Révisions d'analyse (corrigé niveau 2).

Limites des fonctions de variable réelle à valeurs dans ℝ ou ℂ.

20. On peut exploiter deux propriétés de la partie entière : elle est en escalier et se définit à l'aide d'inégalités.
- Pour la fonction f, on peut écrire :

$\forall\ x > 0$, $\frac{b}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{x}$, d'où : $\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f(x) \leq \frac{b}{a}$, de même :

$\forall\ x < 0$, $\frac{b}{a} \leq f(x) < \frac{b}{a} - \frac{x}{a}$, et par le théorème des gendarmes, f tend vers $\frac{b}{a}$ en 0 : elle peut y être prolongée par continuité.
- Pour la fonction g, c'est plus simple :

$\forall\ 0 < x < b$, $0 < \frac{x}{b} < 1$, d'où : $\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor = 0$, et : $g(x) = 0$, puis g tend vers 0 par valeurs supérieures.

$\forall\ -b < x < 0$, $-1 < \frac{x}{b} < 0$, d'où : $\left\lfloor \frac{x}{b} \right\rfloor = -1$, et : $g(x) = -\frac{a}{x}$, puis g tend vers +∞ par valeurs inférieures.

21. Soit : $a \in$ ℝ.
Alors la suite $(a + n.T)$ tend vers +∞ quand n tend vers +∞.
Donc la suite $(f(a+n.T))$ tend vers L, soit la limite de f en +∞.
Mais cette suite est aussi constante à la valeur $f(a)$, donc on en déduit que f est constante et vaut L.

Continuité des fonctions de variable réelle à valeurs dans ℝ ou ℂ.

22. a. Puisque la suite proposée (u_n) est géométrique et tend vers 0, f étant continue en 0, la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(0)$.
Mais de plus : $\forall\ n \in$ ℕ, $f(u_{n+1}) = f(2.u_{n+1}) = f(u_n)$,
et la suite $(f(u_n))$ est constante et vaut : $f(u_0) = f(a)$.
Conclusion : $\forall\ a \in$ ℝ, $f(a) = f(0)$, et f est bien constante.

b. La question précédente, en partant de : $f(x) = f(2.x)$, proposait de construire une suite convergente en posant : $u_n = 2.u_{n+1}$.
Pour : $a \in$ ℝ, posons la suite (u_n) définie par : $u_0 = a$, $\forall\ n \in$ ℕ, $u_n = 3.u_{n+1} + 1$.
Alors la suite $(f(u_n))$ vérifie : $\forall\ n \in$ ℕ, $f(u_n) = f(3.u_{n+1} + 1) = f(u_{n+1})$,
et donc à nouveau constante à la valeur : $f(u_0) = f(a)$.
Il suffit de montrer que la suite (u_n) converge.
Or elle est arithmético-géométrique puisque : $\forall\ n \in$ ℕ, $u_{n+1} = \frac{1}{3}.u_n - \frac{1}{3}$.
On cherche alors A tel que : $A = \frac{1}{3}.A - \frac{1}{3}$, soit : $A = -\frac{1}{2}$, et la suite (v_n) définie par :

$\forall\ n \in$ ℕ, $v_n = u_n - A = u_n + \frac{1}{2}$,

vérifie : $\forall\ n \in$ ℕ, $v_{n+1} = \frac{1}{3}.\left(u_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}.v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et converge vers 0, donc (u_n) converge vers $-\frac{1}{2}$.

Finalement la suite constante $(f(u_n))$ converge vers $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, et : $\forall\ a \in$ ℝ, $f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

f est bien constante.

Il aurait suffi dans ce cas de supposer f continue en $-\frac{1}{2}$, qui est en fait le point fixe de : $x \mapsto 3.x+1$.

23. Remarquons tout d'abord que le résultat aurait été évident pour : $n=1$, avec la valeur : $x=0$.
Pour : $n \geq 2$, la fonction g proposée est continue sur ℝ (par opérations).
Supposons maintenant que g ne s'annule pas sur [0,1].
Alors elle y garde un signe constant, par exemple strictement positif.
Mais alors :
$$0 < \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0.$$
Cette contradiction montrer que g s'annule sur [0,1], et que :
$$\exists\ x \in [0,1],\ f(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right).$$

24. a. Posons la fonction : $\varphi = \frac{f}{g}$.
Par opérations, φ est continue sur ℝ et son carré vaut 1, donc φ vaut ±1.
Elle ne peut prendre ces deux valeurs sinon le théorème des valeurs intermédiaires garantirait qu'elle s'annule ce qui n'est pas le cas.
Donc elle vaut toujours 1 ou toujours -1 et qui montre que : $f=g$, ou : $f=-g$.
b. L'hypothèse faite sur f montre que f est ne s'annule pas sur ℝ.
Posons alors : $\forall\ x \in$ ℝ, $g(x) = f(-x)$.
On constate que :
$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ (g(x))^2 = (f(-x))^2 = |f(-x)|^2 = (f(|-x|))^2 = (f(|x|))^2 = |f(x)|^2 = (f(x))^2.$$
Donc : $f=g$, ou : $f=-g$.
Mais si on avait : $f=-g$, on aurait en particulier : $f(0) = -g(0) = -f(-0) = -f(0)$, et : $f(0)=0$, ce qui est impossible, donc : $f=g$, et f est paire.

25. a. La fonction continue $(g-h)$ ne s'annule pas sur [0,1], donc elle y reste strictement positive ou négative.
D'où le premier résultat.
b. Supposons pour la suite qu'on ait : $g>h$.
Supposons par ailleurs que : $\exists\ (a,b) \in [0,1]^2$, $f(a)=g(a)$, et : $f(b)=h(b)$.
Alors :
- $(f-\varphi)(a) = f(a) - \frac{g(a)+h(a)}{2} = \frac{g(a)-h(a)}{2} > 0$,
- $(f-\varphi)(b) = \frac{h(b)-g(b)}{2} < 0$.

Puisque $(f-\varphi)$ est continue sur [0,1], elle doit donc s'annuler en un point c et en ce point c, on a :
$$f(c) = \frac{g(c)+h(c)}{2}.$$
Mais en ce point $f(c)$ vaut aussi soit $g(c)$, soit $h(c)$.
Et si par exemple : $f(c)=g(c)$, on aurait alors : $g(c) = \frac{g(c)+h(c)}{2}$, d'où : $g(c)=h(c)$.
Cette contradiction montre que f coïncide sur [0,1] soit avec g, soit avec h.

26. Notons : $\varphi(t) = |f(t)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(f(t))^2 + (\mathrm{Im}(f(t))^2}$.
Par opérations, φ est continue sur $[a,b]$.
De plus φ est non nulle en t si : $\mathrm{Re}(f(t)) \neq 0$, mais également si : $\mathrm{Re}(f(t)) = 0$, car alors : $\mathrm{Im}(f(t)) \neq 0$.
Donc φ ne s'annule pas sur $[a,b]$.

Si enfin, on note : $m = \inf_{t\in[a,b]} \varphi(t)$, cette valeur existe comme borne inférieure d'une fonction continue sur un segment, et elle est atteinte en au moins un point de $[a,b]$, donc est non nulle.
On a donc démontré le résultat voulu.

Dérivabilité des fonctions de variable réelle à valeurs réelles ou complexes.

27. Pour : $x \in \mathbb{R}$, on a donc : $\forall\ h \in \mathbb{R}^*$, $|f(x+h) - f(x)| \le A.|h|^{\alpha}$.

Donc : $\forall\ h \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \le A.|h|^{\alpha-1}$, et l'exposant $\alpha - 1$ est strictement positif.

Donc si on fait tendre h vers 0, le taux d'accroissement de la fonction tend aussi vers 0.
f est donc dérivable en x, et : $f'(x) = 0$.
Finalement, f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$, et à dérivée nulle : f est donc constante sur $\mathbb{R}$.

28. a. Vu l'hypothèse faite : $f(0).f(0) = f(0)$, et $f(0)$ est solution de l'équation : $t^2 = t$, et vaut 0 ou 1.
b. Si $f(0)$ est nul, alors :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x).f(0) = 0 = f(x+0) = f(x)$,
et f est la fonction nulle, qui est bien solution, puisque dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'égalité demandée.
c. Si on suppose : $f(0) = 1$, on peut alors, à x fixé, dériver l'égalité de départ par rapport à t, et :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $f(x).f'(t) = 1.f'(x+t)$.
Cette égalité étant vraie pour tout t, en particulier pour : $t = 0$, et : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f'(0).f(x) = f'(x)$.
Donc f est solution d'une équation différentielle du type : $y' = a.y$, avec : $a \in \mathbb{R}$.
f est donc de la forme : $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda.e^{a.x}$,
et comme de plus : $f(0) = 1$, on en déduit :
$\lambda = 1$, donc finalement : $\exists\ a \in \mathbb{R}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{a.x}$.
Réciproquement, toute fonction du type précédent est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, et vérifie l'égalité demandée : ce sont donc <u>les</u> solutions du problème.

29. La fonction g est nécessairement définie par : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $g(t) = f(\sqrt{t})$.
Montrons que cette fonction, définie sur $\mathbb{R}^+$, est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
Par construction et opérations, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus : $\forall\ t > 0$, $g'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}.f'(\sqrt{t}) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{f'(\sqrt{t}) - f'(0)}{\sqrt{t}}$.

Quand t rend vers 0, $\sqrt{t}$ tend aussi vers 0, et la quantité précédente a une limite qui est $\dfrac{1}{2}.f''(0)$.

Donc g g est dérivable en 0, on a : $g'(0) = \dfrac{1}{2}.f''(0)$, et g' est continue en 0.

g est donc bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

30. a. Par opérations, g_n est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b. Montrons le résultat demandé par récurrence.
Pour cela, g_1 vérifie : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g_1(x) = x^0.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, et : $g_1'(x) = \dfrac{-1}{x^2}.f'\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Supposons maintenant le résultat vrai pour un entier : $b \ge 1$, donné.
Alors : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $g_{n+1}(x) = x^n.f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x.g_n(x)$.

La formule de Leibniz montre alors que : $\forall\ x > 0$, $g_{n+1}^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}.x^{(k)} g_n^{(n+1-k)}(x)$.

Cette dernière somme ne comporte que deux termes et :

$\forall\ x>0,\ g_{n+1}^{(n+1)}(x)=\binom{n+1}{0}.x^{(0)}g_n^{(n+1-0)}(x)+\binom{n+1}{1}.x^{(1)}g_n^{(n+1-1)}(x)$, et donc :

$$g_{n+1}^{(n+1)}(x)=x.\frac{d}{dx}\left(\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}.f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right)+(n+1).\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}.f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=x.\frac{(n+1).(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}.f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+x.\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right).f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)+(n+1).\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}.f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}}.f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ce qui termine la récurrence.

31. Notons pour cela : $\forall$ t $\in I$, $a(t)=\mathrm{Re}(f(t))$, $b(t)=\mathrm{Im}(f(t))$, et : $\varphi(t)=|f(t)|=\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}$.

Puisque f ne s'annule pas, la quantité sous la racine reste dans $\mathbb{R}^{+*}$, où $\sqrt{\ }$ est dérivable.

Donc φ est dérivable sur I, et : $\forall$ t $\in I$, $\varphi'(t)=\dfrac{a(t).a'(t)+b(t).b'(t)}{\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}}$.

Puisque I est un intervalle, φ est croissante si et seulement si :

$\forall$ t $\in I$, $a(t).a'(t)+b(t).b'(t)\geq 0$.

D'autre part : $\forall$ t $\in I$, $\dfrac{f'(t)}{f(t)}=\dfrac{a'(t)+i.b'(t)}{a(t)+i.b(t)}=\dfrac{[a'(t).a(t)+b'(t).b(t)]+i.[b'(t).a(t)-a'(t).b(t)]}{a(t)^2+b(t)^2}$.

Donc : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{f'}{f}\right)\geq 0$, si et seulement si : $a(t).a'(t)+b(t).b'(t)\geq 0$,

d'où l'équivalence demandée.

32. a. Puisque f admet une limite finie en $+\infty$, g admet une limite en $\dfrac{\pi}{2}$ qui vaut $f(a)$.

g se prolonge donc par continuité sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, en posant : $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g(0)=f(a)$.

Cette fonction prolongée est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Puisque : $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=g(0)$, le théorème de Rolle montre qu'il existe : $\gamma\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, tel que : $g'(\gamma)=0$.

c. De plus : $\forall\ x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $g'(x)=(1+\tan^2(x)).f'(a+\tan(x))$.

Posons alors : $c=a+\tan(\gamma)\in\ ]a,+\infty)$, et : $(g'(\gamma)=0)\Rightarrow(f'(a+\tan(\gamma))=0)\Rightarrow(f'(c)=0)$.

d. Plus généralement, si f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\lim\limits_{x\leftarrow+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\leftarrow-\infty}f(x)$,

alors il existe : $c\in\mathbb{R}$, $f'(c)=0$.

La démonstration est identique, en définissant par exemple une fonction sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right[$, que l'on prolonge en $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Développements limités.

33. On va ici utiliser des développements limités à des ordres suffisants ou des équivalents.

- Pour la première limite, on pose : $x=1+h$, et :

$x^2+x-2=(1+h)^2+(1+h)-2=3.h+h^2\underset{0}{\sim}3.h$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}.x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}+h.\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\left(h.\frac{\pi}{2}\right)}\underset{0}{\sim}\frac{2}{\pi.h},$$

d'où : $(x^2+x-2).\tan\left(\frac{\pi}{2}.x\right)\underset{1}{\sim}\frac{6}{\pi}$, et : $\lim_{x\to 1}(x^2+x-2).\tan\left(\frac{\pi}{2}.x\right)=\frac{6}{\pi}$.

• Pour la seconde, on remarque tout d'abord que : $(x>1)\Rightarrow\left(0<x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

D'où : $\left(x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}=\exp\left(x^2.\ln\left(x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)=\exp\left(x^2.\ln\left(1-\frac{1}{6.x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$, puis :

$$\left(x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}=\exp\left(x^2.\left(-\frac{1}{6.x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=\exp\left(-\frac{1}{6}+o_{+\infty}(1)\right),$$

et : $\lim_{x\to+\infty}\left(x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}=\exp\left(-\frac{1}{6}\right)$.

• Enfin : $\sqrt[n]{2}=2^{\frac{1}{n}}=\exp\left(\frac{1}{n}.\ln(2)\right)=1+\frac{1}{n}.\ln(2)+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, de même : $\sqrt[n]{3}=1+\frac{1}{n}.\ln(3)+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

D'où : $(3.\sqrt[n]{2}-2.\sqrt[n]{3})^n=\exp\left(\frac{1}{n}.\ln(3.\sqrt[n]{2}-2.\sqrt[n]{3})\right)=\exp\left(\frac{1}{n}.\ln\left(1+\frac{3.\ln(2)-2.\ln(3)}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$,

et : $(3.\sqrt[n]{2}-2.\sqrt[n]{3})^n=\exp\left(\frac{1}{n}.\left(\frac{3.\ln(2)-2.\ln(3)}{n}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)=\exp(3.\ln(2)-2.\ln(3)+o_{+\infty}(1))$,

soit finalement : $\lim_{n\to+\infty}(3.\sqrt[n]{2}-2.\sqrt[n]{3})^n=\exp(3.\ln(2)-2.\ln(3))=\frac{2^3}{3^2}=\frac{8}{9}$.

34. • Pour les développements limités composés, il faut en premier lieu surveiller les variables intermédiaires utilisées et les points où les développements intermédiaires sont réalisés.

• $3.e^x+e^{-x}=3.\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)\right)=4+2.x+2.x^2+\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)$,

d'où en factorisant par 4 et en utilisant un $DL_3(0)$ de $\ln(1+u)$, on obtient :

$$\ln(3.e^x+e^{-x})=\ln(4)+\ln\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+o_0(x^3)\right)=2.\ln(2)+\frac{x}{2}+\frac{3.x^2}{8}-\frac{x^3}{8}+o_0(x^3).$$

• $1+\sqrt{1+x}=2+\frac{1}{2}.x-\frac{1}{8}.x^2+\frac{1}{16}.x^3+o_0\left(x^3\right)$, d'où en factorisant d'abord par 2 :

$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}.\left(1+\frac{1}{4}.x-\frac{1}{16}.x^2+\frac{1}{32}.x^3+o_0\left(x^3\right)\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}.\left(1+\frac{1}{8}.x-\frac{5}{128}.x^2+\frac{21}{1024}.x^3+o_0\left(x^3\right)\right).$$

• Pour le troisième, on constate que l'ordre 7 est le premier à donner un terme non nul :

$\sin(sh(x))-sh(\sin(x))=\sin\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}+o_0(x^7)\right)-sh\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+o_0(x^7)\right)$, et :

$$\sin(sh(x))-sh(\sin(x))=-\frac{x^7}{45}+o_0(x^7).$$

• Pour le quatrième, on commence par un changement de variable : $x=2.\pi+h$, et :

$$\sqrt{x^2-3.\pi^2}=\sqrt{\pi^2+4.\pi.h+h^2}=\pi.\sqrt{1+\frac{4.h}{\pi}+\frac{h^2}{\pi^2}}=\pi.\left(1+\frac{2.h}{\pi}-\frac{3.h^2}{2.\pi^2}+\frac{3.h^3}{\pi^3}+o_0(h^3)\right),$$

puis : $\sin(\sqrt{x^2-3.\pi^2})=\sin\left(\pi+2.h-\frac{3.h^2}{2.\pi}+\frac{3.h^3}{\pi^2}+o_0(h^3)\right)=-\left(\frac{h}{2}-\frac{3.h^2}{2.\pi}+\left(\frac{3}{\pi^2}-\frac{4}{3}\right).h^3+o_0(h^3)\right)$.

- Enfin, pour le dernier, on commence par dériver la fonction, on la développe en 0 puis on intègre :

  la dérivée vaut : $\dfrac{-2}{1+4.x^2} = -2 + 8.x^2 - 32.x^4 + o_0(x^4)$, et :

  $\arctan\left(\dfrac{2.(1-x)}{1+4.x}\right) = \arctan(2) - 2.x + \dfrac{8.x^3}{3} - \dfrac{32.x^5}{5} + o_0(x^5)$.

35. On écrit : $\sqrt[n]{a} = \exp\left(\dfrac{1}{n}.\ln(a)\right) = 1 + \dfrac{1}{n}.\ln(a) + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, d'où : $\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2} = 1 + \dfrac{1}{n}.\left(\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}\right) + o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

    Puis : $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2} + o_{+\infty}(1)\right)$, et : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{a.b}$.

36. a. La fonction f étant décroissante, elle admet une limite finie en +∞ ou tend vers $-\infty$.

    Si cette limite était $-\infty$, alors la fonction : $x \mapsto f(x) + f(x+1)$, tendrait aussi vers $-\infty$ et ne pourrait être équivalent à $\dfrac{1}{x}$.

    Donc f tend vers une limite finie L en +∞, et : $x \mapsto f(x) + f(x+1)$, tend vers $2.L$ en +∞ et aussi vers 0, d'où on déduit que : $2.L = 0$

    Finalement, f tend vers 0 en +∞.

    b. On remarque ensuite que : $\forall\ x > 0,\ f(x) + f(x+1) \le 2.f(x) \le f(x+1) + f(x+2)$.

    Si maintenant, on multiplie cette double inégalité par x, on constate que :

    - $x.(f(x) + f(x+1))$ tend vers 1, vu l'équivalent donné, et :
    - $x.(f(x+1) + f(x+2))$ est équivalent à $(x+1).(f(x+1) + f(x+2))$ en +∞ et tend aussi vers 1.

    Donc $2.x.f(x)$ tend vers 1 en +∞ et : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2.x}$.

37. La fonction $\tan$ est définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ et y est de classe C^1 comme quotient.

    De plus : $\tan' = 1 + \tan^2$.

    Il est alors simple de démontrer par récurrence que $\tan$ est de classe C^n pour tout n sur l'intervalle donc de classe C^∞.

    En effet, elle y est bien de classe C^1, et si on l'y suppose de classe C^n, pour un entier : $n \ge 1$, donné, alors la relation sur $\tan'$ montre que $\tan'$ est elle-même de classe C^n, donc que $\tan$ est de classe C^{n+1}.

    Puis, étant de classe C^9, elle admet en 0 un développement limité à l'ordre 9 de la forme (elle est impaire) :

    $\forall\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = 0 + a_1.x + a_3.x^3 + a_5.x^5 + a_7.x^7 + a_9.x^9 + o_0(x^9)$.

    D'autre part, $\tan'$ est de classe C^8 donc admet aussi un développement limité à l'ordre 8 en 0, obtenu en dérivant le précédent et on a l'égalité : $\forall\ x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$,

    $a_1 + 3.a_3.x^2 + 5.a_5.x^4 + 7.a_7.x^6 + 9.a_9.x^8 + o_0(x^8) = 1 + (a_1.x + a_3.x^3 + a_5.x^5 + a_7.x^7 + a_9.x^9 + o_0(x^9))^2$.

    En développant cette égalité et en utilisant l'unicité d'un développement limité en 0, on peut égaler les coefficients et aboutir au système :

    $a_1 = 1$,

    $3.a_3 = a_1^2$,

    $5.a_5 = 2.a_1.a_3$,

    $7.a_7 = a_3^2 + 2.a_1.a_5$,

    $9.a_9 = 2.a_1.a_7 + 2.a_3.a_5$.

    On peut alors le résoudre de proche en proche pour obtenir finalement :

$$\forall\ x \in \left]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}.x^5 + \frac{17}{315}.x^7 + \frac{62}{2835}.x^9 + o_0(x^9).$$

Suites explicites réelles ou complexes.

38. On va raisonner par encadrements, et pour cela, soit : $x \in \mathbb{R}$.

Alors : $\forall\ n \geq 1$, $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $(k.x - 1) \leq \lfloor k.x \rfloor \leq k.x$,

d'où : $\sum_{k=1}^{n}(k.x-1) \leq \sum_{k=1}^{n}\lfloor k.x \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} k.x$.

Or : $\sum_{k=1}^{n} k.x = x.\sum_{k=1}^{n} k = x.\frac{n.(n+1)}{2}$, donc : $x.\left[\frac{n.(n+1)}{2.n^2} - \frac{n}{n^2}\right] = x.\frac{n-1}{2.n} \leq u_n \leq x.\frac{n+1}{2.n}$.

Le théorème des gendarmes montre alors que (u_n) tend vers $\frac{x}{2}$.

Puis, si α est un réel donné, on pose : $x = 2.\alpha$, et la suite (u_n) qu'on construit à partir de cet x est formée de rationnels converge vers α.

39. • Si : $a = b$, on a :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (a^n + a^n)^{\frac{1}{n}} = a.2^{\frac{1}{n}}$, et (u_n) tend vers a.

• Si : $a \neq b$, avec : $a > b$, alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \left(a^n.\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right)^{\frac{1}{n}} = a.\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = a.\exp\left(\frac{1}{n}.\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right).$$

On peut alors faire un développement limité du ln pour obtenir : $u_n = a.\exp\left(\frac{1}{n}.\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n + o_{+\infty}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)\right)\right)$.

Quand n tend vers +∞, la suite géométrique $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$ tend vers 0, donc l'argument de l'exponentielle tend vers 0 et l'exponentielle tend vers 1.

Conclusion : (u_n) tend vers a.

Et puisque a et b joue des rôles symétriques, le cas : $a < b$, est identique et (u_n) tend alors vers b.

40. a. On constate que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} - z_n| = |e^{i.n}.(e^i - 1)| = |e^i - 1|$,

et cette suite est donc constante non nulle et ne tend donc pas vers 0.

b. La suite (z_n) est donc divergente, et l'une des deux suites $(\mathrm{Re}(z_n))$ ou $(\mathrm{Im}(z_n))$ diverge.

c. En développant $\cos(n+1)$, on a :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\cos(n+1) = \cos(n).\cos(1) - \sin(n).\sin(1)$, et :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\sin(n) = \frac{\cos(n).\sin(1)}{\cos(1)} - \frac{\cos(n+1)}{\cos(1)}$.

Si maintenant on suppose que $(\cos(n))$ converge, alors $(\cos(n+1))$ converge aussi (comme suite extraite), tout comme $(\sin(n))$ comme combinaison linéaire.

Cette contradiction montre que $(\cos(n))$ diverge.

d. De même, en exploitant le développement de $\sin(n+1)$, on montre que $(\sin(n))$ ne peut converger et donc diverge.

e. Si on reprend la démarche dans ce cas général, on constate (en notant toujours : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z_n = e^{i.n.\theta}$) que la suite (z_n) diverge si : $\theta \neq 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi)$, puisque : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} - z_n| = |e^{i.\theta} - 1| \neq 0$.

• si donc : $\theta = 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi)$, la suite $(\sin(n.\theta))$ est constante nulle donc converge, et la suite $(\cos(n.\theta))$:

- est constante égale à 1 (donc converge) si : $\theta = 0 \ (\mathrm{mod}\ 2.\pi)$,

- vaut $((-1)^n)$ (donc diverge) si : $\theta = \pi \pmod{2.\pi}$.

• si maintenant : $\theta \neq 0 \pmod{\pi}$, en raisonnant comme précédemment, à savoir en raisonnant par l'absurde et en développant successivement $\cos((n+1).\theta)$ et $\sin((n+1).\theta)$, on montre que les suites $(\cos(n.\theta))$ et $(\sin(n.\theta))$ divergent.

41. On suppose donc que : $|a| > |b|$, et on peut alors écrire :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a^n + b^n}{a^n - b^n} = \frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Or : $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$, donc la suite $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)$ tend vers 0 et (u_n) tend vers 1.

Si par ailleurs : $|a| < |b|$, de même la suite tend vers -1 (on peut aussi considérer $(-u_n)$).

42. On démontre ces résultats par récurrence, en commençant par remarquer que :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ 0 \leq \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq \frac{\pi}{2},$$

donc cosinus et sinus sont positifs.

Puis le résultat voulu est immédiat pour : $n = 1$, et si on le suppose vrai pour un entier : $n \geq 1$, donné,

alors : $\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{1}{2}.\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right) = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{2}.\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}\right) = \frac{1}{4}.\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+...\sqrt{2}}}\right)$.

Donc le cosinus étant positif, on en déduit le résultat pour $n+1$ en passant à la racine.

On en déduit le résultat (directement) pour le sinus avec : $2.\sin^2(\alpha) = 1 - \cos(2.\alpha)$,

et le fait que ce sinus est positif.

Enfin : $\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2^{n+1}}$, donc : $2^{n+1}.\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2^n.\sqrt{2-\sqrt{2+...\sqrt{2}}} \underset{+\infty}{\sim} \pi$,

et : $\pi = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n.\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}\right)$.

Suites récurrentes linéaires, ou définies à partir de : $u_{n+1} = f(u_n)$.

43. Puisque $\cos$ laisse stable l'intervalle : $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, et : $1 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, la suite (u_n) est bien définie et à termes dans I.

De plus, $\cos$ est décroissante sur cet intervalle, $\cos\circ\cos$ est croissante, donc les suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$ sont monotones (et de monotonies inverses), comme on peut le redémontrer par récurrence.

Puisque : $u_2 = \cos(\cos(1)) < 1 = u_0$, la suite $(u_{2.n})$ est décroissante et donc $(u_{2.n+1})$ est croissante.

Etant bornées, ces deux suites sont donc convergentes.

Puis la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \cos(\cos(x)) - x$, est dérivable sur l'intervalle, et :

$$\forall\ x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \varphi'(x) = \sin(x).\sin(\cos(x)) - 1 < 0,$$

puisqu'elle ne pourrait s'annuler que pour : $x = \frac{\pi}{2}$, où elle ne s'annule pas.

Donc φ est strictement décroissante.

De plus, elle vaut : $\cos(\cos(0)) = \cos(1) > 0$, en 0, et : $\cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$, en $\frac{\pi}{2}$.

Donc elle s'annule en une seule valeur α dans l'intervalle.

Enfin, les suites $(u_{2.n})$ et $(u_{2.n+1})$ convergent vers un point fixe de : $x \mapsto \cos(\cos(x))$, donc vers α.

Finalement la suite globale (u_n) converge vers α.

44. Tout d'abord la suite (u_n) est bien définie, et une récurrence immédiate montre qu'elle est à termes positifs.
Puis, en posant : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = \ln(u_n))$,
on constate que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = \frac{1}{2}.v_{n+1} + \frac{1}{2}.v_n$.
Donc la suite (v_n) est une suite récurrente linéaire à deux termes, d'équation caractéristique :
$2.r^2 - r - 1 = 0$.
Les racines étant 1 et $-\frac{1}{2}$, on sait donc que : $\exists\ (A,B) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = A + B.\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
Enfin les valeurs de u_n pour : $n = 0$, et : $n = 1$, donnent : $\ln(\alpha) = A + B$, $\ln(\beta) = A - \frac{B}{2}$, et :
$A = \frac{1}{3}.(\ln(\alpha) + 2.\ln(\beta))$, $B = \frac{2}{3}.(\ln(\alpha) - \ln(\beta))$.
Finalement : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)^n}.\beta^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$.

Suites adjacentes.

45. On peut commencer par démontrer par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n existent et sont positifs.
Puis : $\forall\ n \geq 0$, $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n.v_n} = \frac{1}{2}.(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$.
Donc à partir du rang 1, on a :
- $u_n \geq v_n$,
- $\frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \leq 0$,

et (u_n) est décroissante à partir du rang 1, minorée par 0 donc convergente,
- $\sqrt{u_n.v_n} - v_n = \sqrt{v_n}.(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \geq 0$,

et (v_n) est croissante à partir du rang 1, majorée par u_1, donc convergente.
Notons L_u et L_v leurs limites respectives.
En passant à la limite dans l'égalité donnant u_{n+1}, on obtient : $L_u = \frac{1}{2}.(L_u + L_v)$,
d'où : $L_u = L_v$, et les deux suites sont adjacentes.

46. Comme dans l'exercice précédent, on démontre que (u_n) et (v_n) sont bien définies, à valeurs strictement positives, puis avec :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2.(u_n + v_n)}$, on démontre qu'à partir du rang 1, on a : $u_n \geq v_n$.
Ensuite, on démontre que (v_n) croît, (u_n) décroît, et convergent vers deux limites, qui sont égales, à nouveau en utilisant la relation définissant u_{n+1}.

Un peu de théorie.

47. Puisque (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans [0,1], on a :
$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n.v_n \leq u_n$, et : $0 \leq 1 - u_n \leq 1 - u_n.v_n$,
et le théorème des gendarmes montre que $(1 - u_n)$ tend vers 0, donc (u_n) tend vers 1.
(u_n) et (v_n) jouant des rôles identiques, (v_n) tend aussi vers 1.

48. L'hypothèse indique qu'il existe une suite extraite de (z_n), soit ($z_{\varphi(n)}$) qui converge vers : $z = a + i.b$.

Mais alors ($a_{\varphi(n)}$) converge vers a, et ($b_{\varphi(n)}$) vers b, comme parties réelle et imaginaire d'une suite convergente (ici ($z_{\varphi(n)}$)).

La réciproque est fausse, comme le montre le contrexemple donné par :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ z_n = (-1)^n + i.(-1)^{n+1}$.

En effet, la suite constante égale à 1 est extraite de (a_n), tout comme de (b_n), puisque :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ a_{2.n} = (-1)^{2.n} = 1$,

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ b_{2.n+1} = (-1)^{(2.n+1)+1} = 1$,

mais $(1+i)$ n'est pas valeur d'adhérence de (z_n).

En effet : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ z_n = (-1)^n.(1-i)$,

et (z_n) n'a que deux valeurs d'adhérence qui sont $(1-i)$ et $(-1+i)$.