n}}$.

Propriétés de sommes de séries entières.

48. Soit la suite réelle (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p.u_q$.

On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, et on suppose le rayon de convergence R de f non nul.

Soit alors x réel tel que : $|x| < R$.

a. Montrer que $f(x)$ est racine d'une équation du 2nd degré, et en déduire que : $R \geq \dfrac{1}{4}$.

A-t-on montré que R est non nul ?

b. Donner la valeur de la racine $g(x)$ de l'équation précédente qui permet de définir une fonction se prolongeant par continuité en 0.

c. Montrer que g admet un développement en série entière de sur $\left]-\dfrac{1}{4},+\dfrac{1}{4}\right[$, dont les coefficients (v_n) vérifient la même relation de récurrence que (u_n).

d. Montrer que pour tout n : $u_n = v_n$, et préciser u_n pour tout n, puis un équivalent de u_n en $+\infty$.

49. On pose pour x réel : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n).x^n$.

a. Donner l'ensemble de définition de f puis montrer que : $\forall\ x \in [0,1[$, $(1-x).f(x) = -\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).x^n$.

b. A l'aide de la fonction : $x \mapsto f(x) + \ln(1-x)$, trouver un équivalent de $f(x)$ en 1.

Utilisation de développements en série entière.

50. Résoudre l'équation d'inconnue x : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3.n+1)^2.x^n = 0$.

51. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}.dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

52. a. Montrer que pour tout x dans]-1,1[, la fonction φ_x définie par : $t \mapsto \dfrac{\ln(1 + x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)}$, peut se prolonger en une fonction continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

b. Montrer alors que : $\forall\ x \in$]-1,1[, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x^2.\sin^2(t))}{\sin^2(t)}.dt = \pi.(\sqrt{1+x}-1)$.

53. Soit (u_n) la suite définie par :

- $u_0 = u_1 = 0$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + n + 1$.

On cherchera par à calculer u_n pour le moment, et on note : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.x^n$.

a. A l'aide d'un encadrement de u_n pour tout entier : $n \geq 2$, montrer que le rayon de convergence de la série entière S vaut 1.

b. Trouver une relation, pour : $x \in$]-1,+1[, entre $S(x)$ et x, et en déduire une expression de $S(x)$ sous forme de fraction rationnelle.

d. En déduire la valeur de u_n pour tout entier n.

54. On note a_n le nombre de façons de payer n euros à l'aide de pièces de 1 et 2 euros.

On note par ailleurs : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$.

a. Montrer que a_n est le nombre couples d'entiers positifs solutions de l'équation : $n = n_1 + 2.n_2$.

b. Montrer que S est définie au moins sur]-1,+1[.

c. Montrer que S peut s'écrire comme le produit de Cauchy de 2 séries entières.

d. Reconnaître la fonction S et à l'aide d'une décomposition en éléments simples, calculer son développement en série entière, puis en déduire la valeur de a_n pour tout entier n.

Calcul de sommes de séries entières.

55. Déterminer le rayon de convergence R et la somme des séries entières :

a. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{(-1)^n}}{n}.x^n$,

b. $\sum_{n\geq 0} (-1)^n.\frac{x^n}{(2.n)!}$,

c. $\sum_{n\geq 1} \frac{4.n+1}{n^2+n-2}.x^n$,

d. $\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n}.x^n$.

56. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n.x^n$ une série entière de rayon de convergence R_a.

Déterminer le rayon de convergence R_b de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n.x^n$ où : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{a_n}{1+|a_n|}$.

57. Pour x réel on note : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.(x^n + (1-x)^n)$.

a. Justifier que f est définie sur un segment $[a,b]$ à préciser.

b. A l'aide d'une série entière, montrer que f est dérivable sur $]a,b[$ et préciser $f'(x)$.

c. En admettant que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donner la valeur de $f(x)$ pour tout réel x dans $[a,b]$.

Autour des fonctions sinus et cosinus et de l'exponentielle complexe.

58. Dans cet exercice, on va supposer inconnues les fonctions sinus et cosinus.

On note : $C(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.t^{2.n}}{(2.n)!}$, et : $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.t^{2.n+1}}{(2.n+1)!}$.

a. Montrer que le rayon de convergence de ces séries est +∞, et que : $\forall$ t $\in \mathbb{C}$, $|C(t) + i.S(t)| = 1$.

b. Montrer que C et S sont de classe C$^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et relier C' et S' à C et S.

c. Préciser $C(0)$ et $S(0)$.

d. Montrer que C est positive sur un voisinage de 0, et que : $C(2) < 0$.
Justifier l'existence de : $\alpha = \inf\{x > 0, C(x) < 0\}$.

e. Montrer que : $\alpha \neq 0$, puis : $C(\alpha) = 0$, et en déduire que : $S(\alpha) = 1$.

f. Calculer $C(2.\alpha)$, montrer que les fonctions C et S sont $4.\alpha$ – périodiques, tracer leur tableau de variations sur $[0,4.\alpha]$, et retrouver leurs propriétés élémentaires.

g. Montrer enfin que : $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $(|z| = 1) \Rightarrow (\exists\,!\ \theta \in [0,4.\alpha[,\ z = C(\theta) + i.S(\theta))$.

Développements en série entière.

59. Pour les fonctions suivantes, montrer qu'elles sont développables en série entière autour de 0, préciser ce développement et donner le rayon de convergence des séries obtenues :

a. à l'aide d'une équation différentielle : $e^{a.\arcsin(x)}$, pour : $a \in \mathbb{R}$ (en précisant le car particulier : $a = 1$),

b. en développant la fonction sous l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x.\sin^2(t)).dt$.

60. Soit f une fonction de classe C$^\infty$ de $]-a,+a[$ dans $\mathbb{R}$, avec : $a > 0$, et telle que :
$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x \in]-a,+a[,\ f^{(n)}(x) \geq 0$.

a. Justifier que f et toutes ses dérivées sont croissantes sur $]-a,+a[$.

b. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x \in \mathbb{R}$, $|x| < r < a$, $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k = \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-u)^n.f^{(n+1)}(x.u).du$.

c. En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, \forall\ 0 < r < a$, $(|x| < r) \Rightarrow \left(\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.x^k\right| \leq \left|\frac{x}{r}\right|^{n+1}.f(r)\right)$.

d. En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $]-a,+a[$.

e. Montrer que $\tan$ est telle que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \tan^{(n)} = P_n(\tan)$,
où P_n est un polynôme de parité égale à celle de $n+1$, à coefficients positifs.

f. En déduire que $\tan$ est développable en série entière sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ puis que $\left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[$.

61. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} sh(a^n.x)$, où : $0 < a < 1$.

a. Montrer que f est effectivement définie et de classe C$^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Etudier si f est développable en série entière en 0.

62. On pose : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n.(n+x)}$.

a. Montrer que S est définie au moins sur]-1,+1[.

b. Montrer que : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k.x^k}{n^{k+2}}\right)$.

On pose : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\sigma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k.x^k}{n^{k+2}}\right)$, et : $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k.x^k}{n^{k+2}}\right)$.

c. Justifier que : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $S_N(x)$ est la somme partielle d'ordre N de $S(x)$.

d. Montrer que $\sigma(x)$ converge pour tout x dans]-1,+1[, puis à l'aide d'une comparaison série-intégrale que : $\forall\ x \in$]-1,+1[, $\forall\ N \in \mathbb{N}^*$, $|\sigma(x) - S_N(x)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{(k+1).N^{k+1}}$.

e. En utilisant une série de fonctions, en déduire que : $\lim_{N \to +\infty} S_N(x) = \sigma(x)$.

f. Conclure que S est développable en série entière sur]-1,+1[et préciser ce développement.