

# Révisions d'analyse (corrigé niveau 3).

## Limite des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

49. • Supposons que  $x$  soit un rationnel, de la forme :  $x = \frac{a}{b}$ , avec :  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ .

Alors :  $\forall n \geq \max(b, 4)$ ,  $n!x = a \cdot \frac{n!}{b}$ , où  $\frac{n!}{b}$  est un entier qui comporte au moins un facteur 2, donc pair.

Donc :  $\forall n \geq \max(b, 4)$ ,  $\cos(n!\pi x) = 1$ ,

et donc :  $\forall n \geq \max(b, 4)$ ,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\cos(n!\pi x))^{2 \cdot p} = 1$ ,

La suite  $\left( \lim_{p \rightarrow +\infty} (\cos(n!\pi x))^{2 \cdot p} \right)_{n \geq 4}$  est donc constante à la valeur 1 et tend vers 1.

Pour  $x$  rationnel, on vient de montrer que :  $f(x) = 1$ .

• Supposons que  $x$  soit irrationnel, et soit  $n$  un entier donné.

Alors :  $(\cos(n!\pi x) = \pm 1) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, n!\pi x = k\pi) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{k}{n!})$ , et  $x$  est rationnel.

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|\cos(n!\pi x)| < 1$ ,

et la suite  $\left( (\cos(n!\pi x))^{2 \cdot p} \right)_p$  est géométrique de raison strictement inférieure à 1 donc tend vers 0.

Donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\cos(n!\pi x))^{2 \cdot p} = 0$ ,

et la suite  $\left( \lim_{p \rightarrow +\infty} (\cos(n!\pi x))^{2 \cdot p} \right)_{n \geq 4}$  est constante à la valeur 0 et tend vers 0.

Pour  $x$  irrationnel, on vient de montrer que :  $f(x) = 0$ .

## Continuité des fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$ .

50. a. Comme dans l'exercice où l'on suppose  $f$  dérivable :  $f'(0) \cdot f(0) = f'(0)$ , et  $f'(0)$  vaut 0 ou 1.

b. Si :  $f(0) = 0$ , alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \cdot f(0) = 0 = f(x+0) = f(x),$$

et  $f$  est constante égale à 0.

Réciproquement, la fonction nulle répond au problème.

c. On montre par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = \alpha^n$ .

$$\text{D'autre part : } 1 = f(0) = f(1-1) = f(1) \cdot f(-1) = \alpha \cdot f(-1).$$

On en déduit que :  $\alpha \neq 0$ , puis que :  $f(-1) = \alpha^{-1}$ .

Plus généralement :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 = f(0) = f(n-n) = f(n) \cdot f(-n)$ , et :  $f(-n) = \alpha^{-n}$ .

d. Remarquons tout d'abord que  $f$  est à valeurs positives.

$$\text{En effet : } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0, \text{ et en particulier : } \alpha > 0.$$

Soit maintenant :  $r = \frac{p}{q}$ , avec :  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}^*$ .

On a :  $\alpha^p = f(p) = f(r \cdot q) = f(r)^q$ , avec une récurrence immédiate sur  $q$ , donc :

$$f(r) = +(\alpha^p)^{\frac{1}{q}} = \alpha^{\frac{p}{q}} = \alpha^r.$$

e. Soit maintenant un réel quelconque  $x$ .

Il existe une suite de rationnels  $(r_n)$  qui converge vers  $x$ , et puisque  $f$  est continue :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{r_n} = \alpha^x.$$

$f$  est donc une fonction exponentielle puisque si on note :  $a = \ln(\alpha)$ , on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{a \cdot x}.$$

f. La démarche étant une analyse-synthèse, on constate que les candidats trouvés lors de l'analyse sont

bien des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  qui vérifient l'identité imposée : ce sont les solutions du problème.

51. a. Pour  $u$  fixé dans  $\mathbb{R}$ , la fonction :  $x \mapsto f(x) + u.g(x)$ ,  
est continue sur  $[0,1]$  comme combinaison linéaire.  
Donc elle y admet un sup et :  $M(u) = \sup_{x \in [0,1]} (f(x) + u.g(x))$ , existe et est atteint en au moins un point.

Soit :  $\forall u \in \mathbb{R}, \exists t_u \in [0,1], M(u) = f(t_u) + u.g(t_u)$ .

- b. Pour :  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , on peut écrire :

$$M(u) = f(t_u) + u.g(t_u) = f(t_u) + v.g(t_u) + (u - v).g(t_u).$$

On peut alors majorer les deux termes qui apparaissent et :

$$M(u) \leq M(v) + C.(u - v),$$

soit bien :  $M(u) - M(v) \leq C.(u - v)$ .

- c. De même, en renversant les rôles :  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, M(v) - M(u) \leq C.(v - u)$ .

On en déduit que les deux quantités (opposées)  $(M(u) - M(v))$  et  $(M(v) - M(u))$  sont toutes deux majorées par  $C.|u - v|$ .

Donc :  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, |M(u) - M(v)| \leq C.|u - v|$ ,

et  $M$  est bien  $C$ -lipschitzienne.

52. a.  $f$  est donc supposée bijective (égale à sa réciproque) et continue.

Etant définie sur un intervalle, elle est strictement monotone.

Or si  $f$  était décroissante, étant de plus minorée par 0, elle aurait une limite finie en  $+\infty$ .

Donc on aurait :  $f([0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0)) \subset [0, f(0)]$ , et donc :

$$f \circ f([0, +\infty)) \subset [f(f(0)), f(0)],$$

et cet intervalle image par  $f \circ f$  ne pourrait être  $[0, +\infty)$  alors que :  $f \circ f = id_{[0, +\infty)}$ .

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty)$ .

- b. Supposons maintenant que :  $\exists x \in \mathbb{R}^+, f(x) \neq x$ .

- si alors :  $f(x) < x$ , par croissance on en déduit que :  $f \circ f(x) < f(x) < x$ , ce qui est impossible.
- de même si :  $f(x) > x$ , on en déduit que :  $f(f(x)) > f(x) > x$ , également impossible.

Conclusion :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x$ , et :  $f = id_{[0, +\infty)}$

### Dérivabilité des fonctions à valeurs réelles.

53. Pour :  $c \in ]0, +\infty)$ , l'équation de la tangente à la courbe en ce point est :  $y - f(c) = f'(c).(x - c)$ ,  
et la tangente passe par l'origine, si et seulement si :  $f(c) = c.f'(c)$ .

On va donc construire une fonction telle que l'annulation de sa dérivée conduise à l'égalité précédente.

On pose ainsi :  $\forall x \in ]0, +\infty), \varphi(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

Cette fonction est continue sur  $[a, +\infty)$ , dérivable sur  $]a, +\infty)$ , et :  $\forall x > a, \varphi'(x) = \frac{x.f'(x) - f(x)}{x^2}$ .

De plus :  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ,

donc il existe :  $c \in ]a, b[$ , tel que :  $\varphi'(c) = 0$ , ce qui prouve ce qui était demandé.

Remarque : si  $a$  est nul,  $\varphi$  se prolonge par continuité en :  $a = 0$ , avec :  $\varphi(0) = f'(0) = 0$ .

### Développements limités.

54. a. La fonction :  $x \mapsto \tan(x) - x$ , est continue, strictement croissante sur  $I_n$ , vaut  $-\pi$  à une extrémité de  $I_n$  et tend vers  $+\infty$  à l'autre extrémité.

Il s'y annule donc en une unique valeur notée  $x_n$ .

- b. Pour obtenir ce développement limité, on va raisonner de proche en proche.

Tout d'abord :  $\forall n \in \mathbb{N}, n.\pi < x_n < n.\pi + \frac{\pi}{2}$ .

En divisant par  $n\pi$ , et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on constate que  $x_n$  est équivalent à  $n\pi$  en  $+\infty$ .

On pose alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_n = x_n - n\pi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

On a donc :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = \tan(x_n) = \tan(\alpha_n)$ , soit :  $\alpha_n = \arctan(x_n)$ ,

et comme la suite  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$ ,  $\alpha_n$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ .

On note ensuite :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta_n = \frac{\pi}{2} - \alpha_n$ .

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = \tan(x_n) = \tan(\alpha_n) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \beta_n\right) = \frac{1}{\tan(\beta_n)}$ ,

donc :  $\tan(\beta_n) = \frac{1}{x_n}$ ,

et comme  $\beta_n$  tend vers 0, on peut encore écrire :  $\tan(\beta_n) \underset{+\infty}{\sim} \beta_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n\pi}$ .

Enfin :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\tan(\beta_n) = \beta_n - \frac{\beta_n^3}{3} + o_{+\infty}(\beta_n^3) = \beta_n + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,

et :  $\frac{1}{x_n} = \tan(\beta_n) = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o_{+\infty}(1)} = \frac{1}{n\pi} \left(1 + \frac{1}{2n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,

d'où :  $\beta_n = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ,

et finalement :  $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ .

### Suites explicites.

55. a. Puisque la suite est à termes strictement positifs, il suffit d'étudier  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et de le comparer à 1.

Or :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3 \cdot (n+1) \cdot n^n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,

et ce quotient tend vers :  $\frac{e}{3} < 1$ .

Donc le quotient devient strictement inférieur à 1 à partir d'un certain rang et la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir de ce rang.

b. Puisque de plus, elle est minorée par 0 (positive), elle converge vers une limite :  $L \geq 0$ .

Enfin, si :  $L > 0$ , alors  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  tend vers :  $\frac{L}{L} = 1$ , ce qui n'est pas le cas.

Donc :  $L = 0$ .

56. • La première suite peut s'étudier avec :

$$\forall n \geq 3, 1 \leq \frac{1!+2!+\dots+n!}{n!} = \frac{1!+2!+\dots+(n-2)!}{n!} + \frac{1}{n-1} + 1 \leq (n-2) \cdot \frac{1}{n \cdot (n-1)} + \frac{1}{(n-1)} + 1,$$

et cet encadrement montre que  $(u_n)$  tend vers 1.

• Pour la deuxième, on a cette fois :

$$\forall n \geq 1, \frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} = 1,$$

et  $(v_n)$  tend vers 1.

- On remarque pour commencer que la suite des coefficients binomiaux est positive, croissante jusqu'à la valeur :  $k = n$ , puis décroissante.

$$\text{Donc : } \forall n \geq 2, 2 \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{\binom{2n}{2k}} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\binom{2n}{2k}} \leq 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{\binom{2n}{2}} = 2 + \frac{2 \cdot (n-1)}{2n \cdot (2n-1)},$$

et  $(w_n)$  tend vers 2.

### Suites récurrentes linéaires.

57. a. Pour un nombre complexe, une telle écriture est possible si et seulement si il est non nul.

- si :  $z_0 = 0$ , la suite est nulle,
- $z_0$  est non nul,  $z_1$  ne peut être nul que si  $z_0$  est un réel strictement négatif, et tous les termes à partir de  $z_2$  sont nuls.
- si  $z_0$  n'est pas un réel négatif, mais est un réel positif, la suite  $(z_n)$  est constante à la valeur  $z_0$ .
- enfin, si  $z_0$  est non réel, alors il est immédiat par récurrence que tous les  $z_n$  sont non réels donc non nuls.

On va donc se placer pour la suite dans l'hypothèse où :  $z_0 \notin \mathbb{R}$ , et dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \rho_n \in \mathbb{R}^{+*}, \exists -\pi < \theta_n \leq \pi, z_n = \rho_n \cdot e^{i \cdot \theta_n}.$$

b. La relation donnant  $z_{n+1}$  en fonction de  $z_n$  conduit à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \rho_{n+1} \cdot e^{i \cdot \theta_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \rho_n \cdot (1 + e^{i \cdot \theta_n}) = \rho_n \cdot e^{i \cdot \frac{\theta_n}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right).$$

Puisque :  $-\pi < \theta_n \leq \pi$ , le cosinus est positif et :  $\forall n \in \mathbb{N}, \rho_{n+1} = \rho_n \cdot \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right), \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}$ .

La suite  $(\theta_n)$  est géométrique et converge vers 0.

La suite  $(\rho_n)$  est positive donc minorée, et décroissante, donc convergente.

c. On peut multiplier l'égalité définissant  $\theta_n$  par  $2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right)$ , et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cdot \rho_{n+1} = \sin(\theta_n) \cdot \rho_n = 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \cdot \rho_{n+1}.$$

On déduit facilement par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 2^n \cdot \sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) \cdot \rho_n = \sin(\theta_0) \cdot \rho_0$ .

D'où, en passant à la limite et à l'aide d'un équivalent :  $\theta_0 \cdot L = \sin(\theta_0) \cdot \rho_0$ , soit :  $L = \frac{\sin(\theta_0)}{\theta_0} \cdot \rho_0$

Finalement,  $(z_n)$  converge vers :  $L \cdot e^{i \cdot 0} = \frac{\rho_0 \cdot \sin(\theta_0)}{\theta_0} = \frac{\text{Im}(z_0)}{\text{Arg}(z_0)}$ .

d. Si on note :  $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = a_n + i b_n$ , avec :  $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + \sqrt{a_n^2 + b_n^2}), \text{ et : } b_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot b_n.$$

Donc la suite  $(b_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et tend vers 0.

Par ailleurs, on constate que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \geq \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + |a_{n-1}|) \geq 0, \text{ puis que : } a_n - a_{n-1} \geq \frac{1}{2} \cdot (|a_{n-1}| - a_{n-1}) \geq 0.$$

Donc la suite  $(a_n)$  est croissante.

$$\text{Enfin : } \forall n \in \mathbb{N}, |z_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot (|z_n| + |z_n|) = |z_n| \leq |z_0|,$$

cette dernière inégalité s'obtenant par récurrence donc en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq |z_n| \leq |z_0|,$$

et la suite  $(a_n)$  étant bornée, elle est convergente.

### Suites adjacentes.

58. a. On pose évidemment :  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 1$ , car :

- $f(0) \in [0,1]$ , donc :  $f(0) \geq 0$ ,
- $f(1) \in [0,1]$ , donc :  $f(1) \leq 1$ .

Si maintenant on suppose construits  $a_0, \dots, a_n$ , et  $b_0, \dots, b_n$ , comme demandé, on calcule  $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$  et

deux possibilités se présentent :

- $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \leq \frac{a_n + b_n}{2}$ , et on pose alors :  $a_{n+1} = a_n$ ,  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,
- $f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq \frac{a_n + b_n}{2}$ , et on pose alors :  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = b_n$ .

b. Les deux suites précédentes étant clairement adjacentes, notons  $\alpha$  leur limite commune.

Alors :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq \alpha \leq b_n$ , donc :  $f(a_n) \leq f(\alpha) \leq f(b_n)$ , et :  $a_n \leq f(\alpha) \leq b_n$ .

Si maintenant on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on constate que :  $\alpha \leq f(\alpha) \leq \alpha$ , et :  $f(\alpha) = \alpha$ .

### Moyenne de Cesaro.

59. a. Supposons donc  $(u_n)$  réelle et croissante.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \frac{u_1 + \dots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} = \frac{n \cdot u_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n \cdot (n+1)} = \frac{(u_{n+1} - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n)}{n \cdot (n+1)},$$

et cette dernière quantité étant positive,  $(v_n)$  est bien croissante.

b. Soit :  $\varepsilon > 0$ .

Puisque  $(u_n)$  converge vers  $L$ , on sait que :  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall n \geq n_0$ ,  $|u_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

$$\text{Donc : } \forall n \geq n_0 + 1, |v_n - L| = \left| \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} - L \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) + \sum_{k=n_0+1}^n (u_k - L) \right|.$$

$$\text{Avec l'inégalité triangulaire, on obtient : } |v_n - L| \leq \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - L) \right| + \frac{n - n_0}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{C}{n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

où  $C$  désigne la quantité constante (qui dépend de  $n_0$ ).

Comme la suite  $\left(\frac{C}{n}\right)$  tend vers 0, il existe un autre rang  $n_1$  (qu'on peut choisir supérieur à  $n_0 + 1$ ) tel

$$\text{que : } \forall n \geq n_1, \frac{C}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ et on en déduit que : } |v_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc  $(v_n)$  converge bien vers  $L$ .

c. • La réciproque concernant la convergence est fautive comme le montre le contre-exemple obtenu avec :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = (-1)^n$ .

On a alors :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $v_n = 0$ , si  $n$  est pair, et  $-\frac{1}{n}$  si  $n$  est impair.

La suite  $(v_n)$  converge bien vers 0 mais  $(u_n)$  diverge.

• La réciproque de la deuxième implication est également fautive.

Soit par exemple  $(v_n)$  la suite définie par :  $v_1 = 1$ ,  $\forall n \geq 2$ ,  $v_n = \frac{3}{2}$ .

La suite  $(u_n)$  définie par :  $u_1 = 1, \forall n \geq 2, u_n = n.v_n - u_1 - \dots - u_{n-1}$ .

Il est immédiat de vérifier que la suite de moyennes de Cesaro de  $(u_n)$  est  $(v_n)$  et elle n'est pas

croissante car :  $u_1 = 1, u_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} - 1 = 2, u_3 = 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 - 2 = \frac{3}{2} < u_2$ .

60. a. La suite est bien définie, à valeurs dans  $]0,1]$  et décroissante, avec la propriété classique :

$$\forall x \in [0,1], 0 \leq \sin(x) \leq x.$$

Donc la suite converge et comme sinus est continue, sa limite  $L$  vérifie :  $\sin(L) = L$ , donc :  $L = 0$ .

$$b. \text{ On a donc : } \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{(\sin(u_n))^\gamma} - \frac{1}{u_n^\gamma} = \frac{1}{\left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o_{+\infty}(u_n^3)\right)^\gamma} - \frac{1}{u_n^\gamma}.$$

$$\text{On peut alors obtenir : } v_n = \frac{1}{u_n^\gamma} \cdot \left( \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o_{+\infty}(u_n^2)\right)^{-\gamma} - 1 \right) = \frac{\gamma}{6} u_n^{2-\gamma} + o_{+\infty}(u_n^{2-\gamma}).$$

Si  $\gamma$  est nul, la suite  $(v_n)$  est constante nulle, sinon :  $v_n \sim \frac{\gamma}{6} u_n^{2-\gamma}$ .

Puisque, enfin,  $(u_n)$  tend vers 0,  $(v_n)$  converge vers une limite non nulle si et seulement si :  $\gamma = 2$ .

c. Puisque maintenant  $(v_n)$  converge vers  $\frac{1}{3}$ , en appliquant une moyenne de Cesaro à  $(v_n)$ , la suite

$$\left( \frac{v_1 + \dots + v_n}{n} \right) \text{ tend aussi vers } \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc par télescopage : } \frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{1^2} \right) = \frac{v_1 + \dots + v_{n-1}}{n-1} = \frac{1}{3} + o_{+\infty}(1),$$

$$\text{d'où : } u_n^2 = \frac{1}{1 + \frac{n-1}{3} + o_{+\infty}(n)} \sim \frac{3}{n-1} \sim \frac{3}{n}, \text{ et finalement : } u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

61. a. La fonction itératrice de cette suite récurrente est  $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+3x} - 1$ .

Elle est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  et laisse  $\mathbb{R}^+$  stable.

Donc la suite  $(u_n)$  est bien définie, à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , et monotone.

Comme de plus :  $u_1 = \sqrt[3]{4} - 1 < \sqrt[3]{8} - 1 = 1 = u_0$ ,  $(u_n)$  est décroissante.

Enfin, étant minorée par 0, elle converge et  $f$  admettant un unique point fixe dans  $\mathbb{R}^+$  qui est 0 ( $-3$  est un autre point fixe mais hors de  $\mathbb{R}^+$ ),  $(u_n)$  converge vers 0.

b. On part ensuite de :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt[3]{1+3u_n} - 1 = \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot 3u_n + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{9u_n^2}{2} + o_{+\infty}(u_n^2) \right) - 1 = u_n - u_n^2 + o_{+\infty}(u_n^2).$$

$$\text{D'où : } U_{n+1} - U_n = \frac{1}{u_n - u_n^2 + o_{+\infty}(u_n^2)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_n} \cdot (1 - u_n + o_{+\infty}(u_n))^{-1} - \frac{1}{u_n} = 1 + o_{+\infty}(1).$$

Donc  $(U_{n+1} - U_n)$  tend vers 1.

A l'aide d'une moyenne de Cesaro avec  $(U_{n+1} - U_n)$ , on constate que cette moyenne tend aussi vers 1.

$$\text{D'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \left( \frac{1}{u_n} - \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{n} \cdot (U_n - U_0) = \frac{(U_1 - U_0) + \dots + (U_n - U_{n-1})}{n} = 1 + o_{+\infty}(1),$$

$$\text{d'où : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{u_n} = 1 + n + o_{+\infty}(n), \text{ soit : } u_n = \frac{1}{1 + n + o_{+\infty}(n)}, \text{ et finalement : } u_n \sim \frac{1}{n}.$$

### Exercices généraux sur les suites ; suites extraites.

62. a. La suite  $(x_n)$  diverge puisque si une suite converge, toute suite extraite de cette suite converge vers la même limite.

b. On peut par exemple proposer la suite :  $(x_n) = ((-1)^n)$  :

- elle admet deux valeurs d'adhérence distinctes qui sont 1 et  $-1$  (limites des suites extraites d'indices pairs ou impairs),
- la suite diverge car  $(x_{n+1} - x_n)$  ne tend pas vers 0 (en valeur absolue, elle est constante égale à 2).

63. a. La suite  $(u_n)$  est comprise dans l'intervalle  $[m, M]$ .

Posons :  $v_0 = u_0$ ,  $a_0 = m$ ,  $b_0 = M$ .

Considérons alors les deux segments  $\left[ m, \frac{m+M}{2} \right]$  et  $\left[ \frac{m+M}{2}, M \right]$ .

L'un au moins des deux segments contient une infinité de termes de la suite.

On retient cet intervalle (et si c'est le cas des deux, on retient le segment inférieur).

On pose alors  $a_1$  et  $b_1$  les extrémités de ce segment et  $v_1$  un terme de la suite  $(u_n)$  dont le numéro est strictement supérieur à 0.

Ensuite, si on suppose  $a_0, \dots, a_n$ ,  $b_0, \dots, b_n$ , et  $v_0, \dots, v_n$  construits de telle sorte que :

- $\forall 0 \leq k \leq n-1$ ,  $a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k$ ,  $b_k - a_k = \frac{M-m}{2^k}$ ,

- $\forall 0 \leq k \leq n$ ,  $v_k \in [a_k, b_k]$ ,

- $[a_n, b_n]$  contient une infinité de termes de la suite  $u$ .

- les termes  $v_0, \dots, v_n$  sont des termes de la suite  $u$  dont les numéros sont strictement croissants.

Alors on peut, en reprenant le principe exposé pour le rang 1, construire  $v_{n+1}$  pour continuer la suite.

Ainsi la suite  $(v_n)$  est extraite de la suite  $(u_n)$  et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq v_n \leq b_n.$$

Comme les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes, la suite  $(v_n)$  converge vers leur limite commune.

On a ainsi extrait une suite convergente de  $(u_n)$ .

b. Si une suite complexe  $(z_n)$  est bornée, ses suites parties réelle et imaginaire (notées  $(a_n)$  et  $(b_n)$ ) sont aussi bornées.

On peut ainsi extraire une suite  $(a_{\varphi(n)})$  de  $(a_n)$  qui soit convergente.

Mais alors la suite  $(b_{\varphi(n)})$  est toujours réelle et bornée donc il est possible d'en extraire une suite  $(b_{\psi(n)})$  convergente.

La suite  $(a_{\varphi(\psi(n))})$ , extraite de  $(a_{\varphi(n)})$  est encore convergente et finalement, la suite  $(z_{\varphi(\psi(n))})$  est extraite de  $(z_n)$ .

Et comme ses parties réelle et imaginaire convergent, elle est donc aussi convergente.

64. Si la suite  $(u_n)$  est nulle à partir d'un certain rang, cela s'écrit :

$$n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, u_n = 0,$$

et dans ce cas, la suite  $(v_n)$  définie par :  $\forall n \geq 0, v_n = u_{n_0+n} = 0$ ,

est extraite de  $(u_n)$  et constante nulle donc décroissante.

Si la suite  $(u_n)$  n'est pas nulle à partir d'un certain rang, c'est qu'elle a une infinité de termes non nuls.

Posons alors  $v_0$  comme étant le premier terme non nul (donc strictement positif) de la suite  $(u_n)$ .

Cette valeur correspond à un indice :  $\varphi(0) = \min \{k \geq 0, u_k \neq 0\}$ , tel que :  $v_0 = u_{\varphi(0)}$ .

Soit ensuite :  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons qu'on a trouvé des valeurs entières :  $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ , telles que :  $u_{\varphi(0)} > u_{\varphi(1)} > \dots > u_{\varphi(n)} > 0$ .

Si on pose :  $\varepsilon = \frac{u_{\varphi(n)}}{2} > 0$ , et par définition de la convergence de la suite  $u$  vers 0, on sait que :

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, |u_k| \leq \varepsilon < u_{\varphi(n)}$ , soit encore :  $0 \leq u_k < u_{\varphi(n)}$ .

En particulier :  $\forall k \geq \max(N, \varphi(n) + 1), 0 \leq u_k < u_{\varphi(n)}$ .

Et puisque la suite  $u$  n'est pas nulle à partir d'un certain rang, il existe au moins une valeur  $k$  telle que :

- $k \geq \max(N, \varphi(n) + 1)$ ,
- $u_k \neq 0$ , et donc telle que :
- $0 < u_k < u_{\varphi(n)}$ .

On peut alors poser :  $\varphi(n+1) = \min \{k \geq \max(N, \varphi(n) + 1), 0 < u_k < u_{\varphi(n)}\}$ , et cette valeur vérifie :

- $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ , donc :  $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ ,
- $0 < u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)}$ .

On définit ainsi par récurrence une suite  $(v_n)$  en posant :  $\forall n \geq 0, v_n = u_{\varphi(n)}$ .

Cette suite est bien extraite de  $(u_n)$  (puisque  $\varphi$  est strictement croissante) et décroît puisque :

$$\forall n \geq 0, 0 < u_{\varphi(n+1)} < u_{\varphi(n)},$$

autrement dit elle répond au problème posé.

*Remarque* : la suite ainsi construite dans ce cas est même strictement décroissante.