Produit scalaire.

Exercices 2017-2018

Niveau 1.

Exercices généraux sur le produit scalaire.

1. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire réel.
   a. Montrer que toute famille orthonormale est libre.
   b. Est-ce encore le cas pour une famille orthogonale ?

2. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux de [0,1] dans ℝ.
   L'application : $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t).g(t).dt$, définit-elle un produit scalaire sur E ?

3. Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par : $(A,B) \mapsto tr({}^tA.B)$.
   a. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(A) \le \sqrt{n}.\sqrt{tr({}^tA.A)}$, et préciser les cas d'égalité.

4. Soit E l'ensemble des fonctions continues d'un intervalle I de ℝ dans ℝ, de carré intégrables sur I.
   a. Montrer que : $\forall\ (f,g) \in E^2$, $f.g$ est intégrable sur I.
   b. En déduire que E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.
   c. Montrer que : $(f,g) \mapsto \int_I f(t).g(t).dt$, définit un produit scalaire sur E.

5. Soit : E = $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\ge 0} u_n^2$ converge$\}$.
   a. Montrer que E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel.
   b. Montrer que : $(u,v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.v_n$, définit un produit scalaire sur E.

6. On note : E = $\{f \in C^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}),\ \exists\ n \in \mathbb{Z},\ \lim_{t\to+\infty} t^n.f(t) = 0\}$.
   a. Vérifier que E est un espace vectoriel réel.
   b. Montrer que l'application : $(f,g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t).g(t).e^{-t}.dt$, définit un produit scalaire dans E.
   c. Vérifier que : $Vect(\sin,\cos) \subset E$, puis déterminer une base orthonormale de $Vect(\sin,\cos)$.

7. Dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique, soit f une fonction strictement positive.
   A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que : $(a-b)^2 \le \int_a^b f(t).dt.\int_a^b \frac{dt}{f(t)}$,
   et étudier les cas d'égalité.

8. Montrer que : $\forall\ f \in C^0[0,1],\mathbb{R})$, $\int_0^1 f(t).dt \le \sqrt{\int_0^1 f(t)^2.dt}$.

9. Montrer que : $\forall\ f \in C^1[a,b],\mathbb{R})$, $\left(\int_a^b f(t)^2.dt\right).\left(\int_a^b f'(t)^2.dt\right) \ge \left(\frac{f^2(b)-f^2(a)}{2}\right)^2$.

10. Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$.
    Pour : $a \in$ E, non nul, et : $\lambda \in$ **K**, résoudre l'équation : $(a|x) = \lambda$.

11. Soit E un ℝ-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(.|.)$.
    Montrer que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si : $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $\|x\| \le \|x+\lambda.y\|$.

Espaces vectoriels euclidiens.

12. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
Donner une base orthonormale de : $H = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1 + ... + x_n = 0\}$.

13. Soit E un espace euclidien et soient a, b deux vecteurs orthogonaux et unitaires de E.
Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'endomorphisme f de E défini par :
$\forall\ x \in E,\ f(x) = (a|x).a + (b|x).b$.
On sera amené à discuter suivant la dimension de E.

14. Soit E un espace euclidien, et $(e_1,...,e_n)$ des vecteurs unitaires de E, tels que : $\forall\ x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.
On pose : $F = Vect(e_1,...,e_n)$.
a. Montrer que la famille $(e_1,...,e_n)$ est orthonormale.
b. Montrer que c'est une base de E.

15. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.
Montrer que : $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, et : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

16. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille (u, v, w), avec : $u = (1,1,1),\ v = (1,-1,1),\ w = (1,1,-1)$.

17. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.
a. Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, sont supplémentaires orthogonaux.
b. Montrer que la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.
c. Déterminer la distance de la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

18. On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire classique de $C^0([0,1],\mathbb{R})$.
a. Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, X^2)$.
b. Déterminer par ailleurs : $\inf_{(a,b)\in R^2} \int_0^1 (x^2 - a.x - b)^2.dx$.

19. a. Montrer que l'application : $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t).g(t).e^{-t}.dt$,
définit un produit scalaire dans $\mathbb{R}$\{X\].
b. Calculer $(X^p | X^q)$ pour tout couple : $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
c. Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la famille $(1, X, X^2)$.
d. Calculer $\inf_{(a,b,c)\in R^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - (a.t^2 + b.t + c))^2.dt$.

20. Régression linéaire : droite des moindres carrés.
On considère une expérience donnant lieu à un ensemble de mesures $((x_i, y_i))_{1\le i\le n}$, telles que :
$n \ge 2$, et les x_i sont distincts deux à deux.
On postule que la grandeur y est une fonction affine de x autrement dit que : $\exists\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$, tel que les points $M_i(x_i, y_i)$ se trouvent sur la droite d'équation : $y = a.x + b$.
Compte-tenu des erreurs de mesure, les points M_i ne se trouvent pas en fait sur une telle droite et on va donc plutôt chercher un couple (a,b) qui minimise la quantité $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a.x_i + b))^2$.
a. Montrer que le problème revient à trouver la distance d'un vecteur à un plan de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.

b. Justifier que le problème a une unique solution.

Projecteurs orthogonaux.

21. Soient E un espace vectoriel euclidien, D une droite de E et H un hyperplan de E.
Donner l'expression, pour : $x \in$ E, de la projection orthogonale de x sur D et sur H en fonction de x.

22. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique.
a. Déterminer une base orthonormale de : $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y + z = 0\}$.
b. En déduire l'expression de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur P.

23. On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique, et on note $\mathscr{B}$ sa base canonique.
Par ailleurs on note : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.
a. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$ où f est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$ sur F.
b. Déterminer $d((1,2,3,4), F)$.

24. Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormale : $\mathscr{B} = (i, j, k)$.
Soit : $p \in \mathscr{L}$(E), tel que : $mat_{\mathscr{B}}(p) = A = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan P que l'on précisera.

Matrices symétriques réelles.

25. Diagonaliser la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, par l'intermédiaire d'une matrice orthogonale.

26. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique.
La matrice $A + iI_n$ est-elle inversible ?

27. Soient u et v deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien E.
Montrer que uov est un endomorphisme symétrique si et seulement si u et v commutent.

28. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Montrer que ${}^tA.A$ est une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives.
b. Montrer que ces valeurs propres sont strictement positives si et seulement si A est inversible.

29. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et : $B = \frac{1}{2}.(A + {}^tA)$.
a. Justifier que les valeurs propres de B sont réelles.
On notera par ailleurs α la plus grande valeur propre de B et β la plus petite.
b. Pour : $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, comparer ${}^tX.A.X$ et ${}^tX.B.X$.
c. Montrer que : $\forall\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha.{}^tX.X \le {}^tX.A.X \le \beta.{}^tX.X$.
d. En déduire que : $Sp_{\mathbb{R}}((A) \subset [\alpha, \beta]$.

30. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Montrer que : $\forall\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A.X = 0) \Leftrightarrow ({}^tA.A.X = 0)$.
b. En déduire que : $rg(A) = rg({}^tA.A)$.

31. Soit : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et : $B = A + {}^tA$.
Montrer que si B est nilpotente, alors A est antisymétrique.

32. Soit A une matrice symétrique réelle telle que : $\exists\ k \geq 2$, $A^k = I_n$.

Montrer que : $A^2 = I_n$.

Endomorphismes orthogonaux.

33. Soient E un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et : $u \in$ O(E).

a. Montrer que : $u(F^{\perp}) = (u(F))^{\perp}$.

b. Montrer que : (F stable par u) $\Leftrightarrow$ ($F^{\perp}$ stable par u).

Remarque : les deux questions sont indépendantes.

34. Soient E un espace vectoriel euclidien et : $f \in \mathscr{L}$(E), tel que : $\forall\ x \in$ E, $(f(x)|x) = 0$.

Montrer que $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux l'un de l'autre.

35. Soient E un espace vectoriel euclidien, et : $f \in$ O(E).

Montrer que $\ker(f - id_E)$ et $\mathrm{Im}(f - id_E)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

36. Soit E un espace vectoriel euclidien et a un vecteur unitaire de E.

Pour : $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit f_α sur E par : $\forall\ x \in$ E, $f_\alpha(x) = x + \alpha.(a|x).a$.

a. Vérifier que : $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha \in \mathscr{L}$(E), et calculer $f_\alpha o f_\beta$, pour : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

b. Montrer que : (f_α bijective) $\Leftrightarrow$ ($\alpha \neq -1$).

c. Préciser les valeurs propres et les vecteurs propres de f_α sans calculer sa matrice représentative ou son polynôme caractéristique, et en déduire une description géométrique de f_α.

37. Soient E un espace vectoriel euclidien, et : $f \in$ O(E).

Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est une symétrie orthogonale.

Matrices orthogonales.

38. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui sont à la fois :

- orthogonales et symétriques,
- orthogonales et antisymétriques.

39. Soit E un espace euclidien de dimension 2.

Déterminer : $C = \{f \in O(E), \forall\ g \in O(E),\ fog = gof\}$.

40. Déterminer les matrices orthogonales qui sont triangulaires supérieures.

41. Soit : $A \in$ O(n).

a. Exprimer $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$, à l'aide de A et du vecteur colonne X ne comportant que des 1.

b. En déduire que : $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) muni de son produit scalaire canonique.

Isométries en dimension 3, produit vectoriel.

42. Donner les éléments géométriques des transformations de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{9}.\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix},\ B = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ C = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},\ D = \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

43. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la réflexion par rapport au plan P d'équation :

$2.x + 3.y - z = 0$.

44. Soit E un espace euclidien de dimension 3 orienté muni d'une base orthonormale directe : $\mathscr{B} = (i, j, k)$.
Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe dirigé et orienté par : $w = \frac{1}{3}.(2.i - 2.j - k)$, et d'angle θ tel que : $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$, et : $\sin(\theta) = \frac{3}{5}$.

45. Soient : $u \in \mathbb{R}^3$, normé, et : $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que la rotation d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par u est définie par :
$\forall\ x \in \mathbb{R}^3,\ r(x) = (1-\cos(\theta)).(u|x).u + \cos(\theta).x + \sin(\theta).u \wedge x$.

46. Si r et r' sont deux rotations de $\mathbb{R}^3$, décrire l'endomorphisme $ror'or^{-1}$.

47. Soit a un vecteur non nul d'un espace euclidien E orienté de dimension 3.
On considère l'endomorphisme de E donné par : $\forall\ x \in$ E, $f(x) = x + a \wedge x$.
a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
b. Démontrer à l'aide d'une base orthonormale directe de E que :
$\forall\ (x, x') \in$ E^2, $x \wedge (x \wedge x') = (x|x').x - \|x\|^2.x'$.
c. Déterminer un polynôme annulateur pour f, et retrouver la seule valeur propre possible de f.

<u>Niveau 2.</u>
Exercices généraux sur le produit scalaire.

48. Soit l'application donnée par : $\forall\ (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2,\ (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0).Q^{(k)}(0)$.
a. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
b. Déterminer une base orthonormale pour ce produit scalaire.

49. Montrer que : $(P, Q) \mapsto \int_0^1 P'(t).Q'(t).dt + \frac{1}{2}.(P(0).Q(1) + P(1).Q(0))$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

50. Soient φ et ψ deux produits scalaires dans un espace vectoriel réel E de dimension finie.
On suppose que : $\forall\ (x, y) \in$ E², $(\varphi(x, y) = 0) \Rightarrow (\psi(x, y) = 0)$.
En utilisant une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de E pour φ, montrer que :
$\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^{*+}$, tel que : $\forall\ (x, y) \in$ E², $\psi(x, y) = \alpha.\varphi(x, y)$.

51. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$.
a. Si on suppose que : $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$, montrer que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$.
b. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

52. Montrer que : $\forall\ (A, B) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2,\ (tr(A.B + B.A))^2 \leq 4.tr(A^2).tr(B^2)$.

53. a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, \exists !\ Q_n \in \mathbb{R}_n[X], \forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \int_0^1 P(t).Q_n(t).dt$
b. Montrer par l'absurde que : $\deg(Q_n) = n$.
c. Montrer que le résultat devient faux dans $\mathbb{R}[X]$, à savoir qu'on ne peut trouver : $Q \in \mathbb{R}[X]$, tel que :
$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \int_0^1 P(t).Q(t).dt$

Espaces vectoriels euclidiens, et sous-espaces vectoriels.

54. Famille obtusangle.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soient $x_1, \ldots, x_{n+2}$ des vecteurs de E.

On veut montrer qu'il n'est pas possible d'avoir : $\forall\ 1 \le i \ne j \le n+2$, $(x_i | x_j) < 0$.

a. Montrer que c'est effectivement le cas : $n = 1$.
b. On suppose le résultat établi pour tout espace de dimension $n-1$, pour n donné tel que : $n-1 \ge 1$.
En considérant : $F = Vect(x_{n+2})^{\perp}$, montrer que le résultat est encore vrai en dimension n.
c. En déduire le cardinal maximum d'une famille obtusangle (telle que l'angle entre deux vecteurs quelconques de la famille est obtus).

55. Déterminant de Gram.
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
Soit par ailleurs ($x_1,...,x_n$) une famille d'éléments de E, et $G(x_1,...,x_n)$ la matrice de coefficient générique :
$\forall\ 1 \le i, j \le n$, $g_{i,j} = (x_i | x_j)$,
et : $Gram(x_1,...,x_n) = \det(G(x_1,...,x_n))$
a. Montrer que si la famille ($x_1,...,x_n$) est liée, alors : $\det(G) = 0$.
b. Si ($x_1,...,x_n$) est libre, on note A la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à cette nouvelle base de E.
Exprimer G en fonction de A et en déduire que : $\det(G) \ne 0$, ainsi que : $\det(G) > 0$.
c. En déduire une équivalence.
d. Montrer que ce résultat reste vrai si on considère une famille de p vecteurs ($x_1,...,x_n$), avec : $p \le n$.
e. Pour : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, à quelle condition existe-t-il ($x_1,...,x_n$) dans E tels que : $M = G(x_1,...,x_n)$?
f. Pour : $n \ge 2$, et : $c \in \mathbb{R}$, peut-on trouver ($x_1,...,x_n$) dans E tels que : $\forall\ 1 \le i \ne j \le n$, $(x_i | x_j) = c$?

56. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, et : $H = \{Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tX.Y = 0\}$.
Montrer que X est vecteur propre de ${}^tA$ si et seulement si H est stable par A.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

57. Montrer que : $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{+1} \frac{f(t).g(t)}{\sqrt{1-t^2}}.dt$, définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n$[X].
Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2$[X].

58. Pour : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf\limits_{M \in S_n(R)} \left(\sum\limits_{1 \le i,j \le n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right)$ où $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puis calculer $\inf\limits_{M \in S_n(R)} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (i - m_{i,j})^2$.

Projecteurs orthogonaux.

59. Soit E un espace vectoriel euclidien et x et y deux vecteurs non nuls de E.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que le projeté orthogonal de x sur $Vect(y)$ soit égal au projeté orthogonal de y sur $Vect(x)$.

60. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique, et on définit : $F = Vect\{U^k, 0 \le k \le n-1\}$, où :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ puis : } A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $(U^k)_{0 \le k \le n-1}$ est une base orthogonale de F.
b. En déduire la projection orthogonale de A sur F.

61. Soient E un espace euclidien de dimension n et : $x \neq y$, deux vecteurs de E tels que : $(x|y) = \|y\|^2$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que : $y = p_H(x)$, où p_H est la projection orthogonale de E sur H.

62. Soit p un projecteur d'un espace euclidien E.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\forall\ x \in$ E, $(p(x)|x) \geq 0$.

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

63. Soit : $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec : $\forall\ 1 \leq k \leq n-1,\ c_k.b_k > 0$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D dont le premier coefficient diagonal vaut 1 telle que : $D^{-1}.A.D$ soit symétrique réelle.

b. En déduire que A est diagonalisable.

64. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $\mu_1,...,\mu_n$ les valeurs propres de ${}^tA.A$.

a. Montrer que : $\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \mu_i \geq 0$.

b. Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$.

65. Si : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est telle que : $Sp({}^tA.A - A.{}^tA) \subset \mathbb{R}^+$, alors que A et ${}^tA$ commutent.

66. Soit A une matrice antisymétrique réelle, et B une matrice symétrique réelle, telles que : $A.B = B.A$.

a. Montrer que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t(A.X).(B.X) = 0$.

b. Montrer que : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|(A+B).X\| = \|(A-B).X\|$ ($\|\ .\ \|$ est la norme canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

c. On suppose de plus B inversible.
Montrer que $A+B$ et $A-B$ sont inversibles et que $(A+B).(A-B)^{-1}$ est orthogonale.

67. Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Etudier ${}^tX.{}^tA.A.X$ pour un vecteur propre X de ${}^tA.A$.

b. Que dire de la valeur propre correspondante si A est inversible ?

c. Retrouver le fait que l'application : $(A,B) \mapsto tr({}^tA.B)$, définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

68. Matrices symétriques positives et strictement positives.
Soit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique.
On dit que A est positive (qu'on écrit : $A \geq 0$), si et seulement si : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX.A.X \geq 0$.
A est dite strictement positive (soit : $A > 0$) si et seulement si : $\forall\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, ${}^tX.A.X > 0$.
On note $S_n^+(\mathbb{R})$, les matrices réelles positives et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices strictement positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que : $\forall\ (A,B) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^2$, $A+B \in S_n^+(\mathbb{R})$.

b. Montrer que : $\forall\ (A,B) \in S_n^+(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$, $A+B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

c. Montrer que : $\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tA.A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

d. Montrer que $\forall\ A \in Gl_n(\mathbb{R}), {}^tA.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

e. Montrer que : $\forall\ A \in Gl_n(\mathbb{R})$, $\forall\ S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, ${}^tA.S.A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Endomorphismes orthogonaux. Matrices orthogonales.

69. Soit E un espace vectoriel euclidien et f une application de E dans E telle que :

- $f(0)=0$,
- $\forall\ (x,y)\in$ E², $\|f(x)-f(y)\|=\|x-y\|$.

a. Montrer que : $\forall\ x\in$ E, $\|f(x)\|=\|x\|$.

b. A l'aide de l'identité du parallélogramme, en déduire que : $\forall\ x\in$ E, $f(-x)=-f(x)$.

c. Montrer que : $\forall\ (x,y)\in$ E², $(f(x)|f(y))=(x|y)$.

d. Si $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormale de E, montrer que : $\forall\ x\in$ E, $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(e_k|x).f(e_k)$.

e. En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E.

70. Calculer $card(O(n)\cap\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$.

71. Déterminer les matrices orthogonales dont les coefficients sont positifs ou nuls.

72. Soient : $C\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, non nulle, et : $S=I_n-\dfrac{2}{{}^tC.C}.C.{}^tC$.

Montrer que S est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la réflexion par rapport à l'hyperplan orthogonal à C.

73. Soit : $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$, une matrice définie par blocs et orthogonale, où A et D sont des matrices carrées.

En envisageant un produit matriciel par blocs, montrer que : $\det(A).\det(M)=\det(D)$.

Exercice général : polynômes de Legendre.

74. Soit : E = $\mathbb{R}$[X], et le produit scalaire classique : $(P|Q)=\int_{-1}^{1}P(t).Q(t).dt$.

On pose, par ailleurs, pour tout entier n : $Q_n=\dfrac{1}{2^n.n!}.\dfrac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$.

a. Montrer que : $\deg(Q_n)=n$, que Q_n a n racines simples dans]-1,+1[, et que : $Q_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.

b. Calculer $(Q_n|Q_n)$, $Q_n(1)$, et $Q_n(-1)$.

c. Montrer que la suite (Q_n) vérifie la ration de récurrence :

$\forall\ n\geq 2$, $n.Q_n=(2.n-1).X.Q_{n-1}-(n-1).Q_{n-2}$.

d. Montrer qu'il existe une unique famille (P_n) orthonormale telle que :

$\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\deg(P_n)=n$, $(P_n|X^n)>0$.

e. Montrer que : $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $\exists\ \lambda_n\in\mathbb{R}$, $P_{n.}=\lambda_n.Q_n$, et calculer λ_n.

f. Montrer que : $\forall$ t $\in\mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dt}[(1-t^2).P_n'(t)]+n.(n+1).P_n(t)=0$, puis calculer : $a_n=\int_0^1 P_n(t).dt$.

Isométries de $\mathbb{R}^3$.

75. On munit : E = $\mathbb{R}^3$, de son produit scalaire et de son orientation canoniques.

a. Montrer que si f et g sont deux rotations de même axe ou deux retournements d'axe orthogonaux, alors f et g commutent.

On suppose dans la suite que f et g sont deux rotations de E distinctes de id_E, qui commutent.

b. Soit u un vecteur unitaire appartenant à l'axe Δ de f.
Montrer que : $g(u)=u$, ou : $g(u)=-u$.

c. Si : $g(u)=u$, montrer que f et g sont deux rotations de même axe.

d. Si : $g(u)=-u$, montrer que f et g ont des axes orthogonaux et que ce sont des retournements.

Niveau 3.

Exercices généraux sur le produit scalaire.

76. On munit : E = $C^0([-1,+1],\mathbb{R})$, de son produit scalaire canonique, et on pose :
   - $F = \{ f \in E, \forall t \in [0,1],\ f(t)=0 \}$,
   - $G = \{ g \in E, \forall t \in [-1,0],\ g(t)=0 \}$.

   a. Montrer que : $F^\perp = G$.
   b. F et G sont-ils supplémentaires dans E ?

77. Soient E un espace préhilbertien réel et : $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, tels que :

   $$\exists\ M \in \mathbb{R},\ \forall \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\} \in \{-1,+1\}^n,\ \left\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k . x_k\right\| \le M .$$

   Montrer par récurrence que : $\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \le M^2$.

78. On munit : E = $\mathbb{R}[X]$, du produit scalaire : $\forall\ (P,Q) \in E^2,\ (P|Q) = \int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt$.

   a. Montrer que : $H = \{P \in E,\ \int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt = 0\}$, est un hyperplan de E.
   b. Montrer que : $\forall\ Q \in H^\perp,\ \int_{-1}^{+1} P(t).Q(t).dt = \left(\int_{-1}^{+1} |t|.P(t).dt\right).\left(\int_{-1}^{+1} Q(t).dt\right)$.
   c. En déduire que : $H^\perp = \{0\}$.

79. Soit E un espace vectoriel euclidien et : $u \in \mathscr{L}(E)$, tel que : $tr(u) = 0$.

   a. Montrer que si : $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$, est une base orthonormale de E, alors : $tr(u) = \sum_{i=1}^n (e_i|u(e_i))$.
   b. Montrer que : $\exists\ x \in E,\ x \ne 0,\ (x|u(x)) = 0$.
      Pour : $n \ge 2$, on pourra considérer l'application de [0,1] dans $\mathbb{R}$ définie par :
      $\forall\ t \in [0,1],\ \varphi(t) = (u(t.e_i + (1-t).e_j)|t.e_i + (1-t).e_j)$,
      pour des vecteurs e_i et e_j bien choisis et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
   c. En déduire par récurrence qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Projecteurs orthogonaux.

80. Soient E un espace euclidien muni d'une base orthonormale : $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$, F un sous-espace vectoriel muni d'une base orthonormale $(x_1,\dots,x_p)$, et p_F la projection orthogonale de E sur F

   Si on note : $\forall\ 1 \le i \le p,\ X_k = mat_{\mathscr{B}}(x_k)$, montrer que : $mat_{\mathscr{B}}(p_F) = M = \sum_{k=1}^p X_k.{}^tX_k$.

81. Soit E un espace préhilbertien réel et soit : $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, tel que : $\forall\ 1 \le i \ne j \le n,\ (x_i|x_j) < 0$.
   En raisonnant par récurrence, montrer que toute sous-famille de $n-1$ vecteurs est libre.

82. Soient Ω un ensemble fini ou dénombrable et l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.
   On appelle F l'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles sur Ω et F' l'ensemble des éléments X de F admettant un moment d'ordre 2.
   a. Montrer que : $\forall\ (X,Y) \in F'^2,\ X.Y$ admet une espérance.
   b. Montrer que F' est un sous-espace vectoriel de F.
   c. Montrer que l'application de $F' \times F'$ dans $\mathbb{R}$ donnée par : $\forall\ (X,Y) \in F'^2,\ \psi(X,Y) = E(X.Y)$,
      définit un produit scalaire si et seulement si : $\forall\ X \in F',\ \forall\ x \in X(\Omega) \setminus \{0\},\ P(X=x) > 0$.
   On suppose pour la suite que l'hypothèse précédente est satisfaite.
   Pour tout sous-espace G de F' de dimension finie, on note p_G la projection orthogonale sur G, et pour : $A \subset \Omega$, on note 1_A la fonction indicatrice de A.

Pour : $A \subset \Omega$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \Omega$, on note G_A le sous-espace vectoriel de F engendré par 1_A et 1_Ω.

d. Montrer que 1_A admet une espérance puis la calculer, et montrer que : $1_A \in F'$.
En déduire que G_A est inclus dans F' et que $(1_A, 1_{\bar{A}})$ est une base orthogonale de G_A.
Montrer que : $\forall\ B \subset \Omega$, $p_{G_A}(1_B) = P_A(B).1_A + P_{\bar{A}}(B).1_{\bar{A}}$.

Pour : $X \in F'$, non constante, on note G le sous-espace vectoriel engendré par X et 1_Ω.

e. Pour : $Y \in F'$, donner l'expression de $p_G(Y)$.

f. Montrer que $p_G(Y)$ admet une espérance puis comparer $E(P_G(Y))$ et $E(Y)$.

Procédé de Gram-Schmidt, distance à un sous-espace vectoriel.

83. Soit $(x_1,...,x_p)$ une famille libre de vecteurs de E, et : $F = Vect(x_1,...,x_p)$.
Montrer que : $\forall\ x \in$ E, $d(x,F) = \sqrt{\dfrac{Gram(x,x_1,...,x_p)}{Gram(x_1,...,x_p)}}$,
où $Gram$ désigne le déterminant de Gram d'une famille finie de vecteurs de E (voir exercice 55).

84. Montrer en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, qu'une matrice inversible réelle A s'écrit de manière unique : $A = Q.R$, où Q est orthogonale, et R une matrice triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 40).

Matrices symétriques réelles, matrices symétriques réelles positives.

85. Soient : $n \geq 2$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non symétrique, telle que : $rg(H) = 1$, et : $A = H + {}^tH$.
a. Expliquer pourquoi A est diagonalisable.
b. Montrer qu'il existe : $(U,V) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, non nulles et non proportionnelles telles que : $H = U.{}^tV$.
c. Etudier les valeurs propres et les vecteurs propres de A et retrouver le fait qu'elle est diagonalisable.

86. Si A est une matrice symétrique réelle telle que : $A^2 = A$, montrer que : $\sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}| \leq n.\sqrt{tr(A)}$.

87. On reprend les notations de l'exercice 68.
a. Pour : $p \in \mathbb{N}^*$, et : $(S_1,...,S_p) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^p$, on note : $S = \sum\limits_{k=1}^{p} S_k^2$.
Montrer que : $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer que : $(S = 0) \Leftrightarrow (\forall\ 1 \leq k \leq p,\ S_k = 0)$.
Soit : $p \geq 1$.
b. Montrer que si p est impair : $\forall\ A \in S_n(\mathbb{R})$, $\exists\ R \in S_n(\mathbb{R})$, $R^p = A$.
c. Montrer que si p est pair : $\forall\ A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists\ R \in S_n^+(\mathbb{R})$, $R^p = A$.
d. En déduire que : $\forall\ A \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists\ R \in S_n^+(\mathbb{R})$, $R^2 = A$.
Que dire de R si : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$?
e. Montrer en examinant les sous-espaces propres de R et de A que la matrice R dans la question d. est unique.

Matrices orthogonales.

88. Pour : $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on pose : $\sigma = a.b + b.c + c.a$, $S = a + b + c$, et : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.
a. Montrer que : $(A \in O(3)) \Leftrightarrow (\sigma = 0$, et : $S \in \{-1,+1\})$.
b. Montrer que : $(A \in SO(3)) \Leftrightarrow (\sigma = 0$, et : $S = 1)$.
c. Montrer que : $(A \in SO(3)) \Leftrightarrow (\exists\ k \in \left[0, \dfrac{4}{27}\right]$, tel que a,b,c sont les racines de : $P = X^3 - X^2 + k)$.