Réduction d'endomorphismes (corrigé niveau 3).

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

72. a. Il est clair que l'image d'une suite convergente est une suite convergente, puisque u opère sur ces suites un « décalage vers la gauche ».
De plus, la linéarité de u se vérifie sans peine.
Si on cherche les valeurs propres (et les vecteurs propres) de u, on cherche (x_n) convergente non nulle, et λ réel tels que : $u((x_n)) = \lambda.(x_n)$, soit : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \lambda.x_n$.
(x_n) doit donc être géométrique, et valoir : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_n = \lambda^n.x_0$.
Comme de plus, elle doit être convergente, on doit avoir : $-1 < \lambda \leq 1$, ou : $x_0 = 0$.
Réciproquement, soient : $-1 < \lambda \leq 1$, et (x_n) définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_n = \lambda^n$.
Alors (x_n) est non nulle (même si : $\lambda = 0$, valeur pour laquelle : $(x_n) = (1,0,0,...,0,...)$), et :
$u((x_n)) = \lambda.(x_n)$.
Donc : $Sp(u) =]-1,+1]$, et : $\forall\ \lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(u) = Vect((\lambda^n))$, et est donc de dimension 1.

b. v opère lui un décalage vers la droite.
C'est, comme pour u, un endomorphisme de E.
On cherche de même les vecteurs propres et valeurs propres de v, en posant :
$(x_n) \in$ E, $\lambda \in \mathbb{R}$, tels que : $(y_n) = v((x_n)) = \lambda.(x_n)$, soit :
$y_0 = 0 = \lambda.x_0$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = x_n = \lambda.x_{n+1}$.
Distinguons alors deux cas :
• si : $\lambda \neq 0$, alors : $x_0 = 0$, puis par récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_n = 0$, car : $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{\lambda}$, et : $(x_n) = 0$.
Donc une valeur propre de v ne peut être non nulle.
• si : $\lambda = 0$, alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ x_n = \lambda.x_{n+1} = 0.x_{n+1} = 0$, donc à nouveau : $(x_n) = 0$.
Finalement, v n'a pas de valeur propre.

73. a. Notons tout d'abord que, pour x fixé, les fonctions sous les intégrales définissant $u(f)(x)$ et $v(f)(x)$ sont des fonctions de t définies et continues sur $[-\pi,+\pi]$, ce qui garantit l'existence de ces intégrales.
Puis on peut écrire : $\forall\ x \in [-\pi,+\pi]$,

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{+\pi}[\cos(x).\cos(t) + \sin(x).\sin(t)].f(t).dt$$

$$= \cos(x).\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(t).f(t).dt\right) + \sin(x).\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(t).f(t).dt\right).$$

De même : $\forall\ x \in [-\pi,+\pi]$, $v(f)(x) = \sin(x).\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(t).f(t).dt\right) - \cos(x).\left(\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(t).f(t).dt\right)$.

b. Sous la forme précédente, il est immédiat que $u(f)$ et $v(f)$ sont des fonctions définies et continues de $[-\pi,+\pi]$ dans $\mathbb{R}$, et ceci pour toute fonction f de E.
Comme la linéarité de u et de v est immédiate, ce sont bien des endomorphismes de E.

c. La forme établie en a. montre que : $\forall\ f \in$ E, $u(f) \in Vect(\sin,\cos)$, de même pour v.
Soit maintenant f un vecteur propre de u et λ une valeur propre associée.
On a donc : $u(f) = \lambda.f = A.\sin + B.\cos$.
On distingue alors deux cas :
• si : $\lambda \neq 0$, alors f est combinaison linéaire de $\sin$ et $\cos$, donc on peut poser : $f = a.\sin + b.\cos$.
Mais alors : $\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(t).f(t).dt = b.\pi$, et : $\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(t).f(t).dt = a.\pi$, d'où : $u(f) = b.\pi.\cos + a.\pi.\sin = \pi.f$.
Donc π est valeur propre de u (et c'est la seule non nulle) et l'espace propre associé est $Vect(\sin,\cos)$.
• si : $\lambda = 0$, alors $(\sin,\cos)$ étant libre, on doit avoir : $\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(t).f(t).dt = \int_{-\pi}^{+\pi}\sin(t).f(t).dt = 0$.
Réciproquement, si f vérifie cette double condition, alors : $u(f) = 0$.
Donc 0 est valeur propre de u (il existe des éléments de E non nuls vérifiant les deux conditions

au-dessus car il suffit de prendre : $f = 1$, comme vecteur propre) et son espace propre associé est :

$E_0(u) = \{ f \in E, \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t).f(t).dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t).f(t).dt = 0 \}$.

Pour v on raisonne de la même façon.

Mais pour : $\lambda \neq 0$, (avec les mêmes notations), on doit avoir :

$v(f) = b.\pi.\sin - a.\pi.\cos = \lambda.(a.\sin + b.\cos)$,

soit : $\lambda.a = b.\pi$, $= \lambda.b = -a.\pi$, et en multipliant la première égalité par a, et en soustrayant la deuxième multipliée par b, on aboutit à : $\lambda.(a^2 + b^2) = 0$, soit : $a = b = 0$, et finalement : $f = 0$.

Donc v n'a pas de valeur propre non nulle.

En revanche, 0 est encore valeur propre de v pour le même espace propre que u.

74. a. La fonction g obtenue à partir de f est clairement définie sur ℝ, continue sur ℝ*.

En 0, g a une limite finie, car si on note F une primitive de f sur ℝ (qui existe puisque f est continue sur ℝ), alors : $\forall\ x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0}$, et : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = f(0) = g(0)$.

Autrement dit, g est continue en 0, et donc sur ℝ.

Enfin, la linéarité de φ est immédiate :

$\forall\ (f_1, f_2) \in E^2$, $\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\ x \neq 0$, $\varphi(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \dfrac{1}{x}.\int_0^x (\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(t).dt$, soit :

$\varphi(\lambda_1.f_1 + \lambda_2.f_2)(x) = \lambda_1.\dfrac{1}{x}.\int_0^x f_1(t).dt + \lambda_2.\dfrac{1}{x}.\int_0^x f_2(t).dt = (\lambda_1.\varphi(f_1) + \lambda_2.\varphi(f_2))(x)$,

et cette égalité étant évidemment vraie aussi pour : $x = 0$, on en déduit la linéarité de φ.

b. Soit : $f \in$ E, et : $\lambda \in$ ℝ, tels que : $\varphi(f) = \lambda.f$.

En notant F la primitive de f sur ℝ s'annulant en 0, alors :

$\forall$ x ∈ ℝ*, $\lambda.f(x).x = F(x)$, soit encore : $\lambda.F'(x).x = F(x)$,

et F est solution de l'équation différentielle : $\lambda.x.y' - y = 0$.

Si : $\lambda = 0$, alors : $F = 0$, et : $f = F' = 0$, donc 0 n'est pas valeur propre de φ.

Si : $\lambda \neq 0$, alors sur ℝ+*, F vaut : $\forall\ x > 0$, $F(x) = C.|x|^{\frac{1}{\lambda}} = C.x^{\frac{1}{\lambda}}$.

On en déduit que f vaut, sur ℝ+* : $\forall\ x > 0$, $f(x) = F'(x) = \dfrac{1}{\lambda}.C.x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Mais comme f doit être continue sur ℝ, elle doit admettre une limite finie en 0, ce qui entraîne :

$\dfrac{1}{\lambda} - 1 \geq 0$, soit : $1 \geq \lambda > 0$.

Les seules valeurs propres possibles de u sont donc les réels de l'intervalle]0,1].

Réciproquement, pour un tel réel λ, on a vu (avec les notations précédentes) que :

$\forall\ x > 0$, $f(x) = C_+.x^{\frac{1}{\lambda}-1}$, et : $\forall\ x < 0$, $f(x) = C_-.|x|^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

Distinguons alors deux cas :

- $\lambda = 1$, et f est constante à droite et à gauche de 0.

On doit prendre : $C_+ = C_- = f(0)$, et les fonctions constantes non nulles sont bien (comme on le vérifie) vecteurs propres de φ pour la valeur propre 1, l'espace propre associé étant de dimension 1,

- $0 < \lambda < 1$, et f tend à droite et à gauche vers 0 en 0, et ceci pour tout choix (indépendamment) de C_+ et C_-, autrement dit les vecteurs propres (comme on le vérifie) sont définis pour ces λ par :

$\forall\ x > 0$, $f(x) = C_+.x^{\frac{1}{\lambda}-1}$,

$\forall\ x < 0$, $f(x) = C_-.|x|^{\frac{1}{\lambda}-1}$,

$f(0) = 0$;

et forment un espace vectoriel de dimension 2.

75. a. Soit : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $X \neq 0$, $A.B.X = \lambda.X$.

Alors : $B.A.B.X = \lambda.B.X$, et comme $B.X$ est non nul, puisque :

$(B.X = 0) \Rightarrow (A.B.X = \lambda.X = 0) \Rightarrow (X = 0$, ou : $\lambda = 0)$, ce qui est exclu,

on vient de trouver un vecteur propre de $B.A$ associé à λ.

Conclusion : λ est bien valeur propre (non nulle) de $B.A$.

L'implication inverse est évidemment vraie, A et B jouant des rôles symétriques.

b. Supposons maintenant que 0 est valeur propre de $A.B$.

Alors $A.B$ n'est pas inversible (puisqu'il existe : $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $X \neq 0$, $A.B.X = 0$), et : $\det(A.B) = 0$.

Puis : $\det(B.A) = \det(B).\det(A) = \det(A).\det(B) = \det(A.B) = 0$, et $B.A$ n'est pas non plus inversible.

Dans ce cas, 0 est aussi valeur propre de $B.A$.

c. Toute valeur propre de $A.B$ étant valeur propre de $B.A$ (nulle ou pas), et cette implication étant aussi vraie dans l'autre sens puisque A et B jouent des rôles symétriques, on en déduit que :

$Sp(A.B) = Sp(B.A)$.

Remarque : on ne dit rien ici des multiplicités.

76. a. Soit λ une valeur propre de u et f un vecteur propre associé.

Alors : $\forall\ x \geq 0$, $u(f)(x) = f(x+1) = \lambda.f(x)$.

Si on note L la limite (finie) de f en +∞, on a donc : $L = \lambda.L$, ou encore : $L.(1-\lambda) = 0$.

Donc, si : $L \neq 0$, alors : $\lambda = 1$.

b. Réciproquement, 1 est valeur propre de u si on peut trouver f non nulle et avec une limite finie en +∞, telle que : $\forall\ x \geq 0$, $f(x+1) = f(x)$.

f est donc une fonction périodique de période 1.

Mais une telle fonction ne peut admettre une limite finie en +∞ que si elle est constante.

On vérifie alors sans peine que 1 est valeur propre de u et son espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes.

c. On sait qu'il existe une valeur x_0 telle que : $f(x_0) \neq 0$, et il est immédiat par récurrence que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $f(x_0 + n) = \lambda^n.f(x_0)$.

f étant supposée tendre vers 0 en +∞, la suite ($f(x_0+n)$) tend aussi vers 0, donc : $|\lambda| < 1$.

d. Soit enfin λ tel que : $|\lambda| < 1$.

Soit alors une fonction affine sur [0,1] telle que : $f(0) = 1$, $f(1) = \lambda$, et telle que :

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [n, n+1[$, $f(x) = \lambda^n.f(x-n)$, soit : $\forall\ x \geq 0$, $f(x) = \lambda^{\lfloor x \rfloor}.f(x - \lfloor x \rfloor)$.

Alors f est affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$ et se raccorde en toutes les valeurs entières.

On vérifie de plus que : $\forall\ x \geq 0$, $f(x+1) = \lambda.f(x)$,

et enfin f a bien une limite finie nulle en +∞, puisque : $\max\limits_{x \in [n,n+1]} |f(x)| = |\lambda|^n.\max\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Autrement dit, on a trouvé un vecteur propre associé à λ pour u dans E.

Finalement : $Sp(u) =]-1, +1]$.

77. a. Si : $rg(u) = 1$, alors : $\dim(\ker(u)) = n-1$, donc 0 est valeur propre de u de multiplicité au moins $n-1$ et la somme des valeurs propres de u valant $tr(u)$, la dernière valeur propre de u vaut $tr(u)$.

Donc : $\chi_u(x) = (x-0)^{n-1}.(x - tr(u)) = x^{n-1}.(x - tr(u)) = x^n - tr(u).x^{n-1}$.

b. Si : $rg(u) = 2$, alors : $\dim(\ker(u)) = n-2$,

Soit : $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, une base de E, telle que $(e_3, ..., e_n)$ soit une base de $\ker(u)$.

Alors la matrice de u dans $\mathcal{B}$ s'écrit : $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & d & \vdots & & \vdots \\ * & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

b. On peut alors calculer : $\chi_u(x) = x^{n-2}.(x^2 - (a+d).x + (a.d - b.c))$.

De plus : $mat_{\mathscr{B}}(u^2) = \begin{pmatrix} a^2+b.c & c.(a+d) & 0 & \cdots & 0 \\ b.(a+d) & b.c+d^2 & \vdots & & \vdots \\ * & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, par exemple avec un calcul par blocs et :

$tr(u^2) = a^2 + d^2 + 2.b.c = (a+d)^2 - 2.a.d + 2.b.c$, donc : $a.d - b.c = \frac{1}{2}.(tr(u))^2 - tr(u^2)$.

Finalement : $\chi_u(x) = x^{n-2}.(x^2 - tr(u).x + \frac{1}{2}.(tr(u)^2 - tr(u^2))$.

Diagonalisation, trigonalisation.

78. a. Le rang de A vaut 2 puisque les deux premières colonnes forment une famille libre et les suivantes sont égales à la première.
Donc 0 est valeur propre de A puisque A n'est pas inversible.

b. Puisque le noyau de A (ou de l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ canoniquement associé à A) est de dimension 2, 0 est valeur propre de A d'ordre au moins 2 et χ_A est donc factorisable par x^2, d'où l'écriture proposée de ce polynôme.

c. La trace de A étant la somme des racines de χ_A, on a évidemment : $a+b+0+0=k$, soit : $a+b=k$.
Puis A est trigonalisable et sur la diagonale d'une matrice triangulaire T semblable à A, on trouve a,b et deux fois 0.
Or A^2 a comme éléments diagonaux $3+k^2$ et 1 répété trois fois, et est semblable à T^2 qui a sur sa diagonale les carrés des éléments diagonaux de T.
Donc : $1+1+1+(3+k^2) = a^2 + b^2 + 0 + 0$, soit la deuxième égalité.

d. Le cas : $a=b$, conduit à : $2.a=k$, et : $6+k^2 = 2.a^2$, soit : $12+k^2 = k^2$, soit : $k^2 = -12$, et : $k = \pm 2.i.\sqrt{3}$, valeurs pour lesquelles on a : $a = b = \pm i.\sqrt{3}$.
Pour : $k = 2.i..\varepsilon\sqrt{3}$, avec : $\varepsilon = \pm 1$, A a donc :

- une valeur propre double 0 et un espace propre associé de dimension 2, d'une part,
- une deuxième valeur propre double $\varepsilon.i.\sqrt{3}$, pour laquelle l'espace propre associé est de dimension 1, de base $\begin{pmatrix} 1 \\ i.\varepsilon.\sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, comme on le vérifie en résolvant le système 4×4 : $A.X = \varepsilon.i.\sqrt{3}.X$.

e. Pour les deux valeurs de k précédentes, A n'est pas diagonalisable puisque la deuxième valeur propre (double) a un espace propre associé qui est de dimension 1.
Pour toutes les autres valeurs, 0 est valeur propre double avec un espace propre associé de dimension 2, et les deux autres valeurs propres sont distinctes donc simples avec un espace propre associé pour chacune de dimension 1 : la matrice A est alors diagonalisable.
En conclusion, A est diagonalisable si et seulement si : $k \neq \pm 2.i.\sqrt{3}$.

Remarque : pour k réel, la matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

79. Soit M un vecteur propre de φ et λ sa valeur propre associée.
Alors : $\lambda.M = M + tr(M).I_n$, soit : $(\lambda - 1).M = tr(M).I_n$.
Distinguons alors deux cas :

- $\lambda = 1$, entraîne : $tr(M) = 0$.
- $\lambda \neq 1$, entraîne : M colinéaire à I_n.

Puisque les deux familles de matrices que l'on trouve sont dans des espaces respectivement de dimension 1 et $n^2 - 1$, on peut penser à une réciproque à savoir :

- ∀ $M = \alpha.I_n$, avec : α ∈ **K**, alors : $\phi(M) = \alpha.I_n + n.\alpha.I_n = (n+1).M$,

• $\forall\ M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, si : $tr(M) = 0$, alors : $\phi(M) = M$.

En conclusion, ϕ est diagonalisable, puisqu'il admet deux valeurs propres.

• l'une qui vaut 1 est simple d'espace propre associé la droite $Vect(I_n)$,

• l'autre qui vaut $n+1$, qui est d'ordre $n^2 - 1$, puisque son espace propre associé est l'hyperplan formé par les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices de trace nulle.

80. Puisque A est de rang 2, le théorème du rang appliqué à A (ou à son endomorphisme canoniquement associé) montre que 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-2$.

Puisque : $tr(A) = 0$, les deux dernière racines λ et μ de χ_A vérifient : $0.(n-2) + \lambda + \mu = tr(A) = 0$, donc elles sont opposées.

Si maintenant on suppose que : $\lambda = -\mu = 0$, alors χ_A admettrait comme seule racine la valeur 0.

On aurait alors : $\chi_A(x) = x^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton montrerait que : $A^n = 0$ (on peut aussi dire que A serait semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, soit avec des 0 sur la diagonale, et cela entraîne aussi que : $A^n = 0$).

Or A^n est supposée non nulle.

Donc λ et μ sont non nulles et : $\lambda \neq \mu$, puisqu'elles sont opposées.

Donc 0 est valeur propre d'ordre $n-2$ avec un espace propre de dimension $n-2$ et λ et μ sont des valeurs propres simples : A est diagonalisable.

81. a. Un calcul à la main donne : $A.^tA = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2).I_4$

Donc : $\det((A - x.I_4).^t(A - x.I_4)) = (\chi_A(x))^2 = \det(((a-x)^2 + b^2 + c^2 + d^2).I_4)$,

d'où : $(\chi_A(x))^2 = ((a-x)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$,

et puisque $\chi_A(x)$ est de coefficient dominant égal à 1, on conclut que :

$\chi_A(x) = ((a-x)^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

b. Les racines de χ_A sont donc : $\lambda = a \pm i.\sqrt{b^2 + c^2 + d^2} = a \pm i.\omega$, avec la notation proposée.

On distingue alors deux cas :

• si : $b = c = d = 0$, alors a est valeur propre de multiplicité 4,

• si : $(b,c,d) \neq (0,0,0)$, alors A a deux valeurs propres doubles qui sont $a \pm i.\omega$.

c. A nouveau avec deux cas :

• si : $b = c = d = 0$, alors : $A = a.I_4$, auquel cas A est diagonalisable puisque diagonale,

• si : $(b,c,d) \neq (0,0,0)$, alors chaque valeur propre est double et en notant μ_ε ces valeurs propres

avec : $\varepsilon = \pm 1$, on a : $A_\varepsilon = A - \mu_\varepsilon.I_4 = \begin{pmatrix} -i.\varepsilon.\omega & -b & -c & -d \\ b & -i.\varepsilon.\omega & -d & c \\ c & d & -i.\varepsilon.\omega & -b \\ d & -c & b & -i.\varepsilon.\omega \end{pmatrix}$,

autrement dit la même matrice que A où on a remplacé a par $-i.\varepsilon.\omega$.

On sait alors que cette matrice A_ε n'est pas inversible donc : $rg(A_\varepsilon) \leq 3$.

Puis : $\dim(\ker(A_\varepsilon)) \leq 2$ (car la valeur propre est double), donc : $rg(A_\varepsilon) \geq 2$.

Enfin : $A_\varepsilon.^tA_\varepsilon = ((-1.\varepsilon.\omega)^2 + b^2 + c^2 + d^2).I_4 = 0$, donc : $\mathrm{Im}(^tA_\varepsilon) \subset \ker(A_\varepsilon)$, et :

$rg(^tA_\varepsilon) \leq \dim(\ker(A_\varepsilon))$.

Or : $rg(^tA_\varepsilon) = rg(A_\varepsilon)$, donc : $rg(A_\varepsilon) \leq 4 - rg(A_\varepsilon)$, et : $rg(A_\varepsilon) \leq 2$.

On en déduit que : $rg(A_\varepsilon) = 2$, et : $\dim(\ker(A_\varepsilon)) = 2$, autrement dit chaque espace propre est de dimension 2, soit la multiplicité de la valeur propre correspondante.

A est donc diagonalisable.

82. a. La linéarité de cette application est due à l'unicité du reste garantie par la division euclidienne.

En effet, si P_1 et P_1 sont dans $\mathbf{K}_2[X]$, et si λ_1 et λ_2 sont des éléments de **K**, alors :

pour : $i = 1,2$, $\exists\ (Q_i R_i) \in$ **K**$_2$[X]^2, $X^3.P_i = A.Q_i + R_i$, et : $\deg(R_i) \leq 2$, où on a posé :
$A = (X-\alpha).(X-\beta).(X-\gamma)$.

Donc : $X^3.(\lambda_1.P_1 + \lambda_2.P_2) = A.(\lambda_1.Q_1 + \lambda_2.Q_2) + (\lambda_1.R_1 + \lambda_2.R_2)$, et comme : $\deg(\lambda_1.R_1 + \lambda_2.R_2) \leq 2$, on a ainsi le reste cherché soit : $u(\lambda_1.P_1 + \lambda_2.P_2) = \lambda_1.R_1 + \lambda_2.R_2 = \lambda_1.u(P_1) + \lambda_2.u(P_2)$.

b. On peut choisir de raisonner dans une base en lien avec la base de Lagrange associée aux valeurs α, β et γ.
On pose donc : $L_\alpha = (X-\beta).(X-\gamma)$, $L_\beta = (X-\alpha).(X-\gamma)$, $L_\gamma = (X-\alpha).(X-\beta)$.
Alors : $X^3.L_\alpha = A.Q + R$, où : $Q \in$ **K**$_2$[X], et : $\deg(R) \leq 2$.
En évaluant en β et γ, on en déduit que : $R(\beta) = R(\gamma) = 0$, donc : $\exists\ C \in$ **K**, $R = C.(X-\beta).(X-\gamma)$.
Enfin : $\alpha^3.L_\alpha(\alpha) = \alpha^3.(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma) = R(\alpha) = C.(\alpha-\beta).(\alpha-\gamma)$, et : $C = \alpha^3$, et on a des résultats similaires pour L_β et L_γ.
On a donc obtenu que : $u(L_\alpha) = \alpha^3.L_\alpha$, de même pour les deux autres polynômes.
Autrement dit la famille proposée est une base de **K**$_2$[X], formée de vecteurs propres de u et u est bien diagonalisable.

83. a. Raisonnons par double implication.
[$\Rightarrow$] Si : $\lambda \in Sp(B)$, alors :

$\exists\ X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2.n,1}(\mathbb{C})$, avec : $(Y, Z) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $Y \neq 0$, ou : $Z \neq 0$ tel que : $B.X = \lambda.X$.

Donc en développant le produit par blocs : $Z = \lambda.Y$, et : $A.Y = \lambda.Z$, donc :
$A.Y = \lambda.(\lambda..Y) = \lambda^2.Y$, et : $A.Z = \lambda.A.Y = \lambda^2.Z$,
et comme l'une des deux matrices Y ou Z est non nulle, on en déduit que λ^2 est valeur propre de A.

[$\Leftarrow$] Si : $\lambda^2 \in Sp(A)$, $\exists\ Y \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, $Y \neq 0$, $A.Y = \lambda^2.Y$, et en posant : $X = \begin{pmatrix} Y \\ \lambda.Y \end{pmatrix}$, on constate que :

- $X \in \mathcal{M}_{2.n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0$, et :
- $B.X = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ A & 0_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} Y \\ \lambda.Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.Y \\ A^2.Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.Y \\ \lambda^2.Y \end{pmatrix} = \lambda.X$.

Donc X est vecteur propre de B associé à λ, et : $\lambda \in Sp(B)$.

b. Soit : $\lambda \in Sp(B)$.

Alors l'application φ_λ définie par : $\forall\ X \in E_\lambda(B)$, $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, $\varphi_\lambda(X) = Y$,

est un isomorphisme de $E_\lambda(B)$ dans $E_{\lambda^2}(A)$.
En effet :

- $\forall\ X \in E_\lambda(B)$, $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, on a : $A.Y = \lambda^2.Y$, comme vu au-dessus, et : $\varphi_\lambda(X) \in E_{\lambda^2}(A)$,
- φ_λ est clairement linéaire,
- φ_λ est injective car toujours avec ce qu'on a vu au-dessus :

  $\forall\ X \in E_\lambda(B)$, $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$, $(Y = \varphi_\lambda(X) = 0) \Rightarrow (Z = \lambda.Y = 0) \Rightarrow (X = 0)$,

- φ_λ est surjective car : $\forall\ Y \in E_{\lambda^2}(A)$, si on pose : $X = \begin{pmatrix} Y \\ \lambda.Y \end{pmatrix}$, on a : $B.X = \lambda.X$, et : $\varphi_\lambda(X) = Y$.

Donc φ_λ est un isomorphisme de $E_\lambda(B)$ dans $E_{\lambda^2}(A)$, et : $\dim(E_\lambda(B)) = \dim(E_{\lambda^2}(A))$.

c. En plus de 0 comme éventuelle valeur propre de A (et donc de B d'après la question a.) et qui correspond à $\ker(A)$ (et à $\ker(B)$), chaque valeur propre non nulle μ_i de A correspond à deux valeurs propres distinctes $\pm\lambda_i$ de B, et les p valeurs propres distinctes non nulles de A fournissent

ainsi $2.p$ valeurs propres distinctes pour B et ce sont les valeurs propres non nulles de B.
De plus pour chaque valeur propre non nulle μ_i de A, les deux espaces propres $E_{\pm\lambda_i}(B)$ correspondant ont même dimension que l'espace propre $E_\mu(A)$.
Raisonnons alors à nouveau par double implication :
[⇐] Si A est diagonalisable et inversible, alors 0 n'est pas valeur propre de A et :
$\sum_{\mu\in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)) = n$, et : $\sum_{\lambda\in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 2.\sum_{\mu\in Sp(A)} \dim(E_\mu(A)) = 2.n$, et B est diagonalisable.
[⇒] Si B est diagonalisable, alors : $2.n = \sum_{\lambda\in Sp(B)} \dim(E_\lambda(B)) = \dim(\ker(B)) + 2.\sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A))$.

Donc : $\dim(\ker(B)) = \dim(\ker(A)) = 2.n - 2.\sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A))$, d'où :

$$\dim(\ker(A)) + \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A)) = 2.n - \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A)) = n + \left(n - \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A)) \right) \geq n.$$

En effet, les espaces propres de A (pour les valeurs propres non nulles) sont en somme directe et la somme de leurs dimensions vaut au plus n.

Mais la somme $\left(\ker(A) + \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} E_\mu(A) \right)$ est également directe donc la somme des dimensions vaut également au plus n.

Finalement : $\dim(\ker(A)) + \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A)) = n$, et : $n - \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A)) = 0$.

D'où :

- $\dim(\ker(A)) = 0$, et A est inversible et :
- $n = \sum_{\substack{\mu\in Sp(A)\\ \mu\neq 0}} \dim(E_\mu(A)) = \sum_{\mu\in Sp(A)} \dim(E_\mu(A))$, et A est diagonalisable.

84. a. A est trigonalisable dans ℂ, et A est semblable à T, qui comporte sur sa diagonale les valeurs propres de A, répétées avec leur multiplicité.

De plus, si : $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & t_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors : ∀ k ∈ ℕ, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$.

Donc : ∀ k ∈ ℕ, $tr(A^k) = tr(T^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

b. Pour démontrer cette équivalence, on raisonne par double implication :
[⇐] Si : $Sp(A) = Sp(B)$, alors les valeurs propres de A et de B étant les mêmes (avec la même multiplicité), on a immédiatement : ∀ k ∈ ℕ, ℕ, $tr(A^k) = tr(B^k)$.
[⇒] Supposons maintenant que : ∀ k ∈ ℕ, $tr(A^k) = tr(B^k)$.
Notons $\mu_1,...,\mu_N$ les valeurs propres distinctes de A et de B, et $m_A(\mu)$ (ou $m_B(\mu)$) la multiplicité de μ comme valeur propre de A (ou de B), avec la convention que, si μ n'est pas valeur propre de A (ou de B), alors : $m_A(\mu) = 0$ (ou : $m_B(\mu) = 0$).
Vu qu'on suppose l'égalité de toutes les traces, on a donc : ∀ k ∈ ℕ, $\sum_{i=1}^{N} (m_A(\mu_i) - m_B(\mu_i)).\mu_i^k = 0$.
Or ces N égalités correspondent à un système linéaire dont est solution le N-uplet $(x_1,...,x_N)$ avec : ∀ $1 \leq i \leq N$, $x_i = m_A(\mu_i) - m_B(\mu_i)$.

Mais le déterminant de ce système est un déterminant de Vandermonde où les $\mu_1,...,\mu_N$ sont distincts deux à deux.
Donc ce déterminant étant non nul, le système a une solution unique qui est le N-uplet nul.
Par conséquent : $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $x_i = 0$, soit : $m_A(\mu_i) = m_B(\mu_i)$.
Donc A et B ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

85. On connaît des endomorphismes facilement diagonalisables : ceux qui, dans un **K**-espace vectoriel E de dimension n, admettent T' valeurs propres distinctes.
Et on sait facilement calculer les valeurs propres de tels endomorphismes lorsque leur matrice représentative est triangulaire.
L'idée est donc de partir de : $u \in \mathscr{L}$(E), de choisir une base $\mathscr{B}$ de E, de noter : $A = mat_{\mathscr{B}}(u)$, et de montrer que A est la somme de deux matrices triangulaires à éléments diagonaux distincts deux à deux.
On note pour cela : $M = \max\limits_{1\leq i<j\leq n} \left|a_{i,i} - a_{j,j}\right|$, puis T et T' les matrices respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure définies par :
- $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$, $t_{i,j} = a_{i,j}$,
  $\forall\ 1 \leq j < i \leq n$, $t_{i,j} = 0$,
  $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $t_{i,i} = a_{i,i} + i.(M+1)$, et :
- $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$, $t'_{i,j} = 0$,
  $\forall\ 1 \leq j < i \leq n$, $t'_{i,j} = a_{i,j}$,
  $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $t'_{i,i} = a_{i,i} - i.(M+1)$.

Il est immédiat que : $T + T' = A$.
D'autre part, si : $\exists\ 1 \leq i < j \leq n$, $t_{i,i} = t_{j,j}$, alors : $\left|a_{i,i} - a_{j,j}\right| = \left|i - j\right|.(M+1) > M$, ce qui est impossible.
Donc les éléments diagonaux de T sont distincts deux à deux, de même pour T'.
Donc T et T' admettent chacune T' valeurs propres distinctes, égales à leur éléments diagonaux, et sont donc toutes deux diagonalisables.
Si enfin, on note v et v' les endomorphismes de E ayant T et T' pour matrice représentative dans $\mathscr{B}$, alors : $u = v + v'$, v et v' étant diagonalisables.

86. a. Pour : $n \geq 1$, notons :
- P_n (et F_n) les événements : « obtenir Pile (Face) au $n^{\text{ième}}$ lancer », et :
- C_n l'événement : « obtenir 3 Pile consécutifs lors des n premiers lancers ».

Il est immédiat que : $p_1 = p_2 = 1$, puisqu'il n'y a pas assez de lancers pour obtenir 3 Pile.
Puis la probabilité q_3 d'obtenir 3 Pile consécutifs lors des 3 premiers lancers vaut :
$$q_3 = P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) = P(P_1).P(P_2).P(P_3) = \frac{1}{8}, \text{ par indépendance des lancers.}$$
Et par complémentaire : $p_3 = 1 - q_3 = \dfrac{7}{8}$.

b. On utilise le système complet d'événements $(F_n, (P_n \cap F_{n-1}), (P_n \cap P_{n-1} \cap F_{n-2}), (P_n \cap P_{n-1} \cap P_{n-2}))$.
Les événements proposés sont bien incompatibles et leur réunion forme bien l'univers et la formule des probabilités totales permet d'écrire :
$$P(\overline{C_n}) = P_{F_n}(\overline{C_n}).P(F_n) + P_{P_n\cap F_{n-1}}(\overline{C_n}).P(P_n \cap F_{n-1}) + P_{P_n\cap P_{n-1}\cap F_{n-2}}(\overline{C_n}).P(P_n \cap P_{n-1} \cap F_{n-2})$$
$$+ P_{P_n\cap P_{n-1}\cap P_{n-2}}(\overline{C_n}).P(P_n \cap P_{n-1} \cap P_{n-2}).$$
Or $P_{F_n}(\overline{C_n})$ correspond à la probabilité de ne pas avoir 3 Pile consécutifs lors des n premiers lancers sachant qu'on a obtenu Face au $n^{\text{ième}}$ lancer.
C'est donc la probabilité de ne pas avoir 3 Pile consécutifs lors des $n-1$ premiers lancers et :
$P_{F_n}(\overline{C_n}) = p_{n-1}$.
De même : $P_{P_n\cap F_{n-1}}(\overline{C_n}) = p_{n-2}$, et : $P_{P_n\cap P_{n-1}\cap F_{n-2}}(\overline{C_n}) = p_{n-3}$.

Enfin : $P_{P_n \cap P_{n-1} \cap P_{n-2}}(\overline{C_n}) = 0$, puisque les trois derniers lancers donne chacun Pile.

Finalement et par indépendance : $\forall\ n \geq 4$, $p_n = P(\overline{C_n}) = \frac{1}{2}.p_{n-1} + \frac{1}{4}.p_{n-2} + \frac{1}{8}.p_{n-3}$.

c. On pose alors : $\forall\ n \geq 1$, $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n+1} \\ p_{n+2} \end{pmatrix}$, et : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et on a : $\forall\ n \geq 1$, $X_{n+1} = A.X_n$.

On en déduit classiquement : $\forall\ n \geq 1$, $X_n = A^{n-1}.X_1$.

On calcule ensuite : $\chi_A(x) = x^3 - \frac{1}{2}.x^2 - \frac{1}{4}.x - \frac{1}{8}$, et on remarque que 0 n'est pas racine de χ_A.

Puis : $\forall\ z \in \mathbb{C}^*$, $(\chi_A(z) = 0) \Rightarrow (1 = \frac{1}{2.z} + \frac{1}{4.z^2} + \frac{1}{8.z^3})$, et si de plus on suppose : $|z| \geq 1$, alors :

$1 = |1| \leq \frac{1}{2.|z|} + \frac{1}{4.|z|^2} + \frac{1}{8.|z|^3} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} < 1$, ce qui est absurde.

Donc les racines de χ_A sont toutes de module strictement inférieur à 1.

Enfin : $\forall\ x \in [-1,1]$, $\chi_A'(x) = 3.x^2 - x - \frac{1}{4} = 3.\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(x + \frac{1}{6}\right)$.

Donc χ_A est strictement croissante sur $\left[-1, -\frac{1}{6}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$, et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et comme de plus : $\chi_A(-1) = -\frac{11}{8} < 0$, et : $\chi_A(1) = \frac{1}{8} > 0$, on en déduit que χ_A s'annule en un unique réel entre -1 et 1.
Les deux autres racines sont complexes conjuguées, et toujours de module strictement inférieur à 1.
La matrice A est donc diagonalisable, et : $\forall\ n \geq 1$, $X_n = P.D^{n-1}.P^{-1}.X_1$.

En développant, la première montre que la suite (p_n) est combinaison linéaire de (α^n), (β^n), (γ^n), α, β et γ étant les racines de χ_A.

Mais comme ces trois suites (géométriques) tendent vers 0, on conclut que : $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0$.

Remarque : si on note : $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{C_n}$, alors A est l'événement : « ne jamais obtenir 3 Pile consécutifs ».

Or : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $\overline{C_{n+1}} \subset \overline{C_n}$, donc par continuité décroissante : $P(A) = \lim_{n \to +\infty} P(\overline{C_n}) = \lim_{n \to +\infty} p_n = 0$.

On en conclut que A est presque impossible et qu'on obtiendra 3 Pile consécutifs presque sûrement au cours des lancers.

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

87. On appelle u l'endomorphisme canoniquement associé à A (donc dans $\mathbb{R}^3$).
On cherche alors une base de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice proposée représente u dans cette nouvelle base.
Pour la trouver, on peut raisonner comme par analyse-synthèse.
Pour cela, si on note : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors :

- $e_1 \in \ker(u)$,
- $u(e_2) = e_3$,
- $u(e_3) = -e_2$, donc : $u^2(e_2) = -e_2$, et : $e_2 \in \ker(u^2 + id_E)$.

Or : $\ker(u^2 + id_E) \neq \{0\}$, sinon $u^2 + id_E$ serait inversible, $A^2 + I_3$ aussi, et l'égalité : $A.(A^2 + I_3) = 0$, conduirait à : $A = 0$ (en multipliant par $(A^2 + I_3)^{-1}$).

Donc on peut trouver : $e_2 \in \ker(u^2 + id_E)$, et : $e_2 \neq 0$.

On pose alors : $e_3 = u(e_2)$, qui est aussi non nul puisque : $u(e_3) = u^2(e_2) = -e_2 \neq 0$.

Enfin, A étant de taille 3×3, a un polynôme caractéristique réel de degré 3, qui admet donc au moins une racine réelle.
Or cette racine (valeur propre de A) doit être racine du polynôme annulateur : $P = X^3 + X$, qui lui n'admet que 0 comme racine réelle.
Donc 0 est valeur propre de A et on peut trouver : $e_1 \in \mathbb{R}^3$, $e_1 \neq 0$, $u(e_1) = 0$.
Montrons enfin que la famille ainsi construite convient.
Soit donc une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs : $\alpha_1.e_1 + \alpha_2.e_2 + \alpha_3.e_3 = 0$.
Alors en prenant deux fois l'image par u, on obtient : $\alpha_2.e_3 - \alpha_3.e_2 = 0$, et : $-\alpha_2.e_2 - \alpha_3.e_3 = 0$.
En multipliant la première égalité par α_3, la deuxième par α_2 et en ajoutant, on obtient : $(\alpha_3^2 + \alpha_2^2).e_3 = 0$.
Puisque e_3 est non nul, on en déduit que : $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$, et en revenant à l'égalité de départ : $\alpha_1 = 0$.
La famille est donc libre et constitue une base de $\mathbb{R}^3$.
Enfin, la matrice de u dans cette base (notée $\mathscr{B}$) est bien : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Conclusion : si on appelle P la matrice de passage de la base canonique à $\mathscr{B}$, elle permet d'écrire : $A = P.B.P^{-1}$, et A est bien semblable à B.

88. On dispose d'un polynôme annulateur scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, qui est $X^p - 1$.
Donc A est diagonalisable comme matrice à coefficients complexes, et ses valeurs propres sont des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
D'autre part, χ_A est à coefficients réels (puisque A est une matrice réelle), donc ses racines sont réelles ou complexes conjuguées.
Si χ_A a des racines réelles, elles ne peuvent donc valoir que ± 1, et A est semblable à une matrice diagonale D comportant sur sa diagonale ± 1.
Or dans ce cas : $D^2 = I_2$, donc : $A^2 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.
Si χ_A n'a pas de racines réelles, alors elles sont complexes conjuguées et valent $e^{\pm i.\theta}$, pour une valeur : $\theta \in \mathbb{R}$, avec : $\theta \neq 0\ (\pi)$.
Mais la somme de ces valeurs propres vaut $tr(A)$, et également $2.\cos(\theta)$.
Enfin, A étant à coefficients entiers, $tr(A)$ est entier, et comme : $\theta \neq 0\ (\pi)$, on doit avoir : $2.\cos(\theta) \in \{-1, 0, +1\}$.

- si : $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$, alors : $\theta = \pm\dfrac{\pi}{3}\ (2.\pi)$, et A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} e^{i.\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i.\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix}$.

On a alors : $D^6 = I_2$, donc : $A^6 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

- si : $\cos(\theta) = 0$, alors : $\theta = \pm\dfrac{\pi}{2}\ (2.\pi)$, et A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, puis : $D^4 = A^4 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

- si : $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$, alors : $\theta = \pm\dfrac{2.\pi}{3}\ (2.\pi)$, et A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} e^{i.\frac{2.\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i.\frac{2.\pi}{3}} \end{pmatrix}$, d'où : $D^3 = I_2$, donc : $A^3 = I_2$, et : $A^{12} = I_2$.

Finalement, dans tous les cas : $A^{12} = I_2$.

89. a. On peut remarquer que : ${}^tM^2 = I_n - M$, donc : $\det(M - I_n) = (-1)^n.(\det(M))^2$.
Il est alors évident que : ($1 \notin Sp(M)$) $\Leftrightarrow$ ($\det(M - I_n) \neq 0$) $\Leftrightarrow$ ($\det(M) \neq 0$) $\Leftrightarrow$ (M inversible).
b. De plus : ${}^tM^2 = I_n - M$, entraîne : $I_n - M = (M^2 - I_n)^2 = (I_n - M).(I_n + M).(I_n - M^2)$, et donc :

$(I_n - M).[(I_n + M).(I_n - M^2) - I_n] = 0 = (I_n - M).(-M^3 - M^2 + M)$.

On a donc le polynôme : $P = (X-1).X.(X^2 + X - 1)$, qui est annulateur pour M, scindé à racines simples et donc M est diagonalisable.

90. Puisque $X^n - 1$ est annulateur pour A, A est diagonalisable et ses valeurs propres sont parmi les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Si on note $\lambda_1,...,\lambda_n$ ces valeurs propres, A est semblable à : $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Considérons alors une combinaison linéaire : $a_0.I_n + a_1.A + ... + a_{n-1}.A^{n-1} = 0$.

Elle est équivalente à :

- $a_0.I_n + a_1.D + ... + a_{n-1}.D^{n-1} = 0$, puis au système :
- $\forall\ 1 \le k \le n$, $a_0 + a_1.\lambda_k + ... + a_{n-1}.\lambda_k^{n-1} = 0$, et enfin à :
- $M.X = 0$, avec : $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, et : $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Si deux des valeurs propres sont égales, alors : $\det(M) = 0$, M n'est pas inversible et donc :

$\exists\ X \neq 0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, tel que : $M.X = 0$, donc :

$\exists\ (a_0,...,a_{n-1}) \neq (0,...,0)$, tel que : $a_0.I_n + a_1.A + ... + a_{n-1}.A^{n-1} = 0$,

autrement dit la famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est liée.

Par contraposée toutes les valeurs propres sont distinctes.

On en déduit que les valeurs propres de A sont les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Donc : $tr(A) = \sum_{\omega^n = 1} \omega = 0$.

91. $P(0)$ étant nul et $P'(0)$ non nul, on peut écrire : $P = a_1.X + ... + a_n.X^n$, avec : $a_1 \neq 0$.

Donc : $a_1.u + ... + a_n.u^n = 0$, et en divisant par a_1 on peut écrire : $u = \alpha_2.u^2 + ... + \alpha_n.u^n$.

Alors :

- $\forall\ x \in \ker(u)$, $u(x) = 0$, et donc : $u^2(x) = 0$, d'où : $x \in \ker(u^2)$,
- $\forall\ x \in \ker(u^2)$, $u^2(x) = 0$, donc : $\forall\ k \ge 2$, $u^k(x) = 0$, et à l'aide de l'égalité précédente : $u(x) = 0$.

Donc : $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Soit : $x \in E$.

Alors : $u(x) = \alpha_2.u^2(x) + ... + \alpha_n.u^n(x) = u^2(\alpha_2.x + ... + \alpha_n.u^{n-2}(x))$, et :

$x - u(\alpha_2.x + ... + \alpha_n.u^{n-2}(x)) \in \ker(u)$.

Si donc on pose : $x_k = x - u(\alpha_2.x + ... + \alpha_n.u^{n-2}(x))$, et : $x_i = u(\alpha_2.x + ... + \alpha_n.u^{n-2}(x))$, alors :

- $x_k \in \ker(u)$,
- $x_i \in \mathrm{Im}(u)$,
- $x_k + x_i = x$.

On a donc : $\mathrm{Im}(u) + \ker(u) = E$.

Montrons maintenant que la somme est directe, et pour cela, soit : $y \in \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$.

Alors : $\exists\ x \in E$, $y = u(x)$, et : $u(y) = 0 = u^2(x)$, donc : $x \in \ker(u^2)$, d'où : $x \in \ker(u)$, et : $y = u(x) = 0$.

On a donc bien : $E = \mathrm{Im}(u) \oplus \ker(u) = E$.

92. a. On commence par calculer B^k, pour : $k \in \mathbb{N}$, par récurrence sur $\mathbb{N}$, en prouvant que :

$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = \begin{pmatrix} A^k & k.A^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

Vu les propriétés sur les polynômes de matrices, on en déduit que si : $P = \sum_{k=0}^{N} a_k.X^k \in \mathbb{R}[X]$, alors :

$$P(B) = \sum_{k=0}^{N} a_k.B^k = \sum_{k=0}^{N} a_k.\begin{pmatrix} A^k & k.A^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{N} a_k.A^k & \sum_{k=1}^{N} a_k.k.A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^{N} a_k.A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

b. Si B est diagonalisable, il existe un polynôme annulateur P scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ pour B.

On a alors : $0 = P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A.P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$, donc : $P(A) = A.P'(A) = 0$.

Donc A est diagonalisable.

De plus, soit λ une valeur propre de A.

Puisque $X.P'$ est également annulateur pour A, λ est racine de P et de $X.P'$, et : $\lambda.P'(\lambda) = 0$.

Mais P et P' n'ayant aucune racine en commun, donc : $P'(\lambda) \neq 0$, et : $\lambda = 0$.

Autrement dit A est diagonalisable et sa seule valeur propre est 0 : A est nulle.

Réciproquement, il est immédiat que si A est nulle, B est diagonalisable.

93. a. Puisque u est inversible, 0 n'est pas valeur propre de u ni de u^2, u^2 étant aussi inversible.

• Si u est diagonalisable, alors dans une base de E formée de vecteurs propres de u, la matrice représentative de u est une matrice diagonale D.

Il est alors évident que la matrice de u^2 est D^2 donc u^2 est bien diagonalisable.

• Supposons maintenant u^2 diagonalisable, et considérons le polynôme : $A = \prod_{\lambda \in Sp(u^2)} (X - \lambda)$, qui est scindé à racines simples.

Dans une base de vecteurs propres la matrice Δ de u^2 est diagonale, et ses éléments diagonaux $d_1,...,d_n$ sont les valeurs propres de u^2.

Puis $A(\Delta)$ est diagonale et ses éléments diagonaux sont $A(d_1),...,A(d_n)$ et sont tous nuls.

Donc : $A(\Delta) = 0$, puis : $A(u^2) = 0$, et A est annulateur pour u^2.

On pose alors : $B = \prod_{\mu^2 \in Sp(u^2)} ((X - \mu).(X + \mu))$,

et B est scindé à racines simples car les valeurs propres de u^2 sont non nulles.

Puis : $B(u) = \prod_{\mu^2 \in Sp(u^2)} ((u - \mu.id_E).(u + \mu.id_E)) = \prod_{\lambda \in Sp(u^2)} (u^2 - \lambda.id_E) = A(u^2) = 0$,

et B est annulateur pour u, scindé à racines simples, donc u est diagonalisable.

b. On a toujours l'implication : (u diagonalisable) $\Rightarrow$ ($P(u)$ diagonalisable),

puisque si la matrice de u est diagonale dans une base de E, celle de $P(u)$ dans cette même base l'est aussi.

Réciproquement, si $P(u)$ est diagonalisable, notons : $A = \prod_{\lambda \in Sp(P(u))} (X - \lambda)$.

Alors A est comme précédemment annulateur pour $P(u)$ (démonstration identique à la précédente à l'aide cette fois d'une matrice diagonale Δ représentative de $P(u)$).

Puis le polynôme : $B = (P - \lambda_1)...(P - \lambda_p)$, est annulateur pour u (comme précédemment) et en l'état, le polynôme B peut avoir des racines multiples.

Mais deux facteurs $P - \lambda_i$ et $P - \lambda_j$ avec : $i \neq j$, n'ont pas de racine commune.

En effet si c'était le cas, il existerait α tel que : $P(\alpha) - \lambda_i = 0 = P(\alpha) - \lambda_j$, soit : $\lambda_i = \lambda_j$.

Supposons maintenant qu'un des facteurs $P - \lambda_i$ ait une racine au moins double α, et donc qu'on ait :

$B=(X-\alpha)^m.C$, avec : $m\geq 2$, et : $C\in \mathbb{C}$[X].

Alors : $P(\alpha)-\lambda_i=0=(P-\lambda_i)'(\alpha)=P'(\alpha)$.

Or α ne peut être valeur propre de u car alors : $0=P'(\alpha)$, serait valeur propre de $P'(u)$, ce qui ne peut se produire puisque $P'(u)$ est inversible.

Donc l'endomorphisme $u-\alpha.id_E$ est inversible et en composant par $(u-\alpha.id_E)^{-1}$, on peut écrire :

$0=B(u)=(u-\alpha.id_E)^m oC(u)$, donc : $0=((u-\alpha.id_E)^{-1})^m o(u-\alpha.id_E)^m oC(u)$, et : $C(u)=0$.

Comme on peut reproduire cette simplification pour toutes les éventuelles racines multiples de B, on obtient à la fin une égalité : $R(u)=0$, où R est un polynôme sans racines multiples.

Ayant mis en évidence un polynôme R annulateur pour u, scindé à racines simples, u est bien diagonalisable.

94. a. Puisque H ne contient pas de matrice inversible, on a : $I_n\notin H$, et : $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})=H\oplus Vect(I_n)$.

Soit maintenant A une matrice nilpotente.

Alors : $\exists\ \alpha\in \mathbf{K}$, $\exists$ M $\in$ H, $A=\alpha.I_n+M$.

La matrice M n'étant pas inversible, il existe : $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, $X\neq 0$, $M.X=0$, soit : $A.X=\alpha.X$.

Autrement dit X est vecteur propre de A associé à la valeur propre α.

Mais A étant nilpotente, elle a pour seule valeur propre possible 0 donc : $\alpha=0$, et : $A=M\in H$.

b. Si H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, supposons qu'il ne contienne pas de matrice inversible.

Alors il contient les matrices $E_{i,i+1}$, pour : $1\leq i\leq n-1$, et la matrice $E_{n,1}$.

En effet, elles sont toutes nilpotentes (d'ordre 2 car leur carré est nul).

H étant stable par combinaison linéaire, H contient alors leur somme qui vaut :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$, et qui est inversible.

Donc H doit contenir au moins une matrice inversible, et : $H\cap Gl_n(\mathbf{K})\neq\emptyset$.

Sous-espaces vectoriels stables.

95. a. Supposons donc que F est un sous-espace vectoriel de E stable par F, et que f est diagonalisable.

Notons $\mathcal{B}$ une base de E formée de vecteurs propres de f.

L'endomorphisme f_F induit par f dans F est aussi diagonalisable (et ses vecteurs propres sont des vecteurs propres de F).

Considérons alors une base $\mathcal{B}_F$ de F formée de vecteurs propres de f_F (donc de f).

On peut alors compléter $\mathcal{B}_F$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $\mathcal{B}$, en : $\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}'$.

Si maintenant on pose : $G=Vect(\mathcal{B}')$, alors G est clairement stable par f (car ayant une base formée de vecteurs propres de f) et : $F\oplus G=E$.

b. Notons $E_1(f),\ldots,E_p(f)$ les sous-espaces propres de f et : $F=E_1(f)\oplus\ldots\oplus E_p(f)$.

Alors F est un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Donc F admet un supplémentaire G stable par f.

Mais si : $\dim(G)\geq 1$, alors l'endomorphisme f_G induit par f dans G admet au moins une valeur propre et un vecteur propre (puisque tout polynôme complexe de degré au moins 1 admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$).

Ce vecteur propre de f_G étant aussi un vecteur propre de f, il devrait appartenir à l'un des sous-espaces propres précédents donc à $F\cap G$, ce qui n'est pas possible puisqu'il est non nul.

Donc : $\dim(G)=0$, et : $E=F=E_1(f)\oplus\ldots\oplus E_p(f)$.

E étant la somme des sous-espaces propres de f, f est diagonalisable.

96. a. Il est immédiat que C_u est inclus dans $\mathscr{L}$(E), non vide car contenant 0 et stable par combinaison linéaire, du fait de la linéarité de u.

b. L'implication [$\Rightarrow$] est un théorème.

Pour l'implication [$\Leftarrow$], supposons que tout sous-espace propre de u est stable par g.

Alors : $\forall\ \lambda \in Sp(u)$, $\forall\ x \in E_\lambda(u)$,

- $u(g(x)) = \lambda.g(x)$, car : $g(x) \in E_\lambda(u)$, et :
- $g(u(x)) = g(\lambda.x) = \lambda.g(x)$.

Donc pour ces vecteurs, on a bien : $uog(x) = gou(x)$.

Mais comme on peut former une base de E à l'aide de vecteurs propres de u, on en déduit que l'égalité précédente est vraie pour tout vecteur d'une base de E, donc que : $uog = gou$.

c. Puisque u est diagonalisable, on sait que :

$\forall\ \lambda \in Sp(u)$, $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda$.

Notons $\lambda_1,...,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $\mathscr{B}_k$ une base de $E_{\lambda_k}(u)$ pour tout : $1 \le k \le p$.

Considérons alors l'application φ définie de C_u dans $\mathscr{L}(E_{\lambda_1}(u)) \times \ldots \times \mathscr{L}(E_{\lambda_p}(u))$, qui à g dans C_u fait correspondre le p-uplet de ses restrictions dans les sous-espaces propres de u (qui sont tous stables par g, d'après la question b.).

φ est clairement linéaire.

De plus elle est bijective, car si on se donne $g_1,...,g_p$ des endomorphismes de $E_{\lambda_1}(u)$, …, $E_{\lambda_p}(u)$, il existe un unique g qui admet ces endomorphismes comme restrictions.

En effet, si g existe, alors pour tout : $1 \le k \le p$, et tout vecteur e de $\mathscr{B}_k$, on doit avoir : $g(e) = g_k(e)$, et l'unique endomorphisme g ainsi défini (puisque défini pour tous les vecteurs d'une base de E) a bien pour restrictions dans les différents sous-espaces $E_{\lambda_k}(u)$ les endomorphismes g_k.

De plus, g commute alors avec u puisqu'il stabilise tous les sous-espaces propres de u.

Donc φ est un isomorphisme, et on en déduit que :

$$\dim(C_u) = \dim(\mathscr{L}(E_{\lambda_1}(u)) + ... + \dim(\mathscr{L}(E_{\lambda_p}(u)) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda^2 .$$

d. Dans ce cas, la relation précédente montre que : $\dim(C_u) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$.

De plus, les n endomorphismes proposés commutent avec u donc sont dans C_u.

Enfin, si : $\alpha_0.id_E + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1} = 0$, cela fournit un polynôme annulateur pour u qui est :

$P = \alpha_0 + \alpha_1.X + ... + \alpha_{n-1}.X^{n-1}$.

Or ce polynôme doit admettre comme racines les n valeurs propres distinctes de u : cela n'est possible que si P est nul car : $\deg(P) \le n-1$.

Donc : $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$, la famille est libre et c'est donc bien une base de C_u.

97. a. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p stable par u.

La matrice de u dans une base : $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}'$, de E adaptée à F est de la forme :

$mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = M$, où A est en fait la matrice dans $\mathscr{B}_F$ de $\hat{u}$, endomorphisme induit par u dans F.

Alors : $\chi_u(x) = \det(x.I_n - M) = \det(x.I_p - A).\det(x.I_{n-p} - C) = \chi_{\hat{u}}(x).\chi_C(x)$,

et donc $\chi_{\hat{u}}$ divise bien χ_u.

b. Il y a des entiers k tels que la famille ($x_0, u(x_0),...,u^{k-1}(x_0)$) soit libre.

En effet, pour : $k = 1$, la famille (x_0) est libre, étant donné que x_0 est non nul.

De plus, les familles de type précédent ne peuvent comporter plus de n vecteurs, car : $\dim(E) = n$.

Il existe donc un plus grand entier p tel que ($x_0, u(x_0),...,u^{p-1}(x_0)$) soit libre.

Puis ($x_0, u(x_0),..., u^p(x_0)$) est liée (par définition de p) et donc :

$\exists$ $(a_0,..., a_p) \in$ **K**$^{p+1}$, non tous nuls, tel que : $a_0.x_0 + a_1.u(x_0) + ... + a_p.u^p(x_0) = 0$.

Or si a_p était nul, tous les autres le serait aussi de fait de la liberté de la famille ($x_0, u(x_0),..., u^{p-1}(x_0)$).

Donc a_p est non nul et $u^p(x_0)$ s'écrit comme combinaison linéaire de $x_0, u(x_0),..., u^{p-1}(x_0)$, donc appartient à F_{x_0} .

c. Tous les vecteurs parmi $x_0, u(x_0),..., u^{p-1}(x_0)$ ont évidemment une image par u dans F_{x_0} .

Il est alors clair par combinaisons linéaires que tout vecteur de F_{x_0} a son image par u dans F_{x_0} , et F_{x_0} est stable par u .

d. La matrice de $\hat{u}$ dans la base précédente de F_{x_0} est : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_{p-1} \end{pmatrix}$,

où la dernière colonne correspond aux coordonnées de $u^p(x_0)$ dans la base ($x_0, u(x_0),..., u^{p-1}(x_0)$).

Le polynôme caractéristique de $\hat{u}$ est alors : $\chi_{\hat{u}}(x) = x^p - \alpha_{p-1}x^{p-1} - ... - \alpha_0$,

comme on le montre en développant par exemple le déterminant correspondant par rapport à la dernière colonne.

e. On constate alors que : $\chi_{\hat{u}}(u)(x_0) = u^p(x_0) - \alpha_{p-1}.u^{p-1}(x_0) - ... - \alpha_0.x_0 = 0$.

Enfin, $\chi_{\hat{u}}$ divise χ_u et il existe : $Q \in$ **K**[X], $\chi_u = Q.\chi_{\hat{u}}$, donc : $\chi_u(u) = Q(u)o\chi_{\hat{u}}(u)$.

En particulier : $\chi_u(u)(x_0) = Q(u)o\chi_{\hat{u}}(u)(x_0) = Q(u)(\chi_{\hat{u}}(u)(x_0)) = Q(u)(0) = 0$.

f. On a montré que : $\forall$ $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, $\chi_u(u)(x_0) = 0$.

Comme il est évident de plus que : $\chi_u(u)(0) = 0$, on a montré que : $\forall$ $x \in E$, $\chi_u(u)(x) = 0$.

Donc : $\chi_u(u) = 0$.

98. a. Le théorème de Cayley-Hamilton fournit un polynôme normalisé annulateur pour u : χ_u .

b. Puisque le degré de tels polynôme est minoré par 1, il existe un degré minimum qu'on note p et au moins un polynôme normalisé P annulateur pour u de degré p .

Supposons alors qu'il existe un autre polynôme Q normalisé annulateur pour u et de degré p .

Alors $P - Q$ est toujours annulateur pour u mais de degré strictement inférieur à p puisque P et Q sont normalisés et que leurs termes de degré p s'annulent.

Mais si de plus $P - Q$ est non nul, on obtient alors en divisant $P - Q$ par son coefficient dominant un polynôme normalisé annulateur pour u de degré strictement inférieur à p ce qui est impossible.

Donc : $P - Q = 0$, et il y a unicité de ce polynôme P et on le note μ_u .

c. Puisque μ_u est annulateur pour u , toute valeur propre de u est racine de μ_u .

d. Soit α une racine du polynôme minimal μ_u .

Si on suppose que α n'est pas valeur propre de u , alors $u - \alpha.id_E$ est inversible.

Ecrivons alors : $\mu_u = (X - \alpha).R$, où : $\deg(R) = p - 1$, et où R est normalisé.

On sait que : $0 = \mu_u(u) = (u - \alpha.id_E)oR(u)$, et donc :

$(u - \alpha.id_E)^{-1}o(u - \alpha.id_E)oR(u) = (u - \alpha.id_E)^{-1}o\mu_u(u) = 0$, d'où : $R(u) = 0$.

Or R serait alors un polynôme annulateur pour u normalisé et de degré strictement inférieur à p , ce qui est impossible.

Donc α est valeur propre de u .

e. En conclusion, μ_u et χ_u ont exactement les mêmes racines.