Intégration.
Exercices 2017-2018

Niveau 1.
Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

1. Calculer les intégrales suivantes.
   - $\int_0^1 \arctan(x).dx$,
   - $\int_1^2 (\ln(2.x))^2.dx$,
   - $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{1+\cos^2(x)}.dx$,
   - $\int_0^1 (1-x^2).\arctan(x).dx$,
   - $\int_0^1 \frac{dt}{i.t+1}$.

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies.
   a. Calcul direct :
   - $(e^x-1)^2$.

   b. Intégration par parties (pour commencer) :
   - $(x^2+1).e^x.\cos(x)$,
   - $x.\ln(x)$,
   - $\ln(1+x^2)$,
   - $\sin(x).\ln(1+\sin(x))$.

   c. Changement de variable (pour commencer) :
   - $\frac{\sin^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$,
   - $3^{\sqrt{2.x+1}}$,
   - $\frac{\tan(x)}{1+\cos(x)}$.

3. Intégrales de Wallis.
   Pour : $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t).dt$, et : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t).dt$.
   a. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_n = J_n$.
   b. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, à termes strictement positifs.
   c. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ (n+2).I_{n+2} = (n+1).I_n$.
   d. Déduire de cette égalité une expression de I_n en fonction de n (avec : $n = 2.p$, ou : $n = 2.p+1$).
   e. Montrer que la suite $((n+1).I_{n+1}.I_n)$ est constante et préciser sa valeur.
   f. En déduire un équivalent de I_n à l'infini et la limite de (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

4. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que f admet une unique primitive F sur $[a,b]$ telle que : $\int_a^b F(t).dt = 0$.

5. Soit f continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$ telle que : $\int_0^1 f(t).dt = \frac{1}{2}$.
   Montrer à l'aide de la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - x$, que f admet un point fixe.

6. Soient f et g continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$, non nulles, telles que : $\int_0^1 (f^2+g^2+2.f^2g^2) = \int_0^1 2.(f+g).f.g$.
   Montrer en utilisant $(f-1)$ et $(g-1)$ que : $f = g = 1$.

7. Lemme de Lebesgue.
   Soit f une fonction de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t).\cos(n.t).dt = 0$.

8. On note : $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

   a. Avec un encadrement, montrer que (I_n) tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

   b. En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\exists\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = a + \frac{b}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

9. Soit f une fonction continue de [0,1] dans $\mathbb{R}$.

   On définit la fonction F par : $\forall\ x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^1 \min(x,t).f(t).dt$.

   a. En transformant l'écriture de F, montrer que F est de classe C^2 sur [0,1] et calculer F''.

   b. En déduire que : $\forall\ x \in [0,1],\ F(x) = \int_0^x \left(\int_u^1 f(t).dt\right).du$.

10. On note F l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}.dt$.

    a. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}.(\ln(x))^2$.

    b. En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*},\ \int_1^x \frac{\ln(x+t)}{t}.dt = \frac{1}{2}.(\ln(x))^2 + F(x)$.

11. En utilisant une fonction intermédiaire (que l'on étudiera) définie à l'aide de deux intégrales, montrer que :

    $\forall\ a \in \mathbb{R},\ \int_0^{\sin^2(a)} \arcsin(\sqrt{x}).dx + \int_0^{\cos^2(a)} \arccos(\sqrt{x}).dx = \frac{\pi}{4}$.

12. Pour f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x \sin(x-t).f(t).dt$.

    a. En linéarisant le sinus, montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ puis que :

    $\forall\ x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \int_0^x \cos(x-t).f(t).dt$.

    b. Montrer de même que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, puis qu'elle est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y''+y = f(x)$.

    c. Donner toutes les solutions de cette équation différentielle.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales généralisées.

13. Etudier à l'aide de primitives si les intégrales suivantes sont convergentes et si elles le sont, préciser leur valeur.

    - $\int_0^1 \ln(x).dx$,
    - $\int_0^{+\infty} e^{-a.x}.dx$, avec : a $\in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
    - $\int_0^{+\infty} \sin^2(x).dx$.

14. Montrer la convergence et calculer les intégrales généralisées :

    - $\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right).dt$,
    - $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}.dt$,
    - $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2}.dt$.

15. Soit : $\omega \in \mathbb{R}$.

    a. Montrer l'intégrabilité de : $t \mapsto e^{(-1+i.\omega).t}$, sur $\mathbb{R}^+$.

    b. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{(-1+i.\omega).t}.dt$, $\int_0^{+\infty} \cos(\omega.t).e^{-t}.dt$, et $\int_0^{+\infty} \sin(\omega.t).e^{-t}.dt$.

    c. Retrouver la valeur des deux dernières intégrales à l'aide d'une double intégration par parties.

16. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur : $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, pour que ces intégrales existent.

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a.(t-1)^b}$,
- $\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}.dt$,
- $\int_0^{+\infty} \frac{t^a.e^{-t}}{1+t^b}.dt$.

17. Pour : $n \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale : $I_{n+1} = \int_0^{+\infty} t^n.e^{-t}.dt$, et calculer sa valeur.

18. Soit : $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a. Déterminer l'ensemble D des valeurs de λ telles que l'intégrale : $I(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2).(1+t^\lambda)}$, converge.
   b. A l'aide du changement de variable (que l'on justifiera) : $u = \frac{1}{t}$, montrer que : $\forall \lambda \in D$, $I(\lambda) = \frac{\pi}{4}$.

19. A l'aide d'intervalles bien choisis, montrer que la fonction : $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x}$, n'est pas intégrable sur $[1,+\infty)$.
   Que peut-on dire des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}.dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}.dx$?

20. Déterminer les réels a et b de telle sorte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a.\sqrt{t+1} + b.\sqrt{t+2}).dt$ converge.
   Calculer alors sa valeur.

21. a. Montrer la convergence des intégrales : $I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$, et : $J = \int_0^{+\infty} \frac{t.dt}{1+t^3}$.
   b. Montrer que ces deux intégrales sont égales à l'aide du changement de variable : $u = \frac{1}{t}$.
   c. Calculer $(I + J)$, et en déduire leur valeur commune.
   d. Retrouver ce résultat en utilisant une décomposition en éléments simples dans la première intégrale.

22. Intégrale de Gauss.
   a. Montrer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ de : $x \mapsto e^{-x^2}$.
   On notera : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt$.
   b. Montrer que : $\forall\ u \in \mathbb{R}^+$, $1-u \le e^{-u} \le (1+u)^{-1}$.
   c. En déduire que : $\forall$ t $\in [0,\sqrt{n}]$, $\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \le e^{-t^2}$, puis que : $\forall$ t $\in \mathbb{R}^+$, $e^{-t^2} \le \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$.
   d. Soit : $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x).dx$.
   Montrer que : $\forall\ n \ge 1$, $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n.dt = \sqrt{n}.J_{2n+1}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}.J_{2n-2}$.
   e. En reprécisant un équivalent de J_n en $+\infty$ donner la valeur de I.

Propriétés de fonctions définies à l'aide d'intégrales.

23. a. Montrer que la fonction définie sur $(-\infty,0[\cup]0,1[$ par : $t \mapsto \frac{\ln(1-t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0.
   b. Montrer que : $\forall\ x \in (-\infty,0[\cup]0,+1[$, $f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}.dt$, existe, puis que f est prolongeable par continuité en 0 (on continuera à noter f le prolongement).
   c. Montrer que f est dérivable sur $(-\infty,+1[$.

d. Montrer que : $\forall\ x \in$ (-∞,+1[, $f(x)+f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=-\dfrac{1}{2}.(\ln(1-x))^2$.

24. a. Montrer que la fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{(\arctan(t))^2}$, est intégrable sur]0,1].

b. Montrer que la fonction $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{(\arctan(t))^2}$, est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. A l'aide de la question a, déterminer un équivalent de F en 0.

25. Etudier et justifier le tracé approximatif de la fonction : $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{t^2+t}{\sqrt{t^8+1}}.dt$.

Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, ou à valeurs complexes.

26. Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$?

- $f(x)=\dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$,
- $g(x)=\dfrac{e^{i.x}}{1+x^a}$, (a ∈ ℝ),
- $h(x)=e^{-x}.x^{\alpha}.\sin^3(x)$, (α ∈ ℝ).

27. Soit f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\ x>0$, $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{(x+1)^2}$.

a. Etudier l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.dx$, et en déduire $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.dx$ à l'aide d'un changement de variable.

c. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(x+1)^2}.dx$?

28. a. Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

$x \mapsto \ln(\sin(x))$, sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, et : $x \mapsto \ln(\cos(x))$, sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

On note alors : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)).dx$, et : $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x)).dx$.

b. Montrer que : $I=J$.
c. Trouver une relation non triviale entre $(I+J)$ et I, et en déduire la valeur de I.

29. a. Montrer que l'intégrale : $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+(t+i.b)^2}$, converge pour tout réel b et que c'est un nombre réel.

b. Décomposer la fraction sous l'intégrale en éléments simples dans ℂ.
c. Comment obtenir la valeur de I à l'aide de cette décomposition ?
d. En déduire I.

30. Soit f continue par morceaux de [0,+∞) dans ℂ.

a. Montrer que si f est intégrable sur [0,+∞), alors $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t).dt$ tend vers 0 quand x tend vers +∞.

b. Montrer à l'aide d'un contre-exemple que le résultat n'est plus vrai si f n'est pas intégrable sur [0,+∞).

31. Soit f continue par morceaux de [0,+∞) dans ℝ et décroissante.
A l'aide d'encadrements, montrer que si f est intégrable sur [0,+∞), alors $x.f(x)$ tend vers 0 en +∞.

On pourra penser à utiliser $\displaystyle\int_x^{2.x} f(t).dt$.

32. Soit f une fonction continue et intégrable sur [1,+∞).

On pose : $\forall\ x \geq 1,\ u(x) = \dfrac{1}{x^2}.\int_1^x f(t).dt$, et : $v(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

Montrer que u et v sont intégrables sur [1,+∞), et que : $\int_1^{+\infty} u(x).dx = \int_1^{+\infty} v(x).dx$.

33. On pose : $\forall\ a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $J_a(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-a.t}}{t}.dt$, et : $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-3.t} - e^{-t}}{t}.dt$.

a. Justifier l'existence de I.
b. Justifier l'existence de $J_a(x)$, pour tout : $a > 0$, et tout : $x > 0$.
c. Montrer que l'application ϕ définie sur ℝ par : $\forall\ t \neq 0,\ \phi(t) = \dfrac{e^{-t} - 1}{t}$, et : $\phi(0) = -1$, est continue sur ℝ.
d. En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} \int_{3.x}^{x} \dfrac{e^{-t}}{t}.dt$, puis la valeur de I.

Semi-convergence.

34. On pose : $f(x) = \dfrac{e^{i.x}}{\sqrt{x}}$, et : $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$.

a. Montrer que : $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$.
b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x).dx$.
c. Que peut-on dire de la convergence de $\int_1^{+\infty} g(x).dx$? Conclusion ?

35. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}.dx = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^2.dx$, et retrouver la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

36. Soit : $\alpha \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}.dx$ converge pour tout : $\alpha > 0$.
b. Montrer que g_α, définie par : $\forall\ x \in$ [1,+∞), $g_\alpha(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^\alpha}$, est intégrable sur [1,+∞) si et seulement si : $\alpha > 1$.

37. Pour : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2.n.t).\cos(t)}{\sin(t)}.dt$.

a. Calculer pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité $(I_{n+1} - I_n)$ et en déduire la valeur de I_n pour tout : $n \in \mathbb{N}^*$.
b. On pose, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(2.n.t)}{t}.dt$.

En utilisant le lemme de Lebesgue (voir exercices précédents), montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} [I_n - J_n] = 0$.

c. En déduire la limite de (J_n) en +∞.
d. En transformant l'écriture de J_n, en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}.dx$.

Comparaison série – intégrale.

38. Pour : $\alpha < 1$, on note f_α la fonction définie sur [1,+∞), par : $\forall\ x \geq 1,\ f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

En utilisant un encadrement par deux intégrales, déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

39. Pour : $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

40. On note f la fonction définie de [1,+∞) dans ℝ par : $\forall\ x \geq 1,\ f(x) = \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{x}$.

a. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x).dx$ est convergente.

b. Pour tout : $n \in$ ℕ*, on pose : $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t).dt - f(n)$.

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} w_n$ est absolument convergente.

c. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

<u>Niveau 2.</u>

Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

41. Soit : $\lambda \in$ ℂ, $\lambda \notin$ ℝ.

On pose : $a = \mathrm{Re}(\lambda)$, $b = \mathrm{Im}(\lambda)$.

a. Où la fonction f définie par : $\forall\ x \in$ ℝ, $f(x) = \dfrac{1}{x-\lambda}$, admet-elle des primitives ?

b. Montrer que ces primitives se mettent sous la forme : $F(x) = \ln|x-\lambda| + \arctan\left(\dfrac{x-a}{b}\right) + C$, $C \in$ ℂ.

42. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant les intervalles sur lesquels elles sont définies.

a. Fractions rationnelles ou règles de Bioche (voir fiche technique) :

- $\dfrac{1}{x.(x^2+1)^3}$,
- $\dfrac{x^2-x+1}{(x^2+4.x+5)^2}$,
- $\arctan\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$,
- $\dfrac{\cos^4(x)}{\sin^2(x)}$.

b. Racines :

- $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}$,
- $\dfrac{1}{(x+3).\sqrt{x^2-3.x+2}}$.

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

43. Soient : $a \in$ [0,1[, et f de [0,1] dans E, continue.

Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(a^n.t).dt$.

44. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans ℝ.

A l'aide de la fonction : $x \mapsto |f(x)| - f(x)$, montrer que : ($\left|\displaystyle\int_a^b f(t).dt\right| = \displaystyle\int_a^b |f(t)|.dt$) $\Leftrightarrow$ ($f \geq 0$, ou : $f \leq 0$).

45. Soient : $a < b$, et f de classe C^1 de [a,b] dans ℝ, telle que : $f(a) = 0$, et : $\forall\ x \in [a,b],\ 0 \leq f'(x) \leq 1$.

Etudier la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \left(\displaystyle\int_a^x f\right)^2 - \left(\displaystyle\int_a^x f^3\right)$, et en déduire que : $\left(\displaystyle\int_a^b f^3\right) \leq \left(\displaystyle\int_a^b f\right)^2$.

46. Soit f définie de $\mathbb{R}^+$ dans ℝ, continue telle que :

- $f \geq 0$,

- $\exists\ (T,a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{+*}$, $\forall$ t $\in [0,T]$, $f(t) \le a + b.\int_0^t f$.

  En étudiant la fonction : $t \mapsto e^{-b.t}.\left(\int_0^t f + \frac{a}{b}\right)$, montrer que : $\forall$ t $\in [0,T]$, $f(t) \le a.e^{b.t}$.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

47. Etudier les fonctions : $x \mapsto \int_x^{2.x} \frac{dt}{\sqrt{t^3+t}}$, et : $x \mapsto \int_x^{2.x} \frac{ch(t)}{t}.dt$.

Intégrales et zéros.

48. Soit f continue de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\int_0^{\pi} f(t).\sin(t).dt = \int_0^{\pi} f(t).\cos(t).dt = 0$.

   a. Montrer qu'il existe au moins une valeur a entre 0 et π où f s'annule.

   b. Avec la fonction : $x \mapsto \sin(x-a)$, montrer qu'il existe au moins deux valeurs dans $[0,\pi]$ où f s'annule.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales généralisées.

49. Etudier si les intégrales suivantes sont convergentes, et si c'est le cas, préciser leur valeur :

   - $\int_0^{\pi/2} \sin(2.x).\ln(\sin(x)).dx$,
   - $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a).(b-x)}}$, avec : a < b,
   - $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}}$.

50. Etudier si les intégrales suivantes sont convergentes, sans en calculer la valeur.

   - $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}.\sqrt{1-x^2}}$,
   - $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{\sqrt{x^5}}.dx$,
   - $\int_0^{+\infty} (\sqrt{\ln(x+1)} - \sqrt{|\ln(x)|}).dx$.

51. Etudier si les intégrales suivantes sont convergentes, sans en calculer la valeur.

   - $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3.(1-x)}}$,
   - $\int_1^{+\infty} (1+\ln(x))^{-\ln(x)}.dx$,
   - $\int_0^{+\infty} x^a.\ln(x).dx$, $a \in \mathbb{R}$.

52. Existence et valeur éventuelle des intégrales proposées.

   - $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+2}{x.(x-1).(x^2+1)}.dx$,
   - $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}.\frac{dx}{x-a}$, $a \in (-\infty,0[\cup [1,+\infty)$,
   - $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x.\sqrt[3]{x^2+1}}$.

Série numérique définie à l'aide d'une intégrale.

53. On pose, pour : $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}$, et : $v_n = \ln(n^{\frac{1}{3}}.u_n)$.

   a. Etablir l'existence de u_n, trouver une relation entre u_n et u_{n+1} , et donner la valeur de u_n pour tout n .

   b. Etudier la nature de la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$, et en déduire la nature de $\sum u_n$, $\sum(-1)^n.u_n$, et $\sum_{n\ge1} \frac{u_n}{n}$.

   c. En utilisant des sommes partielles, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}.u_n$.

Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, à valeurs complexes.

54. Etudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $f : x \mapsto \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right).\ln(x).\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

55. a. Justifier l'existence de : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}.dt$, et de : $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}.dt$, pour tout : $x > 0$.

   b. A l'aide de : $\forall\ a \in \mathbb{R}$, $\sin(3.a) = 3.\sin(a) - 4.\sin^3(a)$, montrer que : $\forall\ x > 0$, $I(x) = \frac{3}{4}.\int_x^{3.x} \frac{\sin(t)}{t^2}.dt$.

c. En déduire la valeur de I.

56. a. Pour : $0 < a < b$, réels, étudier l'intégrabilité sur]0,+∞) de : $x \mapsto \frac{e^{-a.x} - e^{-b.x}}{x}$.

b. Montrer l'égalité : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^{+*2}$, $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a.t} - e^{-b.t}}{t}.dt = \int_0^{+\infty} \ln(t).(a.e^{-a.t} - b.e^{-b.t}).dt$.

c. Montrer que : $\forall\ c \in \mathbb{R}^{+*}$, $\int_0^{+\infty} c.\ln(t).e^{-c.t}.dt$, converge et que : $\int_0^{+\infty} c.\ln(t).e^{-c.t}.dt = \int_0^{+\infty} \ln(t).e^{-t}.dt - \ln(c)$.

d. En déduire la valeur de $I(a,b)$.

e. Justifier l'existence de l'intégrale : $K = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}.dt$, et calculer sa valeur à l'aide des questions précédentes.

Semi-convergence.

57. Déterminer la nature des intégrales :

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}.\sin\left(t + \frac{1}{t}\right).dt$,
- $\int_0^{+\infty} \sin(t).\sin\left(\frac{1}{t}\right).dt$,
- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}.\sin\left(x + \frac{1}{x}\right).dx$.

58. a. A l'aide d'un développement limité en +∞, étudier l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)}.dx$.

On pourra utiliser le résultat de l'exercice 19.

b. Etudier de même l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \cos(x)}.dx$.

59. a. Etudier la nature des intégrales (dites de Fresnel) : $\int_0^{+\infty} \sin(x^2).dx$, et : $\int_0^{+\infty} \cos(x^2).dx$.

b. Etudier de même l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions correspondantes.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales généralisées.

60. a. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f où on a posé pour : $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a + 1}$.

b. Montrer que la fonction f est décroissante sur $\mathscr{D}$ et de limite nulle en +∞.

61. a. Montrer que la fonction f donnée par : $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}.dt$, est définie et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Calculer $(f(x) + f(x+1))$, pour : $x > 0$.

c. A l'aide d'encadrements, en déduire un équivalent de $f(x)$ en +∞.

d. Déterminer un équivalent de f en 0.

62. Pour x réel, on pose : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}.dt$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. En utilisant la valeur intermédiaire 1 et la relation de Chasles, montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser $f'(x)$, pour : $x > 0$.

c. Montrer que $(x.f(x))$ tend vers 0 en 0 et en +∞.

d. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x).dx$ converge et préciser sa valeur.

63. Pour : $x > 0$, de : $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$.

a. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et préciser sa dérivée.

b. Calculer : $\int_0^{+\infty} f(x).dx$.

c. Si on prolonge la fonction : $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$, sur ℝ, montrer qu'il est alors possible de définir f sur ℝ, qu'elle y reste de classe C^1 et préciser alors sa dérivée sur ℝ.

Comparaison série-intégrale.

64. Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

65. Etudier les séries de Bertrand définies par : $u_n = \dfrac{1}{n.(\ln(n))^{\alpha}}$, pour : $\alpha \in$ ℝ.

66. Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{(\ln(2))^2 + (\ln(3))^2 + ... + (\ln(n))^2}$, pour : $n \geq 2$.

67. a. Soit f une fonction d'un intervalle I de ℝ dans ℝ, continue (ou continue par morceaux), décroissante et positive, et soit : $n_0 \in I \cap$ ℕ.

On pose : $\forall\ n \geq n_0 + 1,\ w_n = \int_{n-1}^{n} \left(f(t) - f(n)\right).dt = \left(\int_{n-1}^{n} f(t).dt\right) - f(n)$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq n_0} w_n$ est convergente.

b. Retrouver le début du développement asymptotique de H_n.

68. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $\forall\ n \geq 2,\ u_n = \left(\prod\limits_{k=1}^{n} k^k\right)^{\frac{1}{n^2.\ln(n)}}$.

Sommes de Riemann.

69. a. Rappeler, pour une fonction f, définie et continue de $[a,b]$ dans ℝ ou ℂ, la définition des sommes de Riemann attachées à f et le théorème de convergence correspondant.

b. Soit f continue de [0,1] dans ℝ ou ℂ.

On pose, pour : $0 < a < 1$, et : $n \in$ ℕ*, $\sigma_n = \dfrac{1}{n}.\sum\limits_{k=0}^{\lfloor n.a \rfloor} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Montrer à l'aide d'un prolongement à [0,1] de la fonction f restreinte à $[0,a]$ que (σ_n) converge et préciser sa limite.

Autour des équations différentielles.

70. a. Résoudre l'équation différentielle : $y' - y - \ln(x) = 0$, sur]0,+∞).

b. Existe-t-il des solutions bornées ?

71. Soit α un réel strictement positif (ou un complexe de partie réelle strictement positive).
Soit f une fonction de ℝ dans ℝ (ou ℂ), telle que $(f' + \alpha.f)$ tend vers 0 en +∞.
Montrer que f tend vers 0 en +∞.

<u>Niveau 3.</u>

Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

72. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a,b) pour que les primitives de F définie par :

$F(x) = \dfrac{a.x + b}{x^3.(1+x)^2}$, soient rationnelles sur tout intervalle inclus dans ℝ où F est définie.

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

73. Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans ℂ, telle que : $\left|\int_a^b f(t).dt\right| = \int_a^b |f(t)|.dt$.

   a. Montrer que : $\exists\ (\rho,\theta) \in$ ℝ×ℝ, tel que : $\int_a^b f(t).dt = \rho.e^{i.\theta}$.

   b. On pose : $\forall\ x \in [a,b],\ g(x) = f(x).e^{-i.\theta}$.

   Montrer que : $\int_a^b g(t).dt = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t)).dt$, et en déduire que g est une fonction à valeurs réelles.

   c. Qu'en conclut-on sur f ?

74. On veut montrer que : $\forall\ P \in$ ℝ[X], on a : $\int_{-1}^1 P(t).dt = -i.\int_0^\pi P(e^{i.\theta}).e^{i.\theta}.d\theta$.

   a. Montrer qu'il suffit d'établir cette égalité pour les polynômes de la base canonique de ℝ[X].
   b. Etablir cette égalité pour les polynômes de la base canonique et conclure.

75. Soient : $n \in$ ℕ*, f_1 continue de [0,1] dans ℝ ou ℂ, et $f_2,\ldots,f_n$ définies par :

   $\forall\ x \in$ [0,1], k $\in \{2,\ldots,n\}$, $f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t).dt$.

   On suppose de plus que : $\forall\ x \in$ [0,1], $f_1(x) = \int_0^x f_n(t).dt$.

   a. Montrer que : $\forall\ x \in$ [0,1], $\forall\ 1 \le k \le n$, $M_{k,x} = \sup_{t\in[0,x]} |f_k(t)|$ existe.

   b. Montrer que : $\forall\ x \in$ [0,1], $\forall\ 1 \le k \le n$, $M_{k,x} \le \frac{x^k}{k!}.M_{1,x}$.

   c. En déduire que f_1 est nulle.

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

76. Montrer les équivalents : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{x^4+\sin^4(t)}}.dt \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}.\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}}$, et : $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}}$.

Intégrales et zéros.

77. Soit f continue de $[a,b]$ dans ℝ et n tels que : $\forall\ 0 \le k \le n$, $\int_a^b t^k.f(t).dt = 0$.

   a. Construire un polynôme admettant comme racines simples les éléments de $[a,b]$ où f s'annule en changeant de signe.
   b. En déduire que f admet dans $]a,b[$ au moins $n+1$ zéros distincts.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales généralisées.

78. Etudier si les intégrales suivantes sont convergentes, sans en calculer la valeur :

   - $\int_1^{+\infty} e^{-(\ln(x))^a}.dx$, $a \in$ ℝ,
   - $\int_1^{+\infty} x^{-2(x-\lfloor x\rfloor)}.dx$.

79. Existence et valeur éventuelle des intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{2.\arctan(x)-\pi}{2\sqrt{x}}.dx$ et $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}.(1-x)^{3/2}}.dx$.

80. Soit f continue sur ℝ admettant en +∞ et – ∞ des limites L et L'.

   Etudier et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+1)-f(x)).dx$.

Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, à valeurs complexes.

81. Soient a,b des réels strictement positifs.

   a. Montrer que : $x \mapsto \frac{\cos(a.x)-\cos(b.x)}{x}$, est intégrable sur]0,1].

b. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du$.

c. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x}.dx$.

82. a. A l'aide des intervalles du type $[n.\pi, (n+1).\pi]$, étudier l'intégrabilité sur ℝ⁺ de $f : x \mapsto \frac{x}{1 + x^6.\sin^2(x)}$.

b. La fonction f admet-elle une limite en +∞ ?
Est-elle bornée sur ℝ⁺ ?
Conclusion ?

83. Soit f de [1,+∞) dans ℝ⁺*, continue, telle que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = L \in [0,1[$.

Montrer que f est intégrable sur [1,+∞).

Etude de limites.

84. Pour : $f \in$ C⁰([0,1],ℂ), montrer que : $\lim_{x\to 0} x.\int_x^1 \frac{1}{t^2}.f(t)dt = f(0)$.

85. Soit f continue par morceaux de ℝ⁺ dans ℂ, telle que f admette une limite L en +∞.

Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt = L$.

Comparaison série-intégrale.

86. Déterminer : $\lim_{\substack{a\to 1 \\ >}} [(x-1).\zeta(x)]$, où ζ est la fonction zêta de Riemann, définie par : $\forall\ x > 1,\ \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

87. a. Déterminer la nature de la série de terme général : $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n^\alpha}$, pour : $1 \le k \le n$, et : α ∈ ℝ.

b. Même question pour la série de terme général $(-1)^n.u_n$.

88. Montrer que : $\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2}$.

89. On note : $u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})...(1+\sqrt{n})}$, pour : $1 \le k \le n$.

Donner un équivalent de u_n en +∞ (il restera une constante qu'on ne demande pas de préciser).

Autour des équations différentielles.

90. Soit f de ℝ⁺ dans ℝ, monotone, C¹ sur ℝ⁺, admettant une limite finie en +∞ et soit : (E) $y'' + y = f(x)$.

a. Donner la forme générale des solutions de (E) sur ℝ⁺.
On pourra utiliser l'exercice 12.

b. Montrer que toute solution de (E) sur ℝ⁺ est bornée.

c. Montrer que (E) admet une unique solution y_1 ayant une limite finie en +∞.

d. Ecrire y_1 à l'aide d'une intégrale.