Réduction d'endomorphismes (corrigé niveau 1).

Valeurs propres, vecteurs propres, spectre.

1. Le polynôme caractéristique s’obtient facilement à partir de : $\chi_f(x) = -\det(A - x.I_3)$, que l’on développe par exemple par rapport à sa deuxième colonne, ce qui donne : $\chi_f(x) = x.(1-x)^2$.
   f admet donc 0 comme valeur propre simple et 1 comme valeur propre double.
   Le calcul des espaces propres se fait en résolvant : $A.X = \lambda.X$, avec les deux valeurs propres trouvées, et où X est une matrice colonne : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On trouve : $E_0(f) = Vect((1,1,-2))$, et : $E_1(f) = Vect((1,1,-1),(0,1,0))$.

2. Soit u l’endomorphisme de $\mathbb{R}$[X] défini par : $\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ u(P) = X.P - (1-X)^2.P'$.
   a. Montrer qu’un éventuel vecteur propre est de degré 1.
   b. Montrer que : $\forall\ P \in \mathbb{R}_1[X],\ u(P) \in \mathbb{R}_1[X]$, et en notant u_1 l’endomorphisme de $\mathbb{R}_1$[X] induit par u, donner la matrice de u_1 dans la base canonique de $\mathbb{R}_1$[X].
   c. En déduire les valeurs et les vecteurs propres de u_1 puis ceux de u.

3. a. Les deux applications u et v sont bien des applications de E dans E.
   En effet, l’image de tout polynôme de $\mathbb{R}_n$[X] est un polynôme réel, et :
   $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \deg(P') \le n-1$, d’où : $\deg(u(P)) \le n$, soit : $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
   On a évidemment le même résultat pour v.
   Enfin, la linéarité de la dérivation des polynômes entraîne la linéarité de u et de v.
   b. Pour obtenir la matrice de u ou de v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n$[X], on calcule :
   $u(1) = 1$, et : $\forall\ 1 \le k \le n$, $u(X^k) = (1-k).X^k + k.X^{k-1}$.
   $v(1) = 0$, $v(X) = -2.X$, et : $\forall\ 2 \le k \le n$, $v(X^k) = k.(k+1).X^k - k.(k-1).X^{k-2}$.
   D’où : $mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(n-1) \end{pmatrix}$, et : $mat_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 6 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & -n.(n-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n.(n+1) \end{pmatrix}$.
   On en déduit χ_u et χ_v et comme les déterminants correspondants sont triangulaires, on obtient :
   $\chi_u(x) = (-1)^{n+1}.\prod_{k=0}^{n}((1-k)-x)$, et : $\chi_v(x) = (-1)^{n+1}.\prod_{k=0}^{n}(k.(k+1)-x)$.
   Les valeurs propres de u et de v sont évidemment les éléments diagonaux de leur matrice représentative, donc elles valent :
   - $1, 0, -1, \ldots, -(n-1)$ et sont toutes simples pour u,
   - $k.(k+1)$, pour : $0 \le k \le n$, et sont toutes simples pour v.

   Les $n+1$ valeurs proposées pour v sont bien distinctes puisque la fonction : $x \mapsto x.(x+1)$, est strictement croissante donc injective de $[0,+\infty)$ dans $[0,+\infty)$.
   c. Les valeurs propres de u étant toutes simples, les espaces propres de u sont tous de dimension 1.
   De même pour v.
   d. Ces endomorphismes admettant chacun $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace de dimension $n+1$, ils sont tous deux diagonalisables.

4. a. Si u est injectif, alors pour tout entier k, u^k est aussi injectif.
   Par contraposée, si 0 est valeur propre de u^k pour une valeur k donnée, alors u^k n’est pas injectif et

u ne l'est pas non plus, autrement dit 0 est valeur propre de u.

b. 0 n'est pas valeur propre de u est équivalent à dire que u est injectif ou que u est bijectif puisque E est de dimension finie et c'est encore équivalent (pour la même raison) au fait que u est surjectif.

5. a. Si on calcule les produits proposés, on obtient :

$$M.T_1 = \begin{pmatrix} x.I_n & A \\ B & I_p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -I_n & 0_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A.B - x.I_n & A \\ 0 & I_p \end{pmatrix}, \text{ et : } T_2.M = \begin{pmatrix} -x.I_n & -A \\ 0 & B.A - I_p \end{pmatrix}.$$

Donc en calculant les déterminants de ces matrices, on en déduit (certaines sont triangulaires) :

$\det(M).\det(T_1) = \det(M).(-1)^n = \det(A.B - x.I_n) = \chi_{A.B}(x).(-1)^n$, et :

$\det(T_2).\det(M) = \det(M).(-1)^n.(-x)^p = \det(B.A - x.I_p).(-x)^n = \chi_{B.A}(x).(-x)^n.(-1)^p$.

D'où : $\chi_{B.A}(x).x^n = \det(M).(-x)^p.(-1)^p = \chi_{A.B}(x).x^p$.

b. Si A et B sont des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, alors : $n = p$, et l'anneau des polynômes étant intègre, on en déduit que : $\chi_{B.A}(x).x^n - \chi_{A.B}(x).x^n = 0 = x^n.(\chi_{B.A}(x) - \chi_{A.B}(x))$, soit : $\chi_{A.B} = \chi_{B.A}$.

6. a. Il suffit d'écrire :

$\forall\ x \neq 0$, $\chi_{u^{-1}}(x) = \det(x.id_E - u^{-1}) = \det(u^{-1}).\det(x.u - id_E) = \det(u^{-1}).\det((-x).(\frac{1}{x}.id_E - u)$, et donc :

$$\chi_{u^{-1}}(x) = (-x)^n.\det(u^{-1}).\chi_u\left(\frac{1}{x}\right).$$

b. Puisque u et u^{-1} sont des automorphismes de E, ils sont injectifs et 0 n'est valeur propre ni de l'un ni de l'autre.

Donc : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $(\chi_{u^{-1}}(x) = 0) \Leftrightarrow (\chi_u\left(\frac{1}{x}\right) = 0)$.

Les valeurs propres de u^{-1} sont les inverses des valeurs propres de u (avec la même multiplicité).

Diagonalisation, trigonalisation.

7. On notera u l'endomorphisme canoniquement associé à A (dans : E = $\mathbb{R}^3$ donc).

Alors : $\chi_A(x) = \chi_u(x) = (-1)^3.\begin{vmatrix} 11-x & -5 & 5 \\ -5 & 3-x & -3 \\ 5 & -3 & 3-x \end{vmatrix} = (-1)^3.\begin{vmatrix} 11-x & -5 & 0 \\ -5 & 3-x & -x \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix} = x.(x-1).(x-16)$,

en ajoutant la deuxième colonne à la troisième et en développant.

La matrice A (et donc u) est diagonalisable puisqu'elle admet trois valeurs propres distinctes (simples) et est de taille 3×3, et par ailleurs ses espaces propres sont de dimension 1.

En résolvant les systèmes : $A.X = \lambda.X$, pour : λ = 0, 1 et 16, on trouve les sous-espaces propres de A et de u qui sont :

$E_0(u) = \ker(u - 0.id_E) = \ker(u) = Vect((0,1,1))$,

$E_1(u) = \ker(u - 1.id_E) = Vect((1,1,-1))$,

$E_{16}(u) = \ker(u - 16.id_E) = Vect((2,-1,1))$.

On peut alors poser P, matrice de passage dans $\mathbb{R}^3$ de la base canonique à la base de vecteurs propres qu'on vient de trouver, soit : $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$.

8. a. On calcule pour commencer le polynôme caractéristique de A en développant le déterminant :

$\chi_A(x) = (-1)^3 \det(A - x.I_3) = x.(x^2 - 2)$.

A admet donc trois valeurs propres simples et est donc diagonalisable.

La question b. pousse à calculer les espaces propres de A, et en résolvant les systèmes : $A.X = X$, on trouve : $E_0(A)=\ker(A)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_{\sqrt{2}}(A)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$, $E_{-\sqrt{2}}(A)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right)$.

On peut ainsi poser : $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, puis : $D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$, et : $A=P.D.P^{-1}$

b. On a immédiatement : $A^2=I_3+K$, et donc : $K=A^2-I_3=P.D^2.P^{-1}-I_3=P.(D^2-I_3).P^{-1}$,

autrement dit K est diagonalisable au moyen de P, et : $\Delta=P^{-1}K.P=D^2-I_3=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

c. Puisque : $\forall\ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $M(a,b,c)=a.I_3+b.A+c.K$, on a : $M(a,b,c)=P.(a.I_3+b.D+c.\Delta).P^{-1}$,

et $M(a,b,c)$ est bien diagonalisable puisque $a.I_3+b.D+c.\Delta$ est diagonale.

Ses valeurs propres sont : $a-c,\ a+b.\sqrt{2}+c,\ a-b.\sqrt{2}+c$, et son déterminant vaut :

$\det(M(a,b,c)=(a-c).(a+b.\sqrt{2}+c).(a-b.\sqrt{2}+c)=a^3-c^3-a.c^2+c.a^2-2.a.b^2+2.c.b^2$

9. On calcule le polynôme caractéristique de A_m et :

$$\chi_{A_n}(x)=(-1)^3.\begin{vmatrix}1-x & 0 & -1\\ 2 & -1-x & 1\\ m-2 & 2-m & m-x\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1-x & 0 & -1\\ 1-x & -1-x & 1\\ 0 & 2-m & m-x\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1-x & 0 & -1\\ 0 & -1-x & 2\\ 0 & 2-m & m-x\end{vmatrix},$$

en ajoutant à la première colonne la deuxième puis en enlevant à la deuxième ligne la première.

On obtient : $\chi_{A_n}(x)=(x-1).\begin{vmatrix}-1-x & 2\\ 2-m & m-x\end{vmatrix}=(x-1).(x^2-(m-1).x+(m-4))$.

Le terme du second degré a pour discriminant : $\Delta=(m-1)^2-4.(m-4)=m^2-6.m+17=(m-3)^2+8$.
Donc ce polynôme du second degré admet deux racines réelles distinctes.
Enfin : $1^2-(m-1).1+(m-4)=-2\neq 0$, et ces deux racines sont distinctes de 1.
Donc A_m admet toujours trois valeurs propres réelles simples et A_m est toujours diagonalisable.

10. a. Pour : $x\neq 0$, on a : $\chi_A(x)=(-1)^n.\begin{vmatrix}\alpha-x & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 1 & -x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha-x+\dfrac{n-1}{x} & 1 & \cdots & \cdots & 1\\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -x\end{vmatrix}$,

en remplaçant C_1 par $C_1+\dfrac{C_2}{x}+\ldots+\dfrac{C_n}{x}$.

Et donc (le déterminant est triangulaire) : $\forall\ x\neq 0$, $\chi_A(x)=(-1)^n.\left(\alpha-x+\dfrac{n-1}{x}\right).(-x)^{n-1}$,

soit encore : $\forall\ x\neq 0$, $\chi_A(x)=x^{n-2}.(x^2-\alpha.x-(n-1))$.

Mais puisque c'est la valeur de χ_A sur $\mathbb{R}^*$, c'est aussi sa valeur en 0 (c'est un polynôme).

0 est donc valeur propre de A de multiplicité $n-2$ (car non racine de $(x^2-\alpha.x-(n-1))$), et ce dernier polynôme a pour discriminant : $\Delta=\alpha^2+4.(n-1)>0$, donc il admet deux racines réelles distinctes non nulles.

Finalement, A admet exactement trois valeurs propres réelles distinctes.

b. Pour les valeurs propres simples (les racines de $(x^2-\alpha.x-(n-1))$) la dimension de chaque espace

propre est 1.
Puis A est de rang 2 car les colonnes $C_2,...,C_n$ de A sont égales (donc : $rg(A) \leq 2$) et les colonnes C_1, C_2 forment une famille libre car elles sont non colinéaires (donc : $rg(A) \geq 2$).
Donc : $\dim(\ker(A)) = \dim(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(A)) = n-2$,
et la dimension de l'espace propre associé à 0 (autrement dit : $E_0(A) = \ker(A)$) est donc égale à la multiplicité de 0 comme valeur propre de A.
Finalement A est diagonalisable (les 5/2 ont peut-être remarqué que A est symétrique réelle).

11. a. Par linéarité de la dérivation des polynômes, u est linéaire et associé bien à tout polynôme réel un polynôme réel.
De plus, tout monôme X^k, pour : $0 \leq k \leq n-1$, a pour image un polynôme de degré au plus n.
Enfin, X^n a pour image : $X.(X-1).n.X^{n-1} - n.X.X^n = -n.X^n \in$ E.
Par linéarité, tout élément de E a donc une image dans E, et finalement on a bien : $u \in \mathcal{L}$(E).
b. On a immédiatement : $(u(P) = \lambda.P) \Leftrightarrow (X.(X-1).P' - n.X.P = \lambda.P) \Leftrightarrow (X.(X-1).P' - (n.X+\lambda).P = 0)$.
On termine en disant qu'un polynôme est nul si et seulement si sa fonction polynôme associée s'annule sur $\mathbb{R}$.
c. Il est évident que si une fonction polynôme y est solution de (E_λ) sur $\mathbb{R}$, elle l'est encore sur $]1,+\infty)$.
Réciproquement, si y est solution de (E_λ) sur $]1,+\infty)$, alors : $x \mapsto x.(x-1).y'(x) - (n.x+\lambda).y(x)$, est une fonction polynôme admettant une infinité de racines (toute valeur de $]1,+\infty)$) donc est nulle sur $\mathbb{R}$.
d. On connaît les solutions de (E_λ) sur $]1,+\infty)$ puisque c'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre et le coefficient de y' ne s'annule pas sur $]1,+\infty)$.
Ce sont les fonctions : $\forall\ x \in\ ]1,+\infty)$, $y(x) = C.\exp\left(\int \frac{n.x+\lambda}{x.(x-1)}.dx\right)$, avec : $C \in \mathbb{R}$.
On décompose ensuite : $\frac{n.x+\lambda}{x.(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$, puis on détermine : $a = -\lambda$, $b = n+\lambda$, et :
$\forall\ x \in\ ]1,+\infty)$, $y(x) = C.\exp\left(\int\left(-\frac{\lambda}{x} + \frac{n+\lambda}{x-1}\right).dx\right) = C.\exp(-\lambda.\ln(x) + (n+\lambda).\ln(x-1)) = C.x^{-\lambda}.(x-1)^{n+\lambda}$.
e. Ces fonctions sont non nulles, polynomiales de degré inférieur ou égal à n si et seulement si :
- $-\lambda \in \mathbb{N}$,
- $n+\lambda \in \mathbb{N}$,

soit λ est un entier négatif compris entre $-n$ et 0.
f. Chaque valeur de λ qu'on vient de proposer fournit une solution polynomiale de (E_λ) sur $]1,+\infty)$ donc avec les questions b et c, on obtient ainsi un vecteur propre de u associé à cette valeur de λ.
Plus précisément : $\forall\ \lambda \in \{-n,...,-1,0\}$, $E_\lambda(u) = Vect(X^p.(X-1)^{n-p})$, où on a posé : $\lambda = -p$.
En particulier : $Sp(u) = \{-n,...,-1,0\}$, et u admettant $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace de dimension $n+1$, il est diagonalisable.

12. Si on calcule le polynôme caractéristique de A, on obtient : $\chi_A(x) = (-1)^2 \det(A - x.I_2) = x^2 - a.b$.
Il est nécessaire que χ_A soit scindé sur $\mathbb{R}$ pour que A soit diagonalisable, donc il faut que : $a.b \leq 0$.
Réciproquement, si : $a.b \leq 0$, distinguons deux cas :
- $a.b < 0$: dans ce cas χ_A admet deux racines réelles simples et A est diagonalisable,
- $a.b = 0$: alors A admet 0 comme valeur propre double.

Dans ce dernier cas, si A est diagonalisable, alors est semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle, et : $a = b = 0$.
Et si : $a = b = 0$, alors A est nulle donc diagonalisable (puisque déjà diagonale).
Conclusion : A soit diagonalisable si et seulement si : $a.b < 0$, ou : $a = b = 0$

13. On peut remarquer dès le départ que : $\forall\ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\phi o \phi(M) = M$, donc $\phi^2 = id$, et ϕ est une symétrie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc est diagonalisable (et admet pour seules valeurs propres possibles 1 et -1).
On peut aussi chercher à la fois : $\lambda \in \mathbb{R}$, et : $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, telles que : $\phi(M) = \lambda.M$.

Ce problème est équivalent au système : $\begin{cases} d = \lambda.a \\ -b = \lambda.b \\ -c = \lambda.c \\ a = \lambda.d \end{cases}$.

• Si : $\lambda = -1$, ce système est équivalent à : $d = -a$, autrement dit -1 est valeur propre de ϕ et son espace propre associé est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, autrement dit :

$E_{-1}(\phi) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, ou encore l'ensemble des matrices 2×2 de trace nulle.

• Si : $\lambda \neq -1$, ce système est équivalent à : $\begin{cases} d = \lambda.a \\ a = \lambda^2.a \\ b = c = 0 \end{cases}$.

Or si on veut des solutions non nulles, on ne peut avoir : $a = 0$, et donc on doit avoir : $\lambda = 1$.

Le système devient alors : $\begin{cases} a = d \\ b = c = 0 \end{cases}$, et 1 est valeur propre de ϕ et son espace propre associé est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, autrement dit : $E_1(\phi) = Vect(I_2)$.

Comme la somme des dimensions des espaces propres est égale à 4, soit la dimension de l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que ϕ est diagonalisable.

Remarque : ϕ est la symétrie par rapport à $Vect(I_2)$ dans la direction des matrices de trace nulle.

14. a. On sait que B (comme v) admettant n valeurs propres distinctes et étant de taille $n\times n$ est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
Soit X une matrice colonne non nulle, et : $\lambda \in \mathbb{C}$, tels que : $B.X = \lambda.X$.
Alors : $A.B.X = \lambda.A.X = B.A.X$, autrement dit $A.X$ est dans le sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ.
Or ce sous-espace propre est de dimension 1 et X étant non nul sur cette droite en constitue une base.
Donc : $\exists\ \mu \in \mathbb{C},\ A.X = \mu.X$, ce qui montre que X est vecteur propre de A.

b. Le résultat obtenu pour A et B se transpose bien sûr aux endomorphismes u et v.
Soit alors : $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$, une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de v, donc de u, et :
$\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\exists\ \lambda_i \in \mathbb{C},\ v(e_i) = \lambda_i e_i$, et : $\exists\ \mu_i \in \mathbb{C},\ u(e_i) = \mu_i e_i$.
Si on note alors P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à cette base $\mathcal{B}$, on a :

$$mat_{\mathcal{B}}(u) = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = D_\mu, \text{ et : } mat_{\mathcal{B}}(v) = P^{-1}.B.P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D_\lambda.$$

A et B sont bien diagonalisables par l'intermédiaire de la même matrice P.

c. Le problème posé dans cette question revient à savoir si on peut trouver un n-uplet de complexes qui vérifie : $A = \alpha_0.I_n + \alpha_1.B + ... + \alpha_{n-1}.B^{n-1}$.
Si on multiplie des deux côtés de l'égalité, à droite par P^{-1} et à gauche par P, ce problème est équivalent à trouver un n-uplet de complexes tel que : $D_\mu = \alpha_0.I_n + \alpha_1.D_\lambda + ... + \alpha_{n-1}.D_\lambda^{n-1}$
Or toutes les matrices étant diagonales, cela se ramène à un système de n équations (les coefficients diagonaux) à n inconnues (les α_i), qui s'écrit : $\begin{cases} \mu_1 = \alpha_0.1 + \alpha_1.\lambda_1 + ... + \alpha_{n-1}.\lambda_1^{n-1} \\ \vdots \\ \mu_n = \alpha_0.1 + \alpha_1.\lambda_n + ... + \alpha_{n-1}.\lambda_n^{n-1} \end{cases}$.
Or on reconnaît un système de Cramer puisque le déterminant est un Vandermonde non nul.

Donc il existe bien un (unique) n-uplet : $(\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, tel que : $A = \alpha_0.I_n + \alpha_1.B + ... + \alpha_{n-1}.B^{n-1}$.

15. Considérons les deux noyaux $\ker(u+id_E)$ et $\ker(u-id_E)$.
   - ils sont en somme directe puisque :
   $\forall\ x \in \ker(u+id_E) \cap \ker(u-id_E)$, $u(x) = x$, et : $u(x) = -x$, donc : $x = -x$, et donc : $x = 0$.
   - leur somme donne E.

   En effet, l'hypothèse faite entraîne : $\mathrm{Im}(u+id_E) \oplus \mathrm{Im}(u-id_E) \subset E$, donc : $rg(u+id_E) + rg(u-id_E) \leq n$.
   Donc : $\dim(\ker(u+id_E)) + \dim(\ker(u-id_E)) \geq n$, mais puisque : $\ker(u+id_E) \oplus \ker(u-id_E) \subset E$, la somme de leurs dimensions ne peut excéder n et est donc égale à n.
   Conclusion : $\ker(u+id_E) \oplus \ker(u-id_E) = E$.
   En réunissant une base de chacun de ces deux noyaux, on en déduit une base de E formée de vecteurs propres de u, et u est diagonalisable.
   Au vu de cette base, le spectre de u vaut $\{1\}$, $\{-1\}$ ou $\{1,-1\}$, mais u <u>peut n'avoir qu'une seule valeur propre</u>.
   En effet, l'un des deux noyaux peut être réduit à $\{0\}$, dans les cas par exemple où : $u = \pm id_E$, et pour lesquels l'autre noyau vaut E.

16. On commence par calculer le polynôme caractéristique de ces matrices et après développement, on trouve : $\chi_{A_1}(x) = (x-1)^3$, et : $\chi_{A_2}(x) = (x-2)^3$.
   Notons que dans ce cas, les matrices ne peuvent être diagonalisables car sinon, A_1 par exemple serait semblable à la matrice diagonale avec des 1 sur sa diagonale (donc à I_3), et :
   $\exists\ P \in Gl_3(\mathbb{R})$, $A_1 = P.I_3.P^{-1} = I_3$, ce qui n'est évidemment pas le cas.
   On calcule ensuite les espaces propres de ces matrices, et après résolution des systèmes, on obtient :
   $E_{-1}(A_1) = Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$, ce qui confirme que A_1 n'est pas diagonalisable, et : $E_2(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
   - En notant u_1 l'endomorphisme canoniquement associé à A_1, trigonaliser A_1 revient à trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u_1 est triangulaire supérieure.

   On choisit alors pour premiers vecteurs d'une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $(-1,0,1)$ et $(2,1,0)$ et si on choisit un troisième vecteur, formant avec ces deux premiers une famille : $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$, libre, alors on obtient comme matrice représentative de u_1 une matrice du type : $\begin{pmatrix}-1 & 0 & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}$.
   Puisque la trace de cette matrice doit valoir -3, on sait que le dernier coefficient diagonal vaudra -1 (c'est aussi la troisième racine de χ_{A_1}).
   On choisit ainsi : $e_1 = (-1,0,1)$, $e_2 = (2,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, qui forme bien une base de $\mathbb{R}^3$ (déterminant non nul), et : $u_1(e_3) = (-1,-1,-2) = -e_1 - e_2 - e_3$, d'où : $mat_{\mathscr{B}}(u_1) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.
   Si on pose : $P_1 = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, on a alors : $P_1^{-1}.A_1.P_1 = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.
   Remarque : on aurait pu chercher e_3 de telle sorte que la troisième colonne de cette matrice soit (0,1,1).
   - Pour u_2, associé à A_2, on commence par poser : $e_1 = (1,1,0)$ (un vecteur propre).

   On cherche ensuite e_2 de telle sorte que :

$u_2(e_2) = 1.e_1 + 2.e_2$, ce qui conduit à un système dont une solution est par exemple : $e_2 = (1,0,1)$.
On peut aussi chercher e_2 de telle sorte que : $u_2(e_2) = \alpha.e_1 + 2.e_2$, soit tel que :
$(u_2 - 2.id)(e_2) = \alpha.e_1 \in \ker(u_2 - 2.id)$, ou encore tel que : $e_2 \in \ker((u_2 - 2.id)^2)$
On pose enfin e_3 de telle sorte que la famille : $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, soit libre, par exemple : $e_3 = (0,0,1)$, et :
$u_2(e_3) = (1,0,3) = 1.e_2 + 2.e_3$ (mais ça c'est une coïncidence).

En posant : $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a alors : $P_2^{-1}.A_2.P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Utilisation de la diagonalisabilité.

17. • Pour la première matrice, son polynôme caractéristique s'obtient facilement en ajoutant les quatre c colonnes du déterminant et : $\chi_A(x) = (x-1)^2.(x-4)$.
On obtient ensuite les sous-espaces propres de A avec les systèmes habituels :

$E_4(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, et A est diagonalisable.

Puis on pose : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on a : $D = P^{-1}.A.P$.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = P.D^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} & \frac{4^n-1}{3} \\ \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n-1}{3} & \frac{4^n+2}{3} \end{pmatrix}$.

• Pour la troisième, on obtient : $\chi_A(x) = (x-1).(x-2)^3$, en ajoutant à chaque ligne la première.

Puis : $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

A est donc diagonalisable et on construit de la même façon qu'au-dessus les matrices P et D.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = P.D^n.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{2^n-1}{4} & \frac{2^n-1}{4} & \frac{2^n-1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} \\ \frac{2^n-1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{-2^n+1}{4} & \frac{3.2^n+1}{4} \end{pmatrix}$.

• Pour la deuxième, on obtient : $\chi_A(x) = (x-1).(x-3)^2$, mais : $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
On construit alors une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ pour trigonaliser u, canoniquement associé à A, en posant :
$e_1 = (1,-1,0)$, $e_2 = (1,1,0)$, et on cherche e_3 de telle sorte que : $u(e_3) = e_2 + 3.e_3$.

On trouve alors : $e_3 = (0,0,1)$.

On pose ensuite : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = P.T^n.P^{-1}$.

Enfin on obtient par récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, puis : $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n+1}{2} & \dfrac{3^n-1}{2} & n.3^{n-1} \\ \dfrac{3^n-1}{2} & \dfrac{3^n+1}{2} & n.3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Remarque : pour cette dernière matrice (mais aussi pour les deux premières) on aurait aussi pu exploiter le fait que χ_A est un polynôme annulateur pour A (théorème de Cayley-Hamilton) et utiliser une division euclidienne.

18. Puisque A admet trois valeurs propres distinctes et étant de taille 3×3, A est diagonalisable.

Soit alors : $P \in Gl_3(\mathbb{R})$, telle que : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D$.

On a alors : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = P.D^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix}.P^{-1}$.

On se demande ensuite si on peut exprimer A^n en fonction de I_3, A, A^2, autrement dit s'il existe (a_n, b_n, c_n) dans $\mathbb{R}^3$ tel que : $A^n = a_n.I_3 + b_n.A + c_n.A^2$.

En multipliant à droite et à gauche par P et P^{-1}, ceci revient à trouver un même triplet tel que : $D^n = a_n.I_3 + b_n.D + c_n.D^2$.

Mais ce dernier problème revient à se demander si le système : $\begin{cases} (-2)^n = a_n - 2.b_n + 4.c_n \\ 3^n = a_n + 3.b_n + 9.c_n \\ 5^n = a_n + 5.b_n + 25.c_n \end{cases}$, a une solution.

Or ce système est de Cramer (son déterminant est un Vandermonde), d'où l'existence d'un (unique) triplet solution.

On peut alors le déterminer en résolvant le système, ce qui donne :

$a_n = \frac{3}{7}.(-2)^n + 3^n - \frac{3}{7}.5^n$, $b_n = -\frac{8}{35}.(-2)^n + \frac{3}{10}.3^n - \frac{1}{14}.5^n$, $c_n = \frac{1}{35}.(-2)^n - \frac{1}{10}.3^n + \frac{1}{14}.5^n$,

d'où : $A^n = \left[\frac{3}{7}.(-2)^n + 3^n - \frac{3}{7}.5^n\right].I_3 + \left[-\frac{8}{35}.(-2)^n + \frac{3}{10}.3^n - \frac{1}{14}.5^n\right].A + \left[\frac{1}{35}.(-2)^n - \frac{1}{10}.3^n + \frac{1}{14}.5^n\right].A^2$.

On aurait également pu dire qu'on avait : $\chi_A(A) = 0$, d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Donc : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \exists\ (Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$, avec : $\deg(R_n) \leq 2$, tel que : $X^n = \chi_A.Q_n + R_n$, par division euclidienne, et : $\exists\ (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \in \mathbb{R}^3,\ R_n = \gamma_n.X^2 + \beta_n.X + \alpha_n$.

Ensuite :

- $(-2)^n = \chi_A(-2).Q_n(-2) + R_n(-2) = 0 + 4.\gamma_n - 2.\beta_n + \alpha_n$,
- $3^n = \chi_A(3).Q_n(3) + R_n(3) = 0 + 9.\gamma_n + 3.\beta_n + \alpha_n$,
- $5^n = \chi_A(5).Q_n(5) + R_n(5) = 0 + 25.\gamma_n + 5.\beta_n + \alpha_n$.

La résolution de ce système redonne les valeurs précédentes et l'expression précédente de A^n.

19. a. Puisque le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, A est trigonalisable et :

$\exists\ P \in Gl_3(\mathbb{C})$, $\exists\ T = \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, telles que : $T = P^{-1}.A.P$.

Puis : $\det(I_3 + A^2) = \det(I_3 + P.T^2.P^{-1}) = \det(P.(I_3 + T^2).P^{-1}) = \det(I_3 + T^2)$.

Or : $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & * & * \\ 0 & b^2 & * \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$, et : $I_3 + T^2 = \begin{pmatrix} 1+a^2 & * & * \\ 0 & 1+b^2 & * \\ 0 & 0 & 1+c^2 \end{pmatrix}$,

donc : $\det(I_3 + A^2) = (1+a^2).(1+b^2).(1+c^2) = 1 + (a^2+b^2+c^2) + a^2.b^2 + b^2.c^2 + c^2.a^2 + a^2.b^2.c^2$.

D'autre part : $0 = tr(A^2) = tr(T^2) = a^2 + b^2 + c^2$,

et : $0 = (tr(A))^2 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2.(a.b+b.c+c.a) = 0 + 2.(a.b+b.c+c.a)$,

d'où : $a.b + b.c + c.a = 0$,

et donc : $0 = (a.b+b.c+c.a)^2 = a^2.b^2 + b^2.c^2 + c^2.a^2 + 2.(a+b+c).a.b.c$, et : $a^2.b^2 + b^2.c^2 + c^2.a^2 = 0$.

Et comme : $\det(A) = \det(T) = a.b.c$, on en déduit que :

$\det(I_3 + A^2) = 1 + 0 + 0 + (a.b.c)^2 = 1 + (\det(A))^2$.

b. Si : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors on a aussi : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, et le résultat est encore vrai.

20. Si u est bijectif, les deux questions sont immédiates puisque : $\ker(u) = \ker(u^2) = \{0\}$, et : $\mathrm{Im}(u) = E$.
On supposera dans la suite que u n'est pas bijectif, et donc que 0 est valeur propre de u.

a. Soit : $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$, une base de E formée de vecteurs propres de u, et telle que $e_1,\dots,e_p$ sont les vecteurs correspondant à la valeur propre 0.

Alors : $mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{p+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, et donc : $mat_{\mathcal{B}}(u^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{p+1}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$.

Puisque les valeurs $\lambda_{p+1}^2,\dots,\lambda_n^2$ sont non nulles, on en déduit que :

$\ker(u) = \ker(u^2) = Vect(e_1,\dots,e_p)$.

b. Toujours à l'aide de la matrice précédente, il est clair que : $\mathrm{Im}(u) \subset Vect(e_{p+1},\dots,e_n)$.

En effet, tout vecteur de E a une image par u combinaison linéaire de $e_{p+1},\dots,e_n$.

Puis : $\forall\ p+1 \leq i \leq n$, $u(e_i) = \lambda_i.e_i$, donc : $e_i = \frac{1}{\lambda_i}.u(e_i) \in \mathrm{Im}(u)$.

On en déduit que : $Vect(e_{p+1},\dots,e_n) \subset \mathrm{Im}(u)$, et finalement : $\mathrm{Im}(u) = Vect(e_{p+1},\dots,e_n)$.

Il est alors clair que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires.

21. a. Il suffit ici d'identifier les termes d'une matrice pour qu'elle convienne (on ne demande pas d'unicité).

On constate que la matrice : $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, répond au problème posé.

b. La matrice A a pour polynôme caractéristique : $\chi_A(x) = x^2 - 4.x + 3$, et A admet deux valeurs propres simples qui sont 1 et 3.

Ses espaces propres sont de dimension 1 et valent : $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On peut donc écrire : $A = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.P^{-1}$, avec : $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et : $P^{-1} = -\frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ A^n = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.P^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 3^{n+1}-1 & 3-3^{n+1} \\ 3^n-1 & 3-3^n \end{pmatrix}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n.U_0$.

Avec la deuxième ligne de cette dernière égalité, on en conclut que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{2}.(3^n-1).2 + \frac{1}{2}.(3-3^n).1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.3^n$.

22. On peut poser : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$, pour constater que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A.U_n$.

On calcule alors : $\chi_A(x) = (x-1).(x-\frac{1}{4}).(x-\frac{1}{12})$, en additionnant par exemple les trois colonnes de A.

A ayant trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable, et :

$$E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ E_{\frac{1}{4}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),\ E_{\frac{1}{12}}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}\right).$$

Puis on écrit :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n.U_0 = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^n} \end{pmatrix}.P^{-1}.\begin{pmatrix} 0 \\ 22 \\ 22 \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12^n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 - \frac{11}{4^n} - \frac{3}{12^n} \\ 14 + \frac{8}{12^n} \\ 14 - \frac{11}{4^n} + \frac{3}{12^n} \end{pmatrix}.$$

Finalement, les trois suites (x_n), (y_n) et (z_n) convergent toutes trois vers 14.

23. a. En s'inspirant d'exercices similaires, on peut facilement proposer : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

b. On examine ensuite les valeurs propres de A à l'aide de son polynôme caractéristique qui vaut :

$\chi_A(x) = x^3 + 4.x^2 + 5.x + 2 = (x+1)^2.(x+2)$.

Les espaces propres de A se déterminent avec les systèmes : $A.X = \lambda.X$, habituels et :

$E_{-2}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$, et : $E_{-1}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, d'où on déduit que A n'est pas diagonalisable.

Il suffit de former ensuite une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à l'aide des deux bases ci-dessus et d'un troisième vecteur, libre avec les deux premiers, pour obtenir par exemple : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, puis :

$P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$, et par récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & (-2)^n + (-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}.n \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n.X_0 = P.T^n.P^{-1}.X_0$, et en développant, on obtient sur la première ligne :

$\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n.((2^n - 2.n).u_0 + (2^{n+1} - 3.n - 2).u_1 + (2^n - n - 1).u_2)$.

24. a. On peut évidemment calculer son polynôme caractéristique et : $\chi_A(x) = (x-1).(x-3).(x+4)$.
Il n'y a pas de factorisation a priori du polynôme mais on constate que 1 est racine.
Puis les espaces propres valent : $E_1(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}\right)$, $E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_{-4}(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}\right)$.
Donc en posant : $P = \begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\0 & 2 & 5\\3 & -1 & 1\end{pmatrix}$, on a : $P^{-1}.A.P = D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

b. Soit M vérifiant : $M^2 = A$, et soit : $M' = P^{-1}.M.P$.
Alors : $M'^2 = P^{-1}.M^2.P = P^{-1}.A.P = D$, et : $M'.D = M'.M'^2 = M'^3 = M'^2.M' = D.M'$,
donc M' et D commutent.
Mais si on pose : $M' = \begin{pmatrix}a' & d' & g'\\b' & e' & h'\\c' & f' & i'\end{pmatrix}$, alors : $M'.D = D.M'$, entraîne : $b' = c' = d' = f' = g' = h' = 0$.
Autrement dit si M est solution, alors M' est diagonale, et vérifie : $M'^2 = D$.
Reste donc à résoudre : $\begin{pmatrix}a'^2 & 0 & 0\\0 & e'^2 & 0\\0 & 0 & i'^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$, ce qui conduit à 8 solutions pour M' dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, de la forme $P.\Delta.P^{-1}$, avec : $\Delta = \begin{pmatrix}\pm 1 & 0 & 0\\0 & \pm\sqrt{3} & 0\\0 & 0 & \pm 2.i\end{pmatrix}$.
Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ enfin, il n'y a pas de solution car si on développe les produits précédents, on constate que toutes les matrices obtenues comportent des coefficients complexes non réels.
Or une solution réelle étant aussi une solution complexe, toute solution réelle doit faire partie des solutions complexes trouvées précédemment : donc il n'y a pas de solution réelle.

25. a. La matrice A est diagonalisable.
En effet, son polynôme caractéristique est : $\chi_A(x) = (x-6).(x-2)$, et a deux racines simples.
Les espaces propres de A sont : $E_2(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)$, $E_6(A) = Vect\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$.
Donc en posant : $P = \begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix}$, alors : $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 6\end{pmatrix} = D$.

b. Si M vérifie l'équation (E), alors : $(P^{-1}.M.P)^2 + (P^{-1}.M.P) = P^{-1}.(M^2 + M).P = P^{-1}.A.P = D$.
Avec : $M' = P^{-1}.M.P$, on constate que : $D.M' = (M'^2 + M').M' = M'^3 + M'^2 = M'.(M'^2 + M') = M'.D$.
Si maintenant on pose : $M' = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$, cette dernière égalité s'écrit : $\begin{pmatrix}6.a & 6.b\\2.c & 2.d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6.a & 2.b\\6.c & 2.d\end{pmatrix}$,
autrement dit, on a : $M' = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & d\end{pmatrix}$, et M' est bien diagonale.

c. L'équation (E) avec la matrice M' devient : $\begin{pmatrix}a^2 + a & 0\\0 & d^2 + d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 6\end{pmatrix}$, ce qui est équivalent à :

$(a,d) \in \{(1,2), (-2,2), (1,-3), (-2,-3)\}$.

Ces quatre solutions M' fournissent quatre solutions à l'équation (E), qui sont finalement :

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

Polynômes de matrices, utilisation de polynômes.

26. a. Tout d'abord en développant le déterminant, on constate que : $\chi_A(x) = (x-3)^2.(x-1)$.

On a donc : $P = X^3 - 7.X^2 + 15.X - 9$.

Si on calcule $P(A)$, on constate que : $A^3 - 7.A^2 + 15.A - 9.I_3 = 0$.

b. On sait que les valeurs propres de A sont des racines de tout polynôme annulateur de A qui doit donc être divisible par : $Q = (X-1).(X-3)$.

Par ailleurs, la matrice A n'est pas diagonalisable puisque l'espace propre associé à 3 est :

$E_3(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, qui est de dimension 1 alors que 3 est valeur propre double.

Donc A ne peut annuler un polynôme scindé à racines simples.
Or Q est le seul polynôme de degré 2 qui pourrait répondre à la question : le polynôme cherché est donc de degré au moins 3 et est donc de la forme : $R = Q.(X-a)$.

Trois possibilités se présentent :

- a distinct de 1 et de 3 : cela fournirait à nouveau un polynôme annulateur scindé à racines simples, ce qui est exclu,
- $a = 1$, ce qui donnerait : $R = (X-1)^2.(X-3)$.

Mais alors on aurait : $P(A) = R(A) = 0$, donc : $P(A) - R(A) = 0 = 2.(A - I_3).(A - 3.I_3)$, et on aurait une fois de plus un polynôme annulateur scindé à racines simples.

- $a = 3$, et on retrouve le polynôme P.

Le polynôme que l'on cherche est donc : $P = X^3 - 7.X^2 + 15.X - 9 = (X-3)^2.(X-1)$.

27. a. Puisqu'on dispose d'un polynôme annulateur pour A qui est : $P = X^4 - 7.X^3 + 12.X^2$, on sait que les valeurs propres de A sont nécessairement racines de P.

Donc ces valeurs propres (complexes) ne peuvent valoir que 0, 3 ou 4, car : $P = X^2.(X-3).(X-4)$.

b. Comme matrice complexe, A est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé sur ℂ) et une matrice triangulaire semblable à A comporte que sa diagonale les valeurs propres de A.
Donc $tr(A)$ est une somme de n nombres valant 0, 3 ou 4, donc : $tr(A) \in$ ℕ, et : $0 \leq tr(A) \leq 4.n$.

28. On dispose ici du polynôme annulateur : $P = X^4 - X^2 = X^2.(X-1).(X+1)$, pour f.

Les seules valeurs propres possibles pour f sont 0, 1 et -1.

Puisque 1 et -1 sont d'après l'énoncé supposées être des valeurs propres de f, deux cas se présentent :

- f admet 1, -1 **et** 0 comme valeurs propres.

Dans ce cas, f admet trois valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 3 et f est donc bien diagonalisable.

- f n'admet pas 0 comme valeur propre, et donc n'admet que 1 et -1.

Dans ce cas le noyau de f est réduit à {0}, f est donc bijectif et inversible et si on compose la première égalité par $(f^{-1})^2$, on obtient : $f^2 = id_E$, ce qui fournit un autre polynôme annulateur pour f qui est $X^2 - 1$, et qui est cette fois scindé à racines simples.

Donc f dans ce deuxième cas est encore diagonalisable (c'est même une symétrie).

29. Supposons qu'une telle matrice A existe.
On peut factoriser P avec : $P=(X^2+X+1).(X^2+1)$, et on constate que P n'a pas de racine réelle.
Or χ_A étant un polynôme réel de degré 5 a une racine réelle : en effet sa fonction polynôme associée est continue sur ℝ, et tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$ en $-\infty$, donc elle s'annule du fait du théorème des valeurs intermédiaires.
Et cette racine réelle de χ_A devrait être racine de P.
Donc une telle matrice A n'existe pas.

30. a. Le polynôme $X^3-1=(X-1).(X^2+X+1)$, est annulateur pour A.
Donc la seule valeur propre réelle possible pour A est 1.
Mais comme χ_A est de degré 3, χ_A admet au moins une racine réelle et 1 est donc effectivement la seule valeur propre réelle de A.
b. Comme matrice complexe, A est diagonalisable puisque le polynôme annulateur proposé au-dessus est scindé à racines simples dans ℂ (les racines cubiques de l'unité).
Mais comme polynôme réel, χ_A admet comme racines :
• soit trois valeurs réelles et la seule possibilité est que 1 soit valeur propre triple ; dans ce cas, A serait semblable à la matrice I_3 donc égale à I_3, ce qui est exclu,
• soit une valeur réelle et deux complexes non réels conjugués qui ne peuvent être que j et j^2.
Ayant déjà trois racines, ce sont les seules et elles sont simples.
c. A est ainsi diagonalisable dans ℂ mais pas dans ℝ.

31. a. On peut remarquer que :
$M^2-2.I_n=-{}^tM$, donc : $(M^2-2.I_n)^2=({}^tM)^2={}^t(M^2)={}^t(2.I_n-{}^tM)=2.I_n-M$, soit :
$M^4-4.M^2+4.I_n=2.I_n-M$, ou : $M^4-4.M^2+M+2.I_n=0$,
ce qui permet de proposer : $P=X^4-4.X^2+X+2$, comme polynôme annulateur pour M.
b. Puisqu'on peut factoriser P en : $P=(X-1).(X+2).(X^2-X-1)$, et puisque le polynôme de degré 2 qui apparaît a deux racines réelles simples qui sont $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, P est un polynôme annulateur, scindé à racines simples dans ℝ et M est diagonalisable.

32. a. p vérifie : $(p^2)^2=p^2$, et : $P=X^4-X^2=X^2.(X-1).(X+1)$, est un polynôme annulateur pour p.
Donc les seules valeurs propres possibles de p sont 0, 1 et -1.
b. Raisonnons par double implication.
• si p est diagonalisable, alors il existe une base de l'espace dans laquelle la matrice D de p est diagonale, avec des éléments diagonaux égaux à 0, 1 ou -1.
Or ces réels vérifient l'égalité : $\lambda^3=\lambda$,donc la matrice D vérifie aussi : $D^3=D$, et p vérifie : $p^3=p$.
• si p vérifie : $p^3=p$, alors p admet un nouveau polynôme annulateur : $X^3-X=X.(X-1).(X+1)$, scindé à racines simples donc p est diagonalisable.

33. a. La matrice A vaut : $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, et si on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A et : $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors :
• $u(e_1)=0$,
• $\forall\ 2\le k\le n$, $u(e_k)=e_{k-1}$.
On montre alors rapidement par récurrence que : $\forall\ 1\le p\le n-1$,

- $\forall\ 1 \leq k \leq p$, $u^p(e_k) = 0$, et :
- $\forall\ p+1 \leq k \leq n$, $u^p(e_k) = e_{k-p}$,

ce qui entraîne en particulier que : $u^p(e_n) = e_{n-p} \neq 0$, et : $u^p \neq 0$ (donc également : $A^p \neq 0$).

De plus : $\forall\ 1 \leq k \leq n-1$, $u^{n-1}(e_k) = 0$, et : $u^{n-1}(e_n) = e_1$, d'où : $\forall\ 1 \leq k \leq n$, $u^n(e_k) = 0$, et : $u^n = 0$.

Finalement, A est nilpotente et le plus petit entier p tel que : $A^p = 0$, est : $p = n$.

b. Si une telle matrice B existe, alors : $(B^2)^n = A^n = 0$, et : $B^{2.n} = 0$.

Donc $X^{2.n}$ est annulateur pour B et la seule valeur propre possible pour B (réelle ou complexe) est 0.
Donc : $\chi_B(x) = x^n$, et le théorème de Cayley-Hamilton entraîne : $B^n = 0$.

- Si alors n est pair, avec : $n = 2.m$, on en déduit que : $A^m = (B^2)^m = B^{2.m} = B^n = 0$, ce qui n'est pas possible car : $m < n$.
- Si n est impair, avec : $n = 2.m+1$, alors : $A^{m+1} = (B^2)^{m+1} = B^{2.m+2} = B^{n+1} = 0$.

Or ce cas est également impossible car : $m+1 = \dfrac{n+1}{2} < \dfrac{n+2}{2} \leq \dfrac{n+n}{2} = n$.

Conclusion : une telle matrice B n'existe pas.

34. a. Puisque λ est la seule valeur propre de u et qu'on travaille sur $\mathbb{C}$, on a toutes les racines de χ_u qui est scindé.
Donc en notant n la dimension de E, on a : $\chi_u = (X-\lambda)^n$.

b. Si u est diagonalisable, alors la matrice de u dans une base de E formée de vecteurs propres de u est $\lambda.I_n$, donc u vaut $\lambda.id_E$.

Réciproquement, l'endomorphisme $\lambda.id_E$ est bien diagonalisable.

En conclusion, u est diagonalisable si et seulement si : $u = \lambda.id_E$.

c. Enfin, le théorème de Cayley-Hamilton dit que : $\chi_u(u) = 0$, ce qui s'écrit : $(u - \lambda.id_E)^n = 0$, ce qui exprime bien que $(u - \lambda.id_E)$ est nilpotent.

35. Puisque E est de dimension finie, χ_u existe et c'est un polynôme annulateur pour u, d'après le théorème de Cayley-Hamilton.
De plus, u étant un automorphisme de E, on a : $\det(u) \neq 0$.
Si alors on développe : $\chi_u(u) = 0$, on obtient : $u^n + \ldots + a_1.u + (-1)^n.\det(u).id_E = 0$, et donc :

$(u^{n-1} + \ldots + a_1.id_E)ou = -(-1)^n.\det(u).id_E$, soit finalement : $u^{-1} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\det(u)}.(u^{n-1} + \ldots + a_1.id_E)$,

autrement dit u^{-1} est bien un polynôme en u.

36. Notons m la dimension de E, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ les valeurs propres de u répétées avec leurs multiplicités et :

$\forall\ n \geq 0$, $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

Puisque u est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$mat_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, \text{ et : } \forall\ n \geq 0,\ mat_{\mathscr{B}}(g_n) = \begin{pmatrix} P_n(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_n(\lambda_m) \end{pmatrix}.$$

On sait ensuite que : $\forall\ 1 \leq i \leq m$, la suite $(P_n(\lambda_i))$ converge vers : $e^{\lambda_i} \neq 0$.

Donc : $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $\exists\ n_i \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_i$, $P_n(\lambda_i) \neq 0$.

En posant alors : $n_0 = \max(n_1,\ldots,n_m)$, on a : $\forall n \geq n_0$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $P_n(\lambda_i) \neq 0$, et donc :

$$\forall n \geq n_0,\ \det(g_n) = \prod_{i=1}^{m} P_n(\lambda_i) \neq 0,$$

autrement dit tous les endomorphismes g_n sont inversibles à partir de n_0.

Sous-espaces vectoriels stables.

37. a. Puisque χ_u est un polynôme à coefficients complexes, il admet au moins une racine (pourvu que la dimension de l'espace vectoriel ne soit pas nulle), et u admet au moins une valeur propre λ.

b. Puisque u et v commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
En particulier, en reprenant la valeur propre précédente λ de u, alors $E_\lambda(u)$ est stable par v.
En effet : $\forall\ x \in E_\lambda(u)$, $u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda.x) = \lambda.v(x)$, et : $v(x) \in E_\lambda(u)$.
Si on appelle alors v_λ l'endomorphisme induit par v dans $E_\lambda(u)$, et donc défini par :
$\forall\ x \in E_\lambda(u)$, $v_\lambda(x) = v(x)$,
alors v_λ est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension au moins 1 et à ce titre, il admet au moins une valeur propre μ, ainsi qu'un vecteur propre y.
Ce vecteur y vérifie donc : $v(y) = v_\lambda(y) = \mu.y$, et étant dans $E_\lambda(u)$, il vérifie aussi : $u(y) = \lambda.y$.
Etant enfin non nul (comme vecteur propre de v_λ), y est bien vecteur propre commun à u et à v.

38. a. E étant évidemment un sous-espace vectoriel de E, stable par u et contenant x_0, la question revient à montrer qu'il est le seul.
Soit donc F un tel sous-espace vectoriel de E.
Alors F contient aussi $u(x_0)$, ainsi que toutes les images $u^k(x_0)$, et par linéarité toute combinaison linéaire de ces images.
Donc F contient une base de E, et : F = E.
On peut proposer pour réciproque :
« si E est le seul sous-espace vectoriel de E stable par u et contenant x_0, alors $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ est une base de E ».
Remarque : pour démontrer cette réciproque on peut par exemple appeler p le plus grand entier non nul, tel que la famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0))$ soit libre.
Un tel entier p existe puisque $x_0, u(x_0), ..., u^{k-1}(x_0)$ est libre lorsque : $k = 1$, et liée lorsque : $k = n+1$ (dans le premier cas car x_0 est non nul et dans le deuxième car la famille comporte $n+1$ vecteurs), et et p est alors le plus grand élément d'une famille non vide et majorée d'entiers.
Si de plus on suppose que : $p < n$, on note alors : $F = Vect(x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0))$, et :
- F est un sous-espace vectoriel de E contenant x_0,
- F est stable par u car comme précédemment, il suffit de vérifier que : $u(u^{p-1}(x_0)) = u^p(x_0) \in F$.

Or $(x_0, u(x_0), ..., u^p(x_0))$ est liée par définition de p et donc :
$\exists\ (\alpha_0, ..., \alpha_p) \in \mathbf{K}^{p+1}$, $(\alpha_0, ..., \alpha_p) \neq (0, ..., 0)$, $\alpha_0.x_0 + ... + \alpha_p.u^p(x_0) = 0$.
Mais on ne peut avoir : $\alpha_p = 0$, car la liberté de la famille restante entraînerait la nullité de tous les autres coefficients et donc : $\alpha_p \neq 0$.
On en déduit que $u^p(x_0)$ est combinaison linéaire de $x_0, u(x_0), ..., u^{p-1}(x_0)$, et : $u^p(x_0) \in F$.
- F est distinct de E car : $\dim(F) < n$.

Mais un tel F ne peut pas exister vu l'hypothèse faite et donc : $p = n$, et comme famille libre à n éléments de E, $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

b. L'existence du n-uplet : $(\alpha_0, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$, tel que : $u^n(x_0) = \alpha_0.x_0 + \alpha_1.u(x_0) + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1}(x_0)$, est garantie par le fait que la famille $(x_0, u(x_0), ..., u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
Si on note alors : $v = \alpha_0.id_E + \alpha_1.u + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1}$, il est immédiat que :

$\forall\ 0 \le k \le n-1$, u^k et v commutent puisque v est un polynôme en u, et:

$v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0)) = u^k(\alpha_0.x_0 + \alpha_1.u(x_0) + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1}(x_0)) = u^k(u^n(x_0)) = u^n(u^k(x_0))$.

Puisque les deux endomorphismes u^n et v de E associent l'un et l'autre la même image à tous les vecteurs d'une base de E, ils sont égaux, d'où : $u^n = \alpha_0.id_E + \alpha_1.u + ... + \alpha_{n-1}.u^{n-1}$.

39. a. Il est immédiat que u (ou M) est diagonalisable car il admet trois valeurs propres simples alors que c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 3.
F étant stable par u, l'endomorphisme induit par u dans F, donc u_F, est aussi diagonalisable.
Les valeurs propres de u sont 1, 3 et 5, et ses vecteurs propres forment trois droites de $\mathbb{R}^3$.
Les valeurs propres de u_F étant également des valeurs propres de u, elles ne peuvent valoir que 1, 3 ou 5 et ses vecteurs propres sont des vecteurs propres de u (appartenant à F).

b. Avec la remarque précédente, on en déduit que F admet une base formée de vecteurs propres de u_F, formée donc de vecteurs propres de u (et qui appartiennent à F).

c. Si on note e_1, e_3, e_5 des vecteurs propres de u associés à 1, 3, 5, alors F contient une base formée de vecteurs colinéaires à certains trois vecteurs, donc une base formée à partir de ces trois vecteurs.
En effet, si F contient par exemple $\alpha.e_1$ (avec : $\alpha \ne 0$), alors F contient $\frac{1}{\alpha}.\alpha.e_1$, donc e_1.
On peut alors lister les sous-espaces vectoriels F :
- si : $\dim(F) = 0$, alors : $F = \{0\}$,
- si : $\dim(F) = 1$, alors : $F = Vect(e_i)$, avec : $i \in \{1,3,5\}$,
- si : $\dim(F) = 2$, alors : $F = Vect(e_i, e_1)$, avec : $i \ne j$, $(i, j) \in \{1,3,5\}^2$,
- si : $\dim(F) = 3$, alors : $F = E$,

et on vérifie sans problème que ces : $1+3+3+1=8$, sous-espaces vectoriels de E sont bien stables par u.

Remarque : si u n'a plus trois valeurs propres distinctes, il y a beaucoup plus de sous-espaces vectoriels de E stables par u (examiner par exemple une projection sur un plan ou l'identité).

40. a. Soit donc ($e_1,....,e_p$) une base de E$_\lambda$ (avec : $p = \dim(E_\lambda)$) complétée en une base ($e_1,....,e_n$) de E.
La matrice de u dans cette base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs et s'écrit :

$mat_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} \lambda.I_p & A \\ 0_{n-p,p} & B \end{pmatrix}$, avec : $A \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbf{K})$, et : $B \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbf{K})$.

On peut alors calculer : $\chi_u(x) = (-1)^n.\det(M - x/I_n) = (x-\lambda)^p.\det(x.I_{n-p}.B) = (x-\lambda)^p.\chi_B(x)$.

Donc λ est racine d'ordre de χ_u **au moins** p et p est inférieur à la multiplicité de λ comme racine de χ_u, ce qui s'écrit encore : $p = \dim(E_\lambda)) \le mult(\lambda)$.

b. On peut (c'est plus lisible) raisonner par double implication.
- Si la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, alors la somme des dimensions de ces sous-espaces propres est égale à la somme des multiplicités donc égale à n, puisque le polynôme caractéristique de u est scindé sur **K**.

Dans ce cas, u est bien diagonalisable.
- Supposons que l'un des sous-espaces propres ait une dimension strictement inférieure à la multiplicité de sa valeur propre.

Notons ce sous-espace propre E_1, sa valeur propre λ_1, et les autres valeurs propres $\lambda_2,...,\lambda_m$.
Alors : $\dim(E_1) \le mult(\lambda_1) - 1$, et : $\forall\ 2 \le k \le m$, $\dim(E_k) \le mult(\lambda_k)$).

En sommant, on obtient : $\sum_{k=1}^{m} \dim(E_k) \le (mult(\lambda_1) - 1) + \sum_{k=2}^{m} mult(\lambda_k) = \sum_{k=1}^{m} mult(\lambda_k) - 1 = n-1$,

et u ne peut être diagonalisable.
Par contraposée, on vient d'obtenir la réciproque de l'implication précédente, d'où finalement l'équivalence voulue.