Révisions d'analyse.

Exercices 2017-2018.

Niveau 1.

Limites des fonctions de variable réelle à valeurs dans ℝ ou ℂ.

1. Soit f définie sur ℝ par :

   $\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a. Montrer que f admet une limite finie en 0 et donc un prolongement par continuité en 0.

   b. Etudier la limite de f en $+\infty$.

Continuité des fonctions de variable réelle à valeurs dans ℝ ou ℂ, fonctions lipschitziennes.

2. Montrer que : $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$, est définie et continue sur ℝ.

3. Soit f continue de [0,1] dans [0,1].
   Montrer que f admet un point fixe.

4. Soit f continue de ℝ dans ℝ, telle que : $f(0) = 1$, $f(1) = 0$.
   Montrer qu'il existe : $x \in [0,1]$, $f(x) = x$.

5. Montrer que la fonction sinus est 1-lipschitzienne sur ℝ.

6. Soit f k-lipschitzienne de ℝ dans ℝ, avec : $0 \le k < 1$, et : $f(0) = 0$.
   Soit par ailleurs la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
   Montrer que (u_n) tend vers 0.

7. Soient f une application continue de ℝ dans ℝ, telles que : $\forall\ x \neq 0$, $|f(x)| < |x|$.

   a. Transformer l'écriture de l'hypothèse faite sur f en faisant apparaître une nouvelle fonction.

   b. Montrer que : $\forall\ 0 < a < b$, $\exists\ 0 < k < 1$, $\forall\ x \in [a,b]$, $|f(x)| \le k.|x|$.

Dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

8. Expliquer si les deux fonctions suivantes sont continues, dérivables, C^1 sur ℝ.
   - $x \mapsto x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pour : $x \neq 0$, et : $0 \mapsto 0$,
   - $x \mapsto x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, pour : $x \neq 0$, et : $0 \mapsto 0$.

9. a. Calculer la dérivée (après avoir justifié son existence) des fonctions suivantes :
   - $x \mapsto \arctan(e^x)$,
   - $x \mapsto \arctan(sh(x))$,
   - $x \mapsto \arctan\left(th\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

   b. En déduire des relations entre ces trois fonctions.

10. Montrer que la fonction f définie par :
    - $\forall\ x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = x^{n+1}$,
    - $\forall\ x \in \mathbb{R}^{-*},\ f(x) = 0$,

    est de classe C^n sur ℝ.

Développements limités.

11. Déterminer les développements limités des fonctions proposées, aux points et aux ordres indiqués :

- $DL_3(0)$ de $\ln\left(\dfrac{1-x^2}{1+x}\right)$,
- $DL_3(0)$ de $\ln(\cos(x))$,
- $DL_2(1)$ de $\dfrac{x-1}{\ln(x)}$,
- $DL_3(+\infty)$ de $x.\ln(x+1)-(x+1).\ln(x)$,
- $DL_3(+\infty)$ de $\arctan(x)$.

12. Déterminer la limite en $+\infty$ de $(n.\sin\left(\dfrac{1}{n}\right))^{n^2}$.

13. Soit la fonction f définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x)=(x+1).\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   a. Montrer que la courbe représentative de f présente sur $\mathbb{R}^+$ deux branches infinies.
   b. Préciser cette branche infinie en 0.
   c. A l'aide d'un développement limité, montrer que la courbe présente une asymptote en $+\infty$ puis préciser la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

Suites explicites, réelles ou complexes, suites récurrentes.

14. Déterminer la limite éventuelle des suites ci-dessous :

- $u_n=\dfrac{1}{2^n}$,
- $v_n=\dfrac{n^2+1}{n^4}$,
- $w_n=\dfrac{n^3+1}{n!}$,
- $u_n=\dfrac{a^n}{\sqrt{n!}}$ ($a \in \mathbb{R}$),
- $v_n=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dots+\dfrac{1}{n.(n+1)}$.

15. Suites arithmético-géométriques.
   Soit (u_n) une suite définie par :

   - $u_0 \in \mathbb{C}$,
   - $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}=a.u_n+b$, avec : $a\neq 1$, $(a,b)\in\mathbb{C}^2$.

   a. Montrer qu'il existe un unique : $\lambda \in \mathbb{C}$, tel que : $\lambda=a.\lambda+b$.
   b. Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n=u_n-\lambda$, est une suite géométrique.
   c. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que (u_n) converge et préciser alors dans ce cas la limite de cette suite (u_n).

16. Soit (u_n) une suite définie par :

   - $u_0>0$,
   - $\forall\ n\geq 0$, $u_{n+1}=\sqrt{\sum_{k=0}^{n}u_k}$.

   a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
   b. Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1} valable pour tout entier : $n\geq 1$.
   c. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.
   d. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1$, puis que : $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\dfrac{1}{2}$.

Suites récurrentes linéaires, ou définies à partir de : $u_{n+1}=f(u_n)$.

17. Etudier la suite définie par : $u_0 = 2$ et : $\forall\ n \geq 0$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

18. Soit (u_n) définie par :
- $u_0 \in \mathbb{R}$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2.u_n - u_n^2$.

On note f et ϕ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2.x - x^2$, et : $\phi(x) = f(x) - x$.

a. Déterminer les points fixes de f ainsi que le signe de ϕ.

b. Etudier les variations de la fonction f, et montrer l'existence de deux intervalles fermés que l'on notera I et J, stables par f et sur lesquels ϕ garde un signe constant.

c. Etudier la suite (u_n) si u_0 est un point fixe de f.

d. Etudier de même la suite (u_n) si : $u_0 \in I \cup J$.

e. Etudier la suite (u_n) dans les autres cas.

19. Suite de Fibonacci.

Etudier la suite définie par : $u_0 = u_1 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Généraliser aux suites : $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Niveau 2.

Limites des fonctions de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

20. Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$.

Etudier la limite en 0 des fonctions f et g définies par :

$\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{x}{a}.\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$, et : $g(x) = \dfrac{a}{x}.\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$.

On pourra revenir pour cela à la définition de la fonction partie entière.

21. Soit f définie et T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que f est constante.

Continuité des fonctions de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

22. a. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(2.x) = f(x)$.

Avec la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$, où : $a \in \mathbb{R}$, montrer que f est constante.

b. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(3.x+1) = f(x)$.

Définir, en s'inspirant de la question a, une suite (u_n), adaptée à la fonction f, telle que : $u_0 = a$.

Montrer que la suite (u_n) converge toujours vers la même valeur α.

En déduire que f est constante.

En quelle valeur aurait-il suffi de supposer f continue ?

23. Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $f(0) = f(1)$, et soit : $n \geq 2$.

En utilisant un raisonnement par l'absurde et la fonction définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$,

montrer que : $\exists\ x \in [0,1]$, $f(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$.

24. a. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $(f(x))^2 = (g(x))^2 \neq 0$.

En utilisant la fonction $\dfrac{f}{g}$, montrer que : $f = g$, ou : $f = -g$.

b. En déduire que si f est continue de ℝ dans ℝ et vérifie : $\forall\ x \in$ ℝ, $f(|x|) = |f(x)| > 0$,
alors f est paire.

25. Soient f, g, h trois fonctions continues de [0,1] dans ℝ, telles que :
- $\forall\ x \in [0,1]$, $g(x) \neq h(x)$,
- $\forall\ x \in [0,1]$, $f(x) = g(x)$, ou : $f(x) = h(x)$.

a. Montrer par l'absurde que : $g < h$, ou : $h < g$.

b. On définit la fonction φ par : $\forall\ x \in [0,1]$, $\varphi(x) = \dfrac{g(x)+h(x)}{2}$.

En utilisant $f - \varphi$, montrer que : $f = g$, ou : $f = h$.

26. Soit : $(a,b) \in$ ℝ².
Soit f continue de $[a,b]$ dans ℂ, telle que : $\forall\ t \in [a,b]$, $(\mathrm{Re}(f(t)) = 0) \Rightarrow (\mathrm{Im}(f(t)) \neq 0)$.
Montrer que : $\exists\ m \in$ ℝ⁺*, tel que : $\forall\ t \in [a,b]$, $|f(t)| \geq m$.

Dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

27. Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans ℝ telle qu'il existe (A,α) dans ℝ⁺*×]1,+∞) tel que :
$\forall\ (x_1,x_2) \in I^2$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq A.|x_1 - x_2|^{\alpha}$.
Montrer que f est constante.

28. On veut trouver toutes les fonctions f de ℝ dans ℝ dérivables qui vérifient :
$\forall\ (x,y) \in$ ℝ², $f(x).f(y) = f(x+y)$.

a. Montrer que $f(0)$ vaut 0 ou 1.

b. Trouver les fonctions f solutions lorsque : $f(0) = 0$.

c. On suppose maintenant que : $f(0) = 1$.
En dérivant par rapport à y, en déduire une équation différentielle vérifiée par f.
Résoudre cette équation puis résoudre finalement le problème initial.

29. Soit f une fonction de classe C² de ℝ⁺ dans ℝ, telle que : $f'(0) = 0$.
Montrer qu'il existe une fonction g de classe C¹ de ℝ⁺ dans ℝ telle que : $\forall\ x \in$ ℝ⁺, $g(x^2) = f(x)$.

30. Soient : $n \in$ ℕ*, f une fonction de ℝ⁺* dans ℝ, n fois dérivable sur ℝ⁺*, et g_n définie pour un entier n non nul par : $\forall\ x \in$ ℝ⁺*, $g_n(x) = x^{n-1}.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a. Montrer que g est n fois dérivable sur ℝ⁺*.

b. Montrer par récurrence (proprement) que : $\forall\ x \in$ ℝ⁺*, $g_n^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}}.f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

31. Soit f de I dans ℂ, dérivable sur I, telle que : $\forall\ t \in I$, $f(t) \neq 0$.
Montrer que $|f|$ est croissante si et seulement si : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{f'}{f}\right) \geq 0$.

32. Théorème de Rolle généralisé.
Soit f une fonction de $[a,+\infty)$ dans ℝ, continue sur $[a,+\infty)$, dérivable sur $]a,+\infty)$, telle que f admette une limite finie en +∞ et : $f(a) = \lim\limits_{x \leftarrow +\infty} f(x)$.
On définit la fonction intermédiaire g par : $\forall\ x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g(x) = f(a + \tan(x))$.

a. Montrer que g se prolonge en une fonction définie et continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b. Montrer qu'il existe une valeur : $\gamma \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, telle que : $g'(\gamma) = 0$.

c. En déduire qu'il existe : $c \in \left]a,+\infty\right)$, telle que : $f'(c) = 0$.

d. Généraliser ce résultat en un énoncé pour une fonction définie sur ℝ.

Développements limités.

33. Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + x - 2).\tan\left(\frac{\pi}{2}.x\right) \; ; \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2} \; ; \qquad \lim_{n\to+\infty}(3.\sqrt[n]{2} - 2.\sqrt[n]{3})^n .$$

34. Déterminer les développements limités ou asymptotiques suivants aux points et aux précisions indiqués :

DL$_3$(0) : $\ln(3.e^x + e^{-x})$; DL$_3$(0) : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$;

DL$_7$(0) : $\sin(sh(x)) - sh(\sin(x))$; DL$_3$(2.π) : $\sin(\sqrt{x^2 - 3.\pi^2})$;

Dl$_5$(0) : $\arctan\left(\frac{2.(1-x)}{1+4.x}\right)$.

35. Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1.

Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

36. Soit f définie et décroissante de ℝ dans ℝ, telle que : $f(x) + f(x+1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

a. Montrer que f admet une limite en +∞ que l'on précisera.

b. Donner un équivalent de $f(x)$ en +∞.

37. Montrer que la fonction tangente est C$^\infty$ au voisinage de 0, et vérifie :

$\forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Retrouver ainsi son DL$_9$(0).

Suites explicites réelles ou complexes.

38. Soit : $x \in$ ℝ, et pour : $n \geq 1$, $u_n = \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2.x\rfloor + \ldots + \lfloor n.x\rfloor}{n^2}$.

Etudier la convergence de (u_n) et en déduire que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

39. Etudier la convergence de la suite définie par : $\forall\ n \in$ ℕ*, $u_n = (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$, avec : $(a,b) \in$ ℝ$^{+*2}$..

On pourra distinguer les cas : $a = b$, et : $a > b$.

Est-ce alors utile d'étudier le cas : $a < b$?

40. On définit la suite (z_n) par : $\forall\ n \in$ ℕ, $z_n = e^{i.n}$.

a. Montrer que la suite $(z_{n+1} - z_n)$ ne tend pas vers 0.

b. En déduire que la suite (z_n) diverge et que l'une au moins des deux suites $(\cos(n))$ et $(\sin(n))$ diverge.

c. On suppose que la suite $(\cos(n))$ converge.

En utilisant le développement de $\cos(n+1)$, en déduire que la suite $(\sin(n))$ converge et aboutir à une contradiction.

Que vient-on de démontrer ?

d. En utilisant un raisonnement similaire, en déduire que les deux suites ($\cos(n)$) et ($\sin(n)$)) divergent.

e. Généraliser aux suites ($e^{i.n.\theta}$)$_{n\in\mathbb{N}}$, ($\cos(n.\theta)$)$_{n\in\mathbb{N}}$, et ($\sin(n.\theta)$)$_{n\in\mathbb{N}}$, avec : $\theta \in \mathbb{R}$.
On sera amené à distinguer le cas particulier : $\theta = 0 \pmod{\pi}$.

41. Etudier, pour a et b complexes de modules distincts, la suite (u_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{a^n + b^n}{a^n - b^n}$.

On pourra par exemple supposer que : $|a| > |b|$, dans un premier temps.

42. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$, et : $\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}.\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}}$.

En déduire que : $\pi = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n.\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}\right)$.

Suites récurrentes linéaires, ou définies à partir de : $u_{n+1} = f(u_n)$.

43. Etudier la suite définie par : $u_0 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

44. Etudier la suite (u_n) définie par : $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n.u_{n+1}$, avec : $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$.

Suites adjacentes.

45. Pour : $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$, on pose : $u_0 = a$, $v_0 = b$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$, $v_{n+1} = \sqrt{u_n.v_n}$.

Montrer que les deux suites sont bien définies, adjacentes et donc convergentes.
On appelle leur limite commune la moyenne arithmético-géométrique de a et de b (à ne pas confondre avec les *suites* arithmético-géométriques).

46. Etudier de même la moyenne arithmético-harmonique de a et de b (avec : $(a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$) définie comme la limite commune des deux suites adjacentes données par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{2.u_n.v_n}{u_n + v_n}.$$

Un peu de théorie.

47. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans [0,1] telles que ($u_n.v_n$) converge vers 1.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

48. Soit (z_n) une suite de complexes, avec : $z_n = a_n + i.b_n$, où a_n et b_n sont réels.

On suppose que : $z = a + i.b$, est valeur d'adhérence de la suite (z_n).

a. Montrer que a est valeur d'adhérence de la suite (a_n) et b de la suite (b_n).

b. Etudier la réciproque de l'implication précédente.

<u>**Niveau 3.**</u>
Limite des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

49. Soit f l'application définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{p\to+\infty}(\cos(n!.\pi.x))^{2.p}\right)$.

Montrer que f est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, autrement dit : $\forall\ x \in \mathbb{R}$,

- ($x \in \mathbb{Q}$) $\Rightarrow$ ($f(x) = 1$),
- ($x \notin \mathbb{Q}$) $\Rightarrow$ ($f(x) = 0$).

Continuité des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$.

50. On veut trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues qui vérifient :

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x).f(y) = f(x+y)$.

a. Montrer que $f(0)$ vaut 0 ou 1.

b. Que dire de f si : $f(0)=0$?

Dans le cas où : $f(0)=1$, on pose : $f(1)=\alpha$.

c. Calculer l'image de tous les entiers positifs, puis de tous les entiers négatifs en fonction de α.

d. Calculer l'image de tous les nombres rationnels.

e. En utilisant la continuité de f, en déduire la valeur de f.

f. Répondre à la question posée.

51. Soient f et g deux applications de [0,1] dans ℝ, continues.

a. Montrer que l'application M, de ℝ dans ℝ, définie par : $M(u) = \sup\limits_{x\in[0,1]} (f(x)+u.g(x))$, est bien définie sur ℝ, et que : $\forall\ u \in \mathbb{R}, \exists\ t_u \in \mathbb{R},\ M(u) = f(t_u)+u.g(t_u)$.

b. On pose : $C = \sup\limits_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

Montrer que : $\forall\ (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ M(u) - M(v) \le C.(u-v)$.

c. En déduire que M est C-lipschitzienne.

52. Soit f continue de [0,+∞) dans [0,+∞), telle que : $fof = id_{[0,+\infty)}$.

a. Montrer que f est strictement croissante sur [0,+∞).

b. Montrer par l'absurde que : $f = id_{[0,+\infty)}$.

Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles.

53. Soit f une fonction dérivable de $[a,+\infty)$ dans ℝ, telle que :

$a>0$, $f(a) = f'(a) = 0$, et : $\exists\ b>0$, $f(b)=0$.

Montrer qu'il existe une valeur : $c>0$, telle que la tangente à la courbe au point de coordonnées $(c, f(c))$ passe par l'origine.

On pourra utiliser une fonction bien choisie et appliquer l'égalité des accroissements finis.

Développements limités.

54. a. Montrer que l'équation : $\tan(x) = x$, admet pour tout n entier une unique solution notée x_n dans l'intervalle : $I_n = \left]n.\pi, n.\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Former le développement asymptotique de x_n à l'infini à la précision $\dfrac{1}{n^2}$.

Suites explicites.

55. a. Montrer que la suite définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{n^n}{3^n.n!}$, est monotone à partir d'un certain rang.

b. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

56. Etudier la convergence des suites :

- $u_n = \dfrac{1!+2!+\ldots+n!}{n!}$,
- $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$,
- $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{2.n}{2.k}}$, (utiliser des encadrements).

Suites récurrentes linéaires.

57. Soit la suite (z_n) définie par : $z_0 \in \mathbb{C}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}.\left(z_n + |z_n|\right)$.

a. Etudier dans quel cas il est possible d'écrire z_n sous la forme : $z_n = \rho_n.e^{i.\theta_n}$, avec : $\rho_n \in \mathbb{R}^{+*}$, et : $-\pi < \theta_n \le \pi$, et ceci pour tout entier n.

On suppose dorénavant que l'écriture précédente est possible pour tout n.

b. Montrer que les suites (ρ_n) et (θ_n) convergent, et que (θ_n) tend vers 0.

c. Déterminer la limite de la suite (ρ_n) puis celle de la suite (z_n).

d. Retrouver la convergence de la suite (z_n) en étudiant les suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ et $(\mathrm{Im}(z_n))$.

Suites adjacentes.

58. Soit f croissante de [0,1] dans [0,1].

a. Montrer, en utilisant une dichotomie, qu'il existe deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) d'éléments de [0,1] telles que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_n \leq f(a_n),\ f(b_n) \leq b_n$, et : $a_n \leq b_n$.

b. En déduire que f admet un point fixe.

Moyenne de Cesàro.

59. Moyenne de Cesàro.

Soit (u_n) une suite de réels ou de complexes.

On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{u_1 + \ldots + u_n}{n}$.

a. Montrer que, si les u_n sont réels et si (u_n) est croissante, alors (v_n) l'est aussi.

b. Montrer que si (u_n) converge, alors (v_n) converge aussi.

c. Etudier les réciproques.

60. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Montrer la convergence de la suite vers 0.

On pose : $v_n = u_{n+1}^{\gamma} - u_n^{\gamma}$.

b. Déterminer γ pour que la suite (v_n) converge vers une limite non nulle.

c. En déduire un équivalent de u_n à l'infini (utiliser l'exercice « Moyenne de Cesàro »).

61. Soit : $\alpha \in \mathbb{R}$, et (u_n) définie par : $u_0 = 1$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt[3]{1 + 3.u_n} - 1$.

a. Montrer que (u_n) converge vers 0.

b. On pose : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ U_n = \dfrac{1}{u_n}$.

Montrer que $(U_{n+1} - U_n)$ tend vers 1 et en déduire un équivalent de U_n, puis de u_n (utiliser l'exercice « Moyenne de Cesàro »).

Exercices généraux sur les suites ; suites extraites.

62. Soit (x_n) une suite ayant deux valeurs d'adhérence distinctes.

a. Cette suite converge-t-elle ?

b. Donner des exemples.

63. Soit (u_n) une suite réelle bornée.

a. Montrer en utilisant une construction de proche en proche et une dichotomie qu'il est possible d'extraire une suite convergente de (u_n).

b. Etablir le même résultat dans le cas d'une suite complexe.

64. Soit (u_n) une suite réelle positive et de limite nulle.

Montrer qu'il est possible d'en extraire une suite décroissante (on pourra étudier le cas où la suite est nulle à partir d'un certain rang).