Intégration (corrigé niveau 3).

Calculs d'intégrales sur un segment et de primitives.

72. On peut penser à calculer une primitive de F mais tout n'est pas nécessaire.

F admet des primitives sur (-∞,-1[,]-1,0[et]0,+∞) et pour les obtenir on peut penser à une décomposition en éléments simples de la forme : $F(x) = 0 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \frac{\delta}{x+1} + \frac{\varepsilon}{(1+x)^2}$.

Les valeurs de a et b cherchées sont celles pour lesquelles : $\alpha = \delta = 0$.

En regroupant tous les termes et en identifiant les coefficients (égalité de deux fractions), on obtient :

$\gamma = b$,

$\beta + 2.\gamma = a$, soit : $\beta = a - 2.b$,

$\alpha + 2.\beta + \gamma = 0$, soit : $\alpha = -2.a + 3.b$,

$\alpha + \delta = 0$, soit : $\delta = -\alpha$.

Autrement dit, F admet des primitives rationnelles si et seulement si : $2.a = 3.b$.

Remarque :

• il n'est pas étonnant de trouver une droite de fonctions ($F(x) = \lambda.\frac{3.x+2}{x^3.(x+1)^2}$), car si une fonction a cette propriété, toute fonction proportionnelle l'a encore.

• on peut d'ailleurs calculer une primitive de la fonction : $\int \frac{3.x+2}{x^3.(x+1)^2}.dx = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Propriétés de l'intégrale sur un segment.

73. a. Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, l'intégrale (qui existe puisque f est continue sur le segment $[a,b]$) est un nombre complexe.

S'il est nul, on peut prendre : $\rho = \theta = 0$, sinon, ρ est le module de l'intégrale, θ un de ses arguments.

b. g est encore une fonction à valeurs complexes.

Or : $\int_a^b g(t).dt = \int_a^b f(t).e^{-i.\theta}.dt = e^{-i.\theta}.\int_a^b f(t).dt = \rho = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t)).dt + i.\int_a^b \mathrm{Im}(g(t)).dt$,

et puisque les deux intégrales qui apparaissent sont réelles, on en déduit que :

$\int_a^b \mathrm{Im}(g(t)).dt = 0$, puis : $\int_a^b g(t).dt = \int_a^b \mathrm{Re}(g(t)).dt = \rho$.

Mais de plus : $\left|\int_a^b f(t).dt\right| = \int_a^b |f(t)|.dt$, donc : $\int_a^b |g(t)|.dt = \int_a^b |f(t)|.dt = |\rho| = \varepsilon.\rho$, où : a,b.

D'où : $\int_a^b [|g(t)| - \varepsilon.\mathrm{Re}(g(t))].dt = 0$, mais la fonction dans l'intégrale, est continue sur [a,b], réelle et positive, donc elle est nulle sur $[a,b]$, et : ∀ t ∈ $[a,b]$, $\mathrm{Re}(g(t)) = \varepsilon.|g(t)|$,

et finalement : $g(t) = \varepsilon.|g(t)|$.

Donc g est bien à valeurs réelles.

c. On en déduit que : ∃ $\theta \in \mathbb{R}$, ∃ $g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$, $f = e^{i.\theta}.g$.

74. a. Puisque l'intégrale sur un segment est linéaire sur les fonctions continues, et que tout polynôme est combinaison linéaire des monômes de la base canonique, il suffit effectivement d'établir cette formule sur les monômes de la base canonique.

b. Soit maintenant : $n \in \mathbb{N}$.

Alors : $\int_{-1}^1 t^n.dt == \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{n+1}.(1+(-1)^n)$, et :

$$-i.\int_0^\pi (e^{i.\theta})^n.e^{i.\theta}.d\theta = -i.\int_0^\pi e^{i.(n+1).\theta}.d\theta = \left[-\frac{e^{i.(n+1).\theta}}{n+1}\right]_0^\pi = \frac{1}{n+1}.(-e^{i.(n+1).\pi}+1) = \frac{1}{n+1}.(1+(-1)^n),$$

d'où l'égalité voulue.

On la déduit pour tout polynôme P, par linéarité.

Remarque : le théorème de densité de Weierstrass permet de l'étendre à toute fonction continue sur [-1,1].

75. Soient : $n \in \mathbb{N}^*$, f_1 continue de [0,1] dans ℝ ou ℂ, et $f_2,\dots,f_k$ définies par :

$\forall\ x \in [0,1],\ k \in \{2,\dots,n\},\ f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t).dt$.

On suppose de plus que : $\forall\ x \in [0,1],\ f_1(x) = \int_0^x f_n(t).dt$.

a. Il est immédiat par récurrence que toutes les fonctions f_k sont continues sur [0,1] et donc :

$\forall\ x \in [0,1],\ \forall\ 1 \le k \le n,\ M_{k,x} = \sup\limits_{t\in[0,x]} \left|f_k(t)\right|$ existe.

b. Là encore on raisonne par récurrence.
Le résultat demandé est immédiat pour : $k = 1$.
Supposons le vrai pour : $1 \le k < n$, fixé.

Alors : $\forall\ x \in [0,1],\ \forall\ 0 \le y \le x$, on a : $\left|f_{k+1}(y)\right| = \left|\int_0^y f_k(t).dt\right| \le \int_0^y \left|f_k(t)\right|.dt \le \int_0^y M_{k,t}.dt \le \int_0^y M_{1,t}.\frac{t^k}{k!}dt$,

d'où : $\left|f_{k+1}(y)\right| \le \int_0^y M_{1,x}.\frac{t^k}{k!}dt = M_{1,x}.\frac{y^{k+1}}{(k+1)!} \le M_{1,x}.\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$,

puisque : $\forall$ t $\in [0,y],\ M_{1,t} \le M_{1,x}$.

On en déduit que : $M_{k+1,x} = \sup\limits_{y\in[0,x]} \left|f_k(y)\right| \le \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.M_{1,x}$, ce qui termine la récurrence.

c. En reprenant la démarche précédente en l'appliquant à f_n, on en déduit que :

$\forall\ x \in [0,1],\ M_{1,x} = "M_{n+1,x}" = \sup\limits_{y\in[0,x]} \left|f_1(y)\right| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.M_{1,x}$.

Or : $\forall\ x \in [0,1],\ 0 \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 1$, donc : $M_{1,x} = 0$,

donc : $0 \le f_1(x) \le M_{1,x} = 0$, et f_1 est nulle sur [0,1].

Fonctions définies à l'aide d'intégrales.

76. • Pour x non nul, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{x^4+\sin^4(t)}}.dt$ est une intégrale sur un segment et existe puisque la fonction sous l'intégrale est définie et continue sur ce segment.

En effectuant le changement de variable : $u = \frac{\sin(t)}{x}$, on obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{x^4+\sin^4(t)}}.dt = \frac{1}{x}.\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$.

Enfin, lorsque x tend vers 0^+, on constate que $\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$, qui est une intégrale généralisée convergente.

En effet, la fonction sous l'intégrable est continue, positive, non nulle en 0, et : $\frac{1}{\sqrt{1+u^4}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^2}$.

Finalement, on a bien : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{\sqrt{x^4+\sin^4(t)}}.dt \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}.\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^4+1}}$.

• Un raisonnement identique donne l'existence de $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^3}}$, pour : $x \ge 1$.

Puis le changement de variable : $t = u.\sqrt[3]{x^2}$, donne : $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}.\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}}$.

Enfin, lorsque x tend vers $+\infty$, $\int_{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}}^{\sqrt[3]{x}} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}}$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}}$, puisque cette dernière intégrale est convergente (la fonction sous l'intégrale est définie, continue et positive sur [0,+∞) et : $\frac{1}{\sqrt{u^3+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$).

Enfin, elle est strictement positive pour les mêmes raisons qu'au-dessus.

Finalement, on a bien : $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{x^2+t^3}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u^3+1}}$.

Intégrales et zéros.

77. L'exercice formulé ainsi est maladroit car on ne sait pas répondre en l'état à la première question.

a. Supposons que f admette moins de $n+1$ zéros distincts (éventuellement aucun) dans $[a,b]$.

Notons alors : $a_1 < ... < a_p$, les valeurs où f s'annule en changeant de signe.

On a donc : $0 \leq p \leq n$.

On peut supposer par ailleurs (quitte à changer f en $-f$) que f est positive sur $[a,a_1]$, négative sur $[a_1,a_2]$, … et de signe $(-1)^k$ sur $[a_k,a_{k+1}]$, et enfin de signe $(-1)^p$ sur $[a_p,b]$.

On pose alors : $P=(a_1-X)...(a_p-X)$, et ce polynôme répond à la question.

b. Puisque P est de degré p inférieur à n, on a alors par linéarité : $\int_a^b P(t).f(t).dt = 0$.

Mais de plus, $P(t)$ est positif pour : $t \leq a_1$, puis change de signe au passage de chaque valeur a_k.

Donc P et f ont même signe sur $[a,a_1]$, $[a_1,a_2]$, …, $[a_p,b]$, et : $P.f \geq 0$.

Ce produit est alors continu sur $[a,b]$, positif sur $[a,b]$ et d'intégrale nulle sur $[a,b]$.

On en déduit que : $P.f=0$.

Or P ne s'annule qu'aux points $a_1,...,a_p$, donc f s'annule en dehors de ces points, ce qui est contradictoire avec le fait que s'annule qu'en un nombre de points inférieur à n.

Conclusion de ce raisonnement par l'absurde : f s'annule sur $[a,b]$ en au moins $n+1$ points distincts.

Convergence et calcul éventuel d'intégrales impropres.

78. • Pour cette première intégrale, la fonction sous l'intégrale est définie, continue, positive sur]1,+∞).

Suivant la valeur de a, quand x tend vers 1, $(\ln(x))^a$ tend vers 0 ($a>0$), 1 ($a=0$) ou +∞ ($a<0$).

Dans les trois cas, la fonction : $x \mapsto e^{-(\ln(x))^a}$, se prolonge par continuité en 1 avec la valeur 1 (si : $a>0$), avec e (si : $a=0$) et avec 0 (si : $a<0$).

Donc l'intégrale $\int_1^e e^{-(\ln(x))^a}.dx$ est convergente pour toute valeur de a.

Puis en +∞ :

si : $a<0$, $(\ln(x))^a$ tend vers 0, la fonction sous l'intégrale tend vers 1, limite finie non nulle en +∞ et l'intégrale $\int_e^{+\infty} e^{-(\ln(x))^a}.dx$ diverge.

si : $a=0$, $(\ln(x))^a$ tend vers 1, et pour la même raison, l'intégrale diverge.

si : $a>0$, et : $a<1$, alors : $x.e^{-(\ln(x))^a} = \exp(-(\ln(x))^a + \ln(x)) = \exp(\ln(x).[1-(\ln(x))^{a-1}])$.

or le crochet tend vers 1 (car : $a-1<0$), et le produit proposé tend vers +∞,

donc : $\exists\ A>e$, $\forall\ x \geq A$, $1 \leq x.e^{-(\ln(x))^a}$, et : $\frac{1}{x} \leq e^{-(\ln(x))^a}$,

d'où par comparaison de fonctions à valeurs positives, la divergence de l'intégrale $\int_e^{+\infty} e^{-(\ln(x))^a}.dx$.

si : $a=1$, l'intégrale étudiée se ramène à $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x}$, et diverge.

si : $a>1$, on peut écrire : $x^2.e^{-(\ln(x))^a} = \exp(-(\ln(x))^a + 2.\ln(x)) = \exp(\ln(x).[2-(\ln(x))^{a-1}])$,

et le crochet cette fois tend vers -∞ ($a-1>0$), donc l'ensemble tend vers 0 et l'intégrale $\int_e^{+\infty} e^{-(\ln(x))^a}.dx$ converge.

Finalement l'intégrale proposée converge si et seulement si : $a>1$.

• la fonction sous l'intégrale est définie, continue par morceaux, positive sur [1,+∞).
On va montrer que l'intégrale diverge et pour cela :

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in \left[n, n+\dfrac{1}{4}\right[$, on a : $\lfloor x \rfloor = n$, puis : $0 \leq 2.(x - \lfloor x \rfloor) \leq \dfrac{1}{2}$, et : $x^{-2(x-\lfloor x \rfloor)} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Puis : $\displaystyle\int_n^{n+\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2.\sqrt{x}\right]_n^{n+\frac{1}{4}} = 2.\sqrt{n+\frac{1}{4}} - 2.\sqrt{n} = 2.\sqrt{n}.\left(\left(1+\frac{1}{4.n}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{4.\sqrt{n}}$.

On a enfin : $\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_1^{n+1} x^{-2(x-\lfloor x \rfloor)}.dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} x^{-2(x-\lfloor x \rfloor)}.dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+\frac{1}{4}} x^{-2(x-\lfloor x \rfloor)}.dx \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

La minoration intermédiaire vient du fait que la fonction est positive.
Puis si on note u_k le terme général qui apparaît dans la dernière somme, c'est le terme général d'une série positive et cette série diverge, du fait de l'équivalent qu'on a trouvé précédemment.
Autrement dit $\displaystyle\int_1^{n+1} x^{-2(x-\lfloor x \rfloor)}.dx$ est minorée par une somme partielle de série positive et divergente, ce qui montre que l'intégrale tend vers +∞ quand n tend vers +∞, et finalement, l'intégrale est donc divergente.

79. Malgré le fait qu'il faille calculer les intégrales, on peut garantir au départ leur existence.
Pour cela dans les deux cas, les fonctions concernées sont définies, continues et négatives sur les intervalles ouverts correspondants.
Pour la première intégrale, on a :

• $\dfrac{2.\arctan(x) - \pi}{2\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} \dfrac{-\pi}{2\sqrt{x}}$, ce qui garantit la convergence de l'intégrale en 0, et :

• $\forall\ x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{2\arctan(x) - \pi}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-1}{\sqrt{x}}.\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}$,

ce qui donne la convergence de l'intégrale en +∞.
Pour la deuxième intégrale :

• $x^{\frac{2}{3}}.\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}.(1-x)^{3/2}} \underset{0}{\sim} x^{\frac{1}{6}}.\ln(x) \xrightarrow[0]{} 0$, ce qui garantit la convergence de cette intégrale en 0, et :

• $\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}.(1-x)^{3/2}} \underset{1}{\sim} -\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$, ce qui garantit la convergence en 1.

Calculons maintenant des primitives :

$$F(x) = \int \frac{2\arctan(x) - \pi}{2\sqrt{x}}.dx = (2.\arctan(x) - \pi).\sqrt{x} - \int \frac{2.\sqrt{x}}{1+x^2}.dx = (2.\arctan(x) - \pi).\sqrt{x} - \int \frac{4.u^2}{1+u^4}.du,$$

avec le changement de variable : $u = \sqrt{x}$.
Une décomposition en éléments simples et quelques calculs donnent alors :

$\displaystyle\int \frac{4.u^2}{1+u^4}.du = \frac{1}{\sqrt{2}}.\ln\left(\frac{u^2 - u.\sqrt{2}+1}{u^2 + u.\sqrt{2}+1}\right) + \sqrt{2}.\arctan(u.\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}.\arctan(u.\sqrt{2}-1) + C$, (avec : $u = \sqrt{x}$).

Enfin, il nous faut les limites de F (pour : $C = 0$) en 0 et +∞, soit :

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\pi.\sqrt{2}$, et : $\displaystyle\lim_{x \to 0} F(x) = 0$, d'où finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2\arctan(x) - \pi}{2\sqrt{x}}.dx = -\pi.\sqrt{2}$.

Pour la deuxième :

$\displaystyle G(x) = \int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}.(1-x)^{3/2}}.dx = \int \frac{4.\ln(u)}{(1-u^2)^{3/2}}.du$, avec le changement de variable : $u = \sqrt{x}$.

Ici un petit calcul intermédiaire pour procéder à une intégration par partie :

$$\int \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{u^2.du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{(u^2-1+1).du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}} - \int \frac{1.du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où : $\displaystyle\int \frac{du}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Donc : $\displaystyle G(x) = \int \frac{4.\ln(u)}{(1-u^2)^{3/2}}.du = \frac{4.u.\ln(u)}{(1-u^2)^{1/2}} - 4.\int \frac{du}{(1-u^2)^{1/2}} = \frac{4.u.\ln(u)}{(1-u^2)^{1/2}} - 4.Arc\sin(u) + C$, (où : $u = \sqrt{x}$).

Enfin, les limites de G (pour : $C = 0$) en 0 et 1 valent :

$\lim\limits_{x\to 1} G(x) = -2.\pi$ (en revenant à x et avec un équivalent), et : $\lim\limits_{x\to 1} G(x) = 0$.

Finalement : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}.(1-x)^{3/2}}.dx = -2.\pi$.

80. On va montrer la convergence de l'intégrale et calculer simultanément sa valeur.
On peut écrire :

$\displaystyle\forall\ x \in \mathbb{R}, \int_0^x (f(t+1) - f(t)).dt = \int_0^x f(t+1).dt - \int_0^x f(t).dt = \int_1^{x+1} f(t).dt - \int_0^x f(t).dt = \int_x^{x+1} f(t).dt - \int_0^1 f(t).dt$.

Or f tend vers L en $+\infty$, donc :

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ A \geq 0, \forall\ t \geq A, |f(t) - L| \leq \varepsilon$, et donc :

$\displaystyle\forall\ x \geq A, \left|\int_x^{x+1} f(t).dt - L\right| = \left|\int_x^{x+1} [f(t) - L].dt\right| \leq \int_x^{x+1} |f(t) - L|.dt \leq \varepsilon.1 = \varepsilon$.

Autrement dit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t).dt = L$, et : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (f(t+1) - f(t)).dt = L - \int_0^1 f(t).dt$.

On montre de façon tout à fait similaire que : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \int_0^x (f(t+1) - f(t)).dt = L' - \int_0^1 f(t).dt$.

Finalement, il y a bien convergence de l'intégrale (une primitive de la fonction sous l'intégrale a des limites finies en $\pm\infty$) et : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+1) - f(x)).dx = L - L'$.

Intégrabilité de fonctions de signe quelconque, à valeurs complexes.

81. a. La fonction proposée est définie et continue sur]0,1].

De plus : $\displaystyle\forall\ x \in\ ]0,1],\ \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x} = \frac{1}{x}.\left(1 - \frac{(a.x)^2}{2} - \left(1 - \frac{(b.x)^2}{2}\right) + o_0(x^2)\right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.x + o_0(x)$,

et cette fonction est prolongeable par continuité en 0 puisque : $\displaystyle\lim_{x\leftarrow 0} \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x} = 0$.

Donc elle est intégrable sur]0,1].

b. Là encore, la fonction sous l'intégrale est définie et continue sur [0,+∞).

Puis (comme pour l'intégrale de Dirichlet) :

$\displaystyle\forall\ A \geq 1, \int_1^A \frac{\cos(u)}{u}.du = \left[\frac{\sin(u)}{u}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\sin(u)}{u^2}.du = \frac{\sin(A)}{A} - \sin(1) + \int_1^A \frac{\sin(u)}{u^2}.du$.

La partie intégrée admet une limite finie ($-\sin(1)$) en $+\infty$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^2}.du$ est absolument convergente car : $\displaystyle\forall\ u \geq 1, \left|\frac{\sin(u)}{u^2}\right| \leq \frac{1}{u^2}$.

Donc : $\displaystyle A \mapsto \int_1^A \frac{\cos(u)}{u}.du$, admet une limite finie quand A tend vers $+\infty$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du$ converge.

c. On peut alors écrire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x}.dx = \int_0^1 \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x}.dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x}.dx$.

Puis : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(a.x) - \cos(b.x)}{x}.dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(a.x)}{x}.dx - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(b.x)}{x}.dx$,

car les deux intégrales convergent.

Et : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(a.x)}{x}.dx = \int_a^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u}.du$, avec le changement de variable bijectif et de classe C^1 : $u = a.x$.

On en déduit (avec la même transformation pour b) :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(a.x)-\cos(b.x)}{x}.dx=\int_a^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}.du-\int_b^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u}.du=\int_a^b\frac{\cos(u)}{u}.du.$$

D'autre part : $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(a.x)-\cos(b.x)}{x}.dx=\int_0^1\frac{\cos(a.x)-1}{x}.dx-\int_0^1\frac{\cos(b.x)-1}{x}.dx$.

En effet, les deux intégrales convergent car la fonction sous la première intégrale est définie, continue sur]0,1], et prolongeable par continuité en 0, puisque (comme pour la question a) :

$$\forall\ x\in\ ]0,1],\ \frac{\cos(a.x)-1}{x}=\frac{1}{x}.\left(1-\frac{(a.x)^2}{2}+o_0(x^2)-1\right)=\frac{-a^2}{2}.x+o_0(x),\text{ et : }\lim_{x\to0}\frac{\cos(a.x)-1}{x}=0.$$

Enfin : $\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(a.x)-1}{x}.dx=\int_0^a\frac{\cos(u)-1}{u}.du$, avec le même changement de variable : $u=a.x$, et :

$$\int_0^1\frac{\cos(a.x)-\cos(b.x)}{x}.dx=\int_0^a\frac{\cos(u)-1}{u}.du-\int_0^b\frac{\cos(u)-1}{u}.du=-\int_a^b\frac{\cos(u)}{u}.du+\int_a^b\frac{du}{u}.$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos(a.x)-\cos(b.x)}{x}.dx=-\int_a^b\frac{\cos(u)}{u}.du+\int_a^b\frac{du}{u}+\int_a^b\frac{\cos(u)}{u}.du=[\ln(u)]_a^b=\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

82. a. Comme proposé, soit : $n\in\mathbb{N}$, et : $\displaystyle I_n=\int_{n.\pi}^{(n+1).\pi}\left|\frac{x}{1+x^6.\sin^2(x)}\right|.dx$.

Alors : $\displaystyle\forall\ n\in\mathbb{N},\ 0\le I_n\le\int_{n.\pi}^{(n+1).\pi}\frac{(n+1).\pi}{1+(n.\pi)^6.\sin^2(x)}.dx=(n+1).\pi.\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+(n.\pi)^6.\sin^2(t)}$,

(avec le changement de variable : $x=t+n.\pi$), puis les règles de Bioche proposent d'utiliser le second changement de variable : $u=\tan(t)$, avec lequel il faut toujours être prudent.

On écrit ainsi : $\displaystyle 0\le I_n\le2.(n+1).\pi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{1+(n.\pi)^6.\sin^2(t)}=2.(n+1).\pi.\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(1+(n.\pi)^6).u^2}$.

Enfin, avec par exemple le changement de variable : $v=u.\sqrt{1+(n.\pi)^6}$, on obtient :

$$0\le I_n\le\frac{2.(n+1).\pi}{\sqrt{1+(n.\pi)^6}}.\int_0^{+\infty}\frac{dv}{1+v^2}=\frac{(n+1).\pi^2}{\sqrt{1+(n.\pi)^6}}=a_n.$$

On constate alors que la série $\sum a_n$ est convergente, puisque à termes positifs et vérifiant : $a_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{\pi.n^2}$.

Enfin : $\displaystyle\forall\ A\in\mathbb{R}^+,\ F(A)=\int_0^A\frac{x}{1+x^6.\sin^2(x)}.dx\le\int_0^{\lfloor A\rfloor+1}\frac{x}{1+x^6.\sin^2(x)}.dx\le\sum_{k=0}^{\lfloor A\rfloor}a_k\le\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$.

Donc la primitive F de $|f|$ étudiée est croissante et majorée sur $\mathbb{R}^+$, donc admet une limite finie en +∞.

Conclusion : la fonction proposée est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b. On constate par ailleurs que :

$\forall\ n\in\mathbb{N},\ f(n.\pi)=n.\pi$, et $(f(n.\pi))$ tend vers +∞,

$$\forall\ n\in\mathbb{N},\ f(n.\pi+\frac{\pi}{2})=\frac{n.\pi+\frac{\pi}{2}}{1+(n.\pi+\frac{\pi}{2})^6}\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{(n.\pi)^5},\text{ et }(f(n.\pi+\frac{\pi}{2}))\text{ tend vers }0.$$

La fonction f n'admet donc pas de limite en +∞, et f n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c. On peut donc trouver des fonctions C^∞, intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et qui prenne au voisinage de l'infini des valeurs aussi grandes qu'on veut.

83. Soit : $L<C<1$, et : $\varepsilon=C-L>0$.

Alors : $\exists\ A\ge1,\ \forall\ x\ge A,\ \left|\dfrac{f(x+1)}{f(x)}-L\right|\le\varepsilon$, et donc : $f(x+1)\le(L+\varepsilon).f(x)=C.f(x)$.

Soit maintenant : $n_0\in\mathbb{N},\ n_0\ge A$, et : $k\in\mathbb{N}^*$.

Alors : $\displaystyle\int_{n_0+k}^{n_0+k+1}|f(t)|.dt=\int_{n_0+k}^{n_0+k+1}f(t).dt=\int_{n_0+k-1}^{n_0+k}f(u+1).du\le C.\int_{n_0+k-1}^{n_0+k}f(u).du\le C^k.\int_{n_0}^{n_0+1}f(u).du$, la dernière inégalité s'obtenant par récurrence sur k (et elle est valable aussi pour : $k=0$).

Donc : $\forall\ p \in \mathbb{N}^*,\ F(n_0+p)=\int_{n_0}^{n_0+p}|f(t)|.dt=\sum_{k=0}^{p-1}\int_{n_0+k}^{n_0+k+1}|f(t)|.dt \leq \int_{n_0}^{n_0+1} f(u).du.\sum_{k=0}^{p-1} C^k \leq \frac{1}{1-C}.\int_{n_0}^{n_0+1} f(u).du$.

D'où : $\forall\ x \geq n_0,\ F(x)=F(n_0+x-n_0) \leq F(n_0+E(x-n_0)+1) \leq \frac{1}{1-C}.\int_{n_0}^{n_0+1} f(u).du$.

F est donc croissante sur $[n_0,+\infty)$, et elle est majorée sur $[n_0,+\infty)$ donc elle admet une limite finie en $+\infty$, et f est intégrable sur $[1,+\infty)$.

Etude de limites.

84. On a tout d'abord :

$$\forall\ x \in\ ]0,1],\ \int_x^1 \frac{1}{t^2}.f(t).dt=\int_x^1 \frac{1}{t^2}.[f(t)-f(0)].dt+f(0).\int_x^1 \frac{1}{t^2}.dt=\int_x^1 \frac{1}{t^2}.[f(t)-f(0)].dt+f(0).\left(\frac{1}{x}-1\right),$$

d'où : $x.\int_x^1 \frac{1}{t^2}.f(t).dt=x.\int_x^1 \frac{1}{t^2}.[f(t)-f(0)].dt+f(0).(1-x)$.

Le deuxième terme de la somme tend clairement vers $f(0)$ quant x tend vers 0.

Montrons maintenant que le premier terme tend vers 0 quand x tend vers 0 et pour cela, soit : $\varepsilon > 0$.

Puisque f tend vers $f(0)$ en 0, on sait que :

$$\exists\ \alpha > 0,\ \forall\ 0 < t \leq \alpha,\ |f(t)-f(0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc : $\forall\ 0 < x \leq \alpha$, $\left|\int_x^1 \frac{1}{t^2}.[f(t)-f(0)].dt\right| \leq \int_x^1 \frac{1}{t^2}.|f(t)-f(0)|.dt \leq \int_\alpha^1 \frac{1}{t^2}.|f(t)-f(0)|.dt+\frac{\varepsilon}{2}.\int_x^\alpha \frac{1}{t^2}.dt$,

soit : $\left|x.\int_x^1 \frac{1}{t^2}.[f(t)-f(0)].dt\right| \leq x.C+x.\frac{\varepsilon}{2}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right) \leq C.x+\frac{\varepsilon}{2}$, avec : $C=\int_\alpha^1 \frac{1}{t^2}.|f(t)-f(0)|.dt$.

Et comme C est constant : $\exists\ \alpha' > 0,\ \forall\ 0 < x \leq \alpha',\ |C.x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement : $\forall\ 0 < x \leq \min(\alpha,\alpha')$, $\left|x.\int_x^1 \frac{1}{t^2}.[f(t)-f(0)].dt\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$,

ce qui prouve bien que le premier terme évoqué tend vers 0 quand x tend vers 0.

Finalement, on a donc bien : $\lim_{x\to 0} x.\int_x^1 \frac{1}{t^2}.f(t)dt=f(0)$.

85. On considère : $\varepsilon > 0$.

Puisque f tend vers 0 en $+\infty$, on sait que :

$\exists\ A > 0,\ \forall\ t \geq A,\ |f(t)-L| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, et :

$$\forall\ x \geq A,\ \left|\frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt-L\right|=\frac{1}{x}.\left|\int_0^x [f(t)-L].dt\right| \leq \frac{1}{x}.\int_0^x |f(t)-L|.dt=\frac{1}{x}.\int_0^A |f(t)-L|.dt+\frac{1}{x}.\int_A^x |f(t)-L|.dt.$$

D'où : $\left|\frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt-L\right| \leq \frac{1}{x}.C+\frac{1}{x}.\frac{\varepsilon}{2}.\int_A^x dt=\frac{C}{x}+\frac{1}{x}.\frac{\varepsilon}{2}.(x-A) \leq \frac{C}{x}+\frac{\varepsilon}{2}$, avec : $C=\int_0^A |f(t)-L|.dt$.

Puis C étant constant, on sait que : $\exists\ A' > 0,\ \forall\ x \geq A',\ \left|\frac{C}{x}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'où : $\forall\ x \geq \max(A,A')$, $\left|\frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt-L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

On vient de démontrer que : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}.\int_0^x f(t).dt=L$.

Remarques :

- l'exercice précédent se relie à celui-ci via le changement de variable : $u=\frac{1}{t}$.

• la résolution de ces deux exercices est formellement la même que celle du théorème de Cesaro pour les suites.

Comparaison série-intégrale.

86. La fonction : $t \mapsto \frac{1}{t^x}$, est décroissante sur [1,+∞), pour : $x > 1$, donc (toutes les quantités qui apparaissent étant convergentes), on en déduit :

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$, la valeur 1 venant du fait qu'on met : $n = 1$, à part, lors de la majoration.

Donc : $\forall\ x > 1$, $\frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$, d'où : $1 \leq (x-1).\zeta(x) \leq (x-1)+1$, et :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} [(x-1).\zeta(x)] = 1$.

87. a. En utilisant la fonction continue, croissante définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$, on a classiquement :

$\forall\ n \geq 1$, $\int_0^n \sqrt{t}.dt \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{t}.dt$.

Or : $\int_0^n \sqrt{t}.dt = \frac{2}{3}.n^{\frac{3}{2}}$, d'où on déduit que : $S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}.n^{\frac{3}{2}}$, puisque : $\int_1^{n+1} \sqrt{t}.dt = \frac{2}{3}.((n+1)^{\frac{3}{2}} - 1) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}.n^{\frac{3}{2}}$.

Donc : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{3}.n^{\frac{3}{2}-\alpha}$, et par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge si et seulement si :

$1 < \alpha - \frac{3}{2}$, soit : $\frac{5}{2} < \alpha$.

b. Pour que cette deuxième série converge, il est nécessaire que son terme général tende vers 0, donc que : $\frac{3}{2} < \alpha$, ce qu'on supposera pour la suite.

Puis on peut compléter l'étude précédente avec :

$\forall\ n \geq 1$, $0 \leq S_n - \int_0^n \sqrt{t}.dt \leq \int_n^{n+1} \sqrt{t}.dt \leq \sqrt{n+1}.1 = \sqrt{n+1}$.

Donc : $(-1)^n.u_n = (-1)^n.\frac{2}{3}.\frac{1}{n^{\alpha-\frac{3}{2}}} + b_n = a_n + b_n$, avec : $|b_n| \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha}$.

Or la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge par le critère spécial des séries alternées, et la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ est absolument convergente puisque : $\frac{\sqrt{n+1}}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, et : $\alpha - \frac{1}{2} > 1$.

Conclusion : la série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n.u_n$ converge si et seulement si : $\frac{3}{2} < \alpha$.

88. Tout d'abord la série est convergente puisque à termes positifs et : $\frac{a}{n^2 + a^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{a}{n^2}$.

Puis la fonction : $x \mapsto \frac{a}{x^2 + a^2}$, est définie, positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (pour : $a > 0$), donc :

$\forall\ n \geq 1$, $\int_1^{n+1} \frac{a}{x^2 + a^2}.dx \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^2 + a^2} \leq \int_0^n \frac{a}{x^2 + a^2}.dx$, soit :

$\forall\ n \geq 1$, $\arctan\left(\frac{n+1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{a}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{k^2 + a^2} \leq \arctan\left(\frac{n}{a}\right)$, d'où quand n tend vers +∞ :

$$\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{a}\right)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a}{k^2+a^2}\leq\frac{\pi}{2}.$$

Enfin, si on fait tendre a vers +∞, le théorème des gendarmes donne : $\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{n^2+a^2}=\frac{\pi}{2}$.

89. On peut calculer : $\forall\ n\geq 1,\ \ln(u_n.\sqrt{n})=\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\sqrt{k})=-\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{k}})$.

En effectuant un développement limité du ln, on obtient :

$$\ln(u_n.\sqrt{n})=-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2.k}+\frac{1}{3.k.\sqrt{k}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{k.\sqrt{k}}\right)\right)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{2}.\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}c_k,$$

avec : $c_k=\frac{1}{3.k.\sqrt{k}}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{k.\sqrt{k}}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{3.k.\sqrt{k}}$.

• La fonction : $t\mapsto\frac{1}{\sqrt{t}}$, étant positive et décroissante sur [1,+∞), on sait que la série $\sum_{n\geq1}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).dt$ converge, autrement dit : $\int_1^n\frac{dt}{\sqrt{t}}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}=L+o_{+\infty}(1)$,

ou encore : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\int_1^{n+1}\frac{dt}{\sqrt{t}}-L+o_{+\infty}(1)=2.\sqrt{n+1}-2-L+o_{+\infty}(1)=2.\sqrt{n}+L'+o_{+\infty}(1)$.

• On sait de plus que : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o_{+\infty}(1)$.

• Enfin la série $\sum_{k\geq1}c_k$ étant absolument convergente, on a : $\sum_{k=1}^{n}c_k=L''+o_{+\infty}(1)$.

On en déduit que : $\ln(u_n.\sqrt{n})=-2.\sqrt{n}+\frac{1}{2}.\ln(n)-L'+\frac{1}{2.\gamma}-L''+o_{+\infty}(1)=-2.\sqrt{n}+\frac{1}{2}.\ln(n)+K+o_{+\infty}(1)$,

et donc : $u_n.\sqrt{n}=e^{-2.\sqrt{n}}.\sqrt{n}.e^{K+o_{+\infty}(1)}$,

d'où finalement : $u_n\underset{+\infty}{\sim}C.e^{-2.\sqrt{n}}$, avec : $C=e^K$.

Autour des équations différentielles.

90. a. L'équation différentielle (qu'on va noter (E)) est linéaire, du second ordre, à coefficients constants pour la partie homogène.

La fonction f étant définie et continue sur $\mathbb{R}^+$, l'équation a des solutions sur $\mathbb{R}^+$, à savoir les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$, qui s'écrivent comme somme d'une solution générale de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation complète.

Soit : $\forall$ x $\in\mathbb{R}^+$, $y(x)=a.\sin(x)+b.\cos(x)+y_0(x)$, où y_0 est solution particulière de l'équation.

On peut trouver y_0 par la méthode de variations des constantes (cours de spé) ou se souvenir de l'exercice 12 (en l'adaptant) qui fournissait une solution à cette équation de la forme :

$\forall$ x $\in\mathbb{R}^+$, $y_0(x)=\int_0^x\sin(x-t).f(t).dt$.

Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions données par :

$\forall$ x $\in\mathbb{R}^+$, $y(x)=a.\sin(x)+b.\cos(x)+\int_0^x\sin(x-t).f(t).dt$, avec : (a,b) $\in\mathbb{R}^2$.

b. On peut commencer par remarquer que f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, et admettant une limite finie en +∞, elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

De plus et quitte à changer f en son opposée, puisqu'elle est monotone, on peut la supposer croissante et donc supposer que : $f'\geq 0$.

Pour toute solution de (E), la partie $(a.\sin+b.\cos)$ est évidemment bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Puis : $\forall\ x\geq 0$, $\int_0^x\sin(x-t).f(t).dt=\sin(x).\int_0^x\cos(t).f(t).dt-\cos(x).\int_0^x\sin(t).f(t).dt$.

Intégrons par partie la première intégrale :

$$\int_0^x \cos(t).f(t).dt = [\sin(t).f(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t).f'(t).dt = \sin(x).f(x) - \int_0^x \sin(t).f'(t).dt .$$

Or f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ donc : $x \mapsto \sin(x).f(x)$, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Puis : $t \mapsto \sin(t).f'(t)$, est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car :

$$\forall\ x \geq 0,\ \int_0^x |\sin(t).f'(t)|.dt = \int_0^x |\sin(t)|.f'(t).dt \leq \int_0^x f'(t).dt = f(x) - f(0),$$

qui a bien une limite finie en $+\infty$.

Donc : $x \mapsto \int_0^x \sin(t).f'(t).dt$, a une limite finie en $+\infty$, et est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Finalement : $x \mapsto \sin(x).\int_0^x \cos(t).f(t).dt$, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Le même raisonnement s'appliquant à la deuxième partie, la fonction : $x \mapsto \int_0^x \sin(x-t).f(t).dt$, est bornée sur $\mathbb{R}^+$, ainsi donc que toute solution de (E).

c. Si on reprend le principe de l'intégration par parties, appliquée aux deux termes de la somme précédente, toute solution de (E) s'écrit :

$$y(x) = a.\sin(x) + b.\cos(x) + f(x) - \sin(x).\int_0^x \sin(t).f'(t).dt - \cos(x).f(0) - \cos(x).\int_0^x \cos(t).f'(t).dt ,$$

ou encore : $y(x) = \sin(x).\left(a - \int_0^x \sin(t).f'(t).dt\right) + \cos(x).\left(b - f(0) - \int_0^x \cos(t).f'(t).dt\right) + f(x)$.

Or f a une limite finie en $+\infty$, et on a vu que : $x \mapsto \int_0^x \sin(t).f'(t).dt$, a aussi une limite finie en $+\infty$, tout comme la fonction définie par l'autre intégrale (même principe).

Donc y a une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

- $a - \int_0^{+\infty} \sin(t).f'(t).dt = 0$, soit : $a = \int_0^{+\infty} \sin(t).f'(t).dt$,
- $b - f(0) - \int_0^{+\infty} \cos(t).f'(t).dt = 0$, soit : $b = f(0) + \int_0^{+\infty} \cos(t).f'(t).dt$.

Il y a donc bien une unique solution de (E) admettant une limite finie en $+\infty$.

d. La fonction cherchée est donc donnée par :

$$\forall\ x \geq 0,\ y_1(x) = \sin(x).\int_x^{+\infty} \sin(t).f'(t).dt + \cos(x).\int_x^{+\infty} \cos(t).f'(t).dt + f(x),$$

et en refaisant une intégration par parties :

$\sin(x).\int_x^A \sin(t).f'(t).dt = \sin(x).\sin(A).f(A) - \sin^2(x).f(x) - \sin(x).\int_x^A \cos(t).f(t).dt$, et :

$$\cos(x).\int_x^A \cos(t).f'(t).dt = \cos(x).\cos(A).f(A) - \cos^2(x).f(x) + \cos(x).\int_x^A \sin(t).f(t).dt .$$

Si on suppose que f tend vers 0 en $+\infty$, alors :

$[\sin(x).\sin(A) + \cos(x).\cos(A)].f(A)$ tend vers 0 en $+\infty$,

et puisque $\left[\sin(x).\int_x^A \sin(t).f'(t).dt + \cos(x).\int_x^A \cos(t).f'(t).dt + f(x)\right]$ a une limite finie quand A tend vers $+\infty$, qui vaut $y_1(x)$, l'autre partie à savoir $-\sin(x).\int_x^A \cos(t).f(t).dt + \cos(x).\int_x^A \sin(t).f(t).dt$ a aussi une limite en $+\infty$ qui vaut : $-\sin(x).\int_x^{+\infty} \cos(t).f(t).dt + \cos(x).\int_x^{+\infty} \sin(t).f(t).dt = -\int_x^{+\infty} \sin(x-t).f(t).dt$.

Enfin, les deux termes $f(x)$ s'annulent et on termine avec :

$$\forall\ x \geq 0,\ y_1(x) = -\int_x^{+\infty} \sin(x-t).f(t).dt .$$