# T.D. 11a – Probabilités

**1.** © *Masse de Dirac* : soient $\Omega$ un ensemble non vide et $a \in \Omega$ fixé.
Pour toute partie $A$ de $\Omega$, on pose $P(A) = 1$ si $a \in A$, $P(A) = 0$ sinon.
Montrer que $P$ est une probabilité sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.

**2.** © *Formule de Poincaré (dite "du crible")* : étant donnés $n$ événements $A_1, \ldots, A_n$ dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, établir

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right)$$

**3.** © *Le "paradoxe" du chevalier de Méré* : est-il plus probable d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un dé, ou d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois deux dés ?

*Antoine Combaud, chevalier de Méré (1607–1684), eut avec Blaise Pascal une longue correspondance et quelques controverses qui poussèrent ce dernier à formaliser les premiers calculs de probabilités.*

**4.** © *Les dates de naissance* : sans tenir compte des années bissextiles, on suppose équiprobables les 365 dates (jour/mois) de naissance possible. Étant donnée une assemblée de $N$ personnes, quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour ?

**5.** Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance trois dés (cubiques et honnêtes), on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9, alors que 9 et 10 s'expriment tous deux de six façons distinctes comme somme de trois entiers de $[\![1, 6]\!]$.

**6.** *Marche aléatoire* : une puce se promène sur un axe gradué par les entiers relatifs. Elle se trouve initialement en 0 et, lorsqu'elle se trouve en $k$, elle saute aléatoirement vers $k-1$ ou $k+1$ avec la même probabilité $1/2$.

**a)** Quelle est la probabilité qu'elle se retrouve en 0 après $n$ sauts ?

**b)** Pour tout $k$ entre $-n$ et $n$, quelle est la probabilité qu'elle se trouve en $k$ après $n$ sauts ?

**c)** Reprendre les questions précédentes dans le cas où la puce choisit aléatoirement de rester en $k$ ou de sauter vers $k-1$ ou vers $k+1$, avec la même probabilité $1/3$.

Dans ce genre d'exercice, penser à modéliser les issues sous la forme d'un *mot* du type GDDGGGD...

**7.** On constitue une file d'attente en distribuant au hasard un rang de passage à $n$ personnes, parmi lesquelles se trouvent deux amis. Quelle est la probabilité que lesdits amis soient distants de $d$ ? Quelle est la distance la plus probable ?

**8.** *Le téléphone arabe* : $N$ personnes, numérotées de 1 à $N$, se transmettent une information avec la probabilité $p \in [0, 1]$ de la transformer en son contraire, $1-p$ de la transmettre fidèlement.
Quelle est la probabilité que la dernière personne reçoive l'information correcte ?

**9.** Un groupe de personnes comporte une proportion $p \in [0, 1]$ de tricheurs. On choisit un individu au hasard et on lui fait tirer une carte d'un jeu de 52. Si c'est un tricheur, il tire un as à coup sûr.
Quelle est la probabilité qu'il tire un as ?
Il tire un as. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

**10.** *Le problème de Monty Hall* (présentateur étasunien de jeux télévisés, durant les années 1960)
Le candidat a le choix entre 3 portes ; derrière l'une d'entre elles, une voiture de luxe, derrière les deux autres une chèvre. Dès qu'une porte est ouverte, le candidat repart avec ce qui était derrière.
Tout d'abord le candidat choisit l'une des trois portes (sans l'ouvrir), puis l'animateur (qui sait où est la voiture) ouvre l'une des deux autres portes : derrière se trouve une chèvre ! Alors le candidat peut choisir, soit de maintenir son choix initial, soit de choisir finalement la troisième porte.
Qu'a-t-il intérêt à faire ?

**11.** <u>*Le paradoxe de Bertrand*</u> : trois boîtes indiscernables contiennent chacune deux pièces, l'une contient deux pièces d'or, une autre une pièce d'or et une pièce d'argent, la dernière deux pièces d'argent.

**a)** Je ferme les yeux, choisis l'une des boîtes puis l'une des deux pièces de cette boîte. Quelle est la probabilité que la pièce restant dans la boîte soit en or ?

**b)** J'ouvre les yeux et vois que la pièce tirée est en or. Quelle est la probabilité que la pièce restant dans la boîte soit en or ?

**12.** © Vous venez de passer un test pour le dépistage d'une maladie rare, qui atteint 0,1% de la population. Hélas le test est positif et le médecin vous dit : « Chez les personnes atteintes, le test est positif dans 90% des cas ; chez les sujets sains, il est négatif dans 97% des cas ». Quelle est la probabilité que vous ayez vraiment cette maladie ?

**13.** Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, on note $p_n$ la probabilité qu'on n'ait jamais deux fois pile consécutivement durant $n$ lancers successifs d'une pièce équilibrée. Calculer $p_1$, $p_2$, $p_3$.

Établir une relation de récurrence entre $p_n$, $p_{n+1}$ et $p_{n+2}$. Montrer que $p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

**14.** Une urne contient $n$ boules blanches et $n$ boules noires. On en extrait **sans remise** $n$ boules.

Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules noires ? D'obtenir une unique boule blanche ?

**15.** Une urne contient $a$ boules rouges et $b$ boules blanches. On tire $n$ boules en remettant la boule si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est rouge.

**a)** Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule rouge ?

**b)** La deuxième boule est blanche. Quelle est la probabilité que la première ait été rouge ?

**16.** On considère trois urnes $A, B, C$ identiques : elles contiennent des boules blanches et des boules noires, avec une proportion $p$ de boules blanches.

On effectue des tirages avec remise selon le principe suivant : la première boule est tirée dans l'urne $A$ puis, si la $n$-ième boule tirée est blanche, on tire la $(n+1)$-ième dans la même urne, sinon on la tire dans l'une des deux autres urnes, choisie avec une probabilité de $1/2$.

On note $p_n$ la probabilité de l'événement "la $n$-ième boule tirée est blanche" et $a_n$ (*resp.* $b_n$, $c_n$) la probabilité de l'événement "le $n$-ième tirage est effectué dans l'urne $A$ (*resp.* $B$, $C$)".

**a)** Montrer qu'il existe une matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de $n$, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_{n+1} = MX_n \quad \text{où} \quad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**b)** En déduire l'expression de $X_n$ en fonction de $n$.

**c)** Étudier la convergence des suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$.

**17.** On lance $n$ fois une pièce équilibrée. Soit, pour tout $k$ dans $[\![0, n]\!]$, $A_k$ l'événement "on obtient pile au $k$-ième lancer". Soit $B$ l'événement "le nombre de piles obtenu est pair".

**a)** Déterminer les probabilités des événements $A_k$ et $B$.

**b)** Déterminer la probabilité $P(B|A_1 \cap \ldots \cap A_n)$.

En déduire que les événements $A_1, \ldots, A_n, B$ ne sont pas mutuellement indépendants.

**c)** Montrer que toute sous-famille de $n$ événements choisis parmi $A_1, \ldots, A_n, B$ est formée d'événements mutuellement indépendants.

**18.** <u>*Où sont les filles ?*</u> On admet que, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, la probabilité qu'une famille ait $n$ enfants vaut $\dfrac{1}{e \cdot n!}$. De plus, à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est $\dfrac{1}{2}$.

**a)** Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un enfant, la probabilité qu'elle n'ait aucun enfant.

**b)** Soit $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer la probabilité qu'une famille ait $k$ filles, sachant qu'elle a $n$ enfants.

En déduire la probabilité qu'une famille ait exactement $k$ filles.