Chapitre 10

Intégrales généralisées

Le but de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$; a et b désignent deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tels que $a < b$ (avec des conventions évidentes si a et/ou b est infini), et I désigne un intervalle d'extrémités a et b. L'intervalle I peut donc être de l'une des quatre formes suivantes : $[a,b]$ (avec a et b finis), $[a,b[$ (avec a fini), $]a,b]$ (avec b fini), ou $]a,b[$. On remarquera que le premier cas correspond à l'intégrale sur un segment, et a donc été étudié dans le chapitre **Dérivation et intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$**. Enfin, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Convergence des intégrales généralisées

1. Définitions

Définition – Convergence d'une intégrale généralisée

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

• Si $I = [a,b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **convergente** si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ possède une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque $x \to b^-$.

• Si $I =]a,b]$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **convergente** si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ possède une limite dans $\mathbb{K}$ lorsque $x \to a^+$.

Dans les deux cas précédents, en cas de convergence, la limite est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

• Si $I =]a,b[$, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **convergente** s'il existe $c \in]a,b[$ tel que les deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ soient convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a^+} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{y\to b^-} \int_c^y f(t)\,dt.$$

• Dans tous les cas, on dit que l'intégrale est **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarques

• On appelle nature d'une intégrale généralisée son caractère convergent ou divergent.

• Par définition, f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment de I. Ainsi, lorsque $I = [a,b[$ par exemple, alors pour tout $x \in [a,b[$, l'intégrale $\int_a^x f(t)\,dt$ apparaissant dans la définition est l'intégrale usuelle de f sur le segment $[a,x]$.

• Ces définitions sont très similaires à celles de série et de somme de série convergente.

En revanche, pour les séries, on distinguait les notations $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ (la suite des sommes partielles) et, en cas de convergence, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (la somme de la série). Ici, la même notation est utilisée pour désigner l'intégrale généralisée de f « avant de savoir si elle converge ou diverge », et sa valeur en cas de convergence. Il faut donc être particulièrement vigilant sur le sens des objets utilisés, et notamment, ne pas faire de calculs ou de majorations sur des intégrales généralisées avant d'avoir prouvé la convergence de tous les termes.

• L'intervalle I n'est pas toujours directement donné : lorsque l'on étudie la convergence d'une intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\,dt$, il y a trois formes possibles pour I. En pratique, on identifie le plus grand intervalle I d'extrémités a et b sur lequel f est continue par morceaux, et on commence toujours la rédaction par une phrase du type « f est continue par morceaux sur I ».

2. Intégrales de référence

Les intégrales généralisées suivantes sont d'utilisation très fréquente. Leur nature est explicitement au programme, mais pas la valeur des deux dernières en cas de convergence.

▶ **Intégrales de Riemann sur** $[1,+\infty[$ **:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est continue (et donc continue par morceaux) sur $[1,+\infty[$. Pour $x \geqslant 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^x = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1-\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

▶ **Intégrales de Riemann sur** $]0,1]$ **:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est continue sur $]0,1]$. Pour $x \in]0,1]$,

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-x^{1-\alpha}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\ln(x) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha < 1$, et dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

▶ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x e^{-\alpha t}\,dt = \begin{cases} \left[-\dfrac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^x = \dfrac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha x}) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ x & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

On en déduit que l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 0$, et dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}.$$

▶ $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$. La fonction ln est continue sur $]0,1]$. Pour tout $x \in]0,1]$, une intégration par parties (les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,1]$) montre que

$$\int_x^1 \ln(t)\,dt = [t\ln(t) - t]_x^1 = -x\ln(x) + x - 1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

L'intégrale est donc convergente et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt = -1$.

3. Lien avec l'intégrale sur un segment

Lorsque f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ (a et b finis), la notion d'intégrale généralisée coïncide avec la notion usuelle définie dans le chapitre **Dérivation et intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$**.

Propriété

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ une application continue par morceaux (a est b sont finis).
Alors les trois intégrales de f sur $[a,b[$, $]a,b]$ et $]a,b[$ sont convergentes, et leur valeur est l'intégrale « usuelle » $\int_{[a,b]} f$.

Démonstration – La fonction f est continue par morceaux sur $[a,b]$, elle est donc bornée, d'où, pour $x \in [a,b[$,

$$\left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_{[a,b]} f\right| = \left|-\int_x^b f(t)\,dt\right| \leqslant (b-x)\|f\|_\infty \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit le résultat dans le cas de l'intégrale sur $[a,b[$. On procède de façon similaire pour l'intégrale sur $]a,b]$, puis, pour l'intégrale sur $]a,b[$, on découpe les intégrales sur $[x,y] \subset]a,b[$ et sur $[a,b]$ en deux, grâce à une borne $c \in]a,b[$ quelconque, et on applique les résultats des deux autres cas. □

On en déduit en particulier le résultat suivant :

Propriété

Si b est fini, soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue qui admet une limite dans $\mathbb{K}$ en b^-. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente. On parle de **faux problème** en b.

Démonstration – Dans ce cas, f est prolongeable par continuité en b en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $[a,b]$. Alors, pour $x \in [a,b[$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \tilde{f}(t)\,dt \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b \tilde{f}(t)\,dt.$$

L'intégrale est donc convergente. □

Exemple – L'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente : $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $]0,1]$ et $\displaystyle\frac{\sin(t)}{t} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \sin'(0) = 1$. Il y a un faux problème en 0.

Attention ! Il n'y a pas de faux problème en $+\infty$. Par exemple, ce n'est pas parce qu'une fonction $f : [a,+\infty[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux possède une limite dans $\mathbb{K}$ en $+\infty$, même nulle, que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. On l'a bien vu avec l'exemple de la fonction inverse, dont l'intégrale sur $[1,+\infty[$ diverge.

Il n'y a pas non plus de condition nécessaire de convergence pour les intégrales (et c'est là une différence avec les séries) : du fait que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, on ne peut pas déduire que f possède des limites dans $\mathbb{K}$ aux bornes de I. On a déjà montré que la fonction logarithme népérien, qui possède une limite infinie en 0^+, a une intégrale convergente sur $]0,1]$. On construit même facilement des fonctions continues non bornées sur $[0,+\infty[$ qui ont une intégrale convergente : penser à une fonction « en triangles » pour laquelle la somme des aires des triangles est la somme d'une série convergente.

Il ne faut donc pas croire que les problèmes de convergence se traitent uniquement en examinant les limites éventuelles de f aux bornes.

4. Propriétés élémentaires

On peut facilement se ramener à des fonctions à valeurs réelles :

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si les deux intégrales

$$\int_a^b \mathcal{R}e(f(t))\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \mathcal{I}m(f(t))\,dt$$

convergent. Dans ce cas,

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathcal{R}e(f(t))\,dt + i\int_a^b \mathcal{I}m(f(t))\,dt.$$

Les propriétés élémentaires de l'intégrale sont également valables pour les intégrales généralisées :

Propriété – Linéarité de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt$ converge et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

Propriété – Positivité et croissance de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ convergent. On rappelle que $a < b$.
Alors :

- Si $f \geqslant 0$ sur I, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$.
- Si $f \leqslant g$ sur I, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

Démonstration des trois propriétés précédentes – Il suffit d'écrire la propriété correspondante (donnée dans le chapitre **Dérivation et intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$**) sur un segment inclus dans I ($[a,x]$, $[x,b]$ ou $[x,y]$ selon la forme de I) puis, en cas de convergence, de passer à la limite. Pour la première propriété, on utilise la caractérisation de la limite à l'aide des parties réelle et imaginaire, pour la deuxième, une combinaison linéaire de limites, et pour la troisième, un passage à la limite d'inégalités larges. $\square$

Propriété – Relation de Chasles

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, et soit $c \in I$.

• Si $I = [a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ converge.

• Si $I =]a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ converge.

• Si $I =]a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ convergent.

Dans les trois cas, en cas de convergence, on a

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration

• Les deux premiers points sont similaires, on ne traite que le premier. Soit $x \in I$; d'après la relation de Chasles pour les segments,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^x f(t)\,dt.$$

Le terme $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ étant indépendant de x, les deux autres termes sont de même nature, et en cas de convergence, on a la formule annoncée en faisant tendre x vers b par valeurs inférieures.

• Dans le cas où $I =]a,b[$, si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge et on a la formule annoncée, par définition.

Réciproquement, si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge, il existe $d \in I$ tel que $\displaystyle\int_a^d f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_d^b f(t)\,dt$ convergent. D'après les deux premiers points, pour tout $c \in I$, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ convergent.
$\square$

Remarques

• Le premier point montre bien que le problème de convergence ne vient que du voisinage de b (resp. a) dans le cas d'une intégrale généralisée sur $[a,b[$ (resp $]a,b]$).

• Dans le cas $I =]a,b[$, on notera bien la différence entre la propriété ci-dessus (énoncée avec un quantificateur universel : « pour tout $c \in I$, ... »), et la définition (énoncée avec un quantificateur existentiel : « il existe $c \in I$ tel que ... »). La propriété précédente est donc indispensable, pour prouver que $\int_a^b f(t)\,dt$ ne dépend pas du « découpage » de l'intervalle.

Pour les fonctions à valeurs positives, on a un critère de convergence :

Propriété

Soit f une fonction continue par morceaux sur I à valeurs réelles positives.

• Si $I = [a,b[$, pour que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge, il faut et il suffit que $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ soit majorée sur $[a,b[$.

• Si $I =]a,b]$, pour que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge, il faut et il suffit que $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$ soit majorée sur $]a,b]$.

Démonstration – Dans le premier cas, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est croissante sur $[a,b[$, le résultat vient donc du théorème de la limite monotone. Le deuxième cas est similaire. □

II. Intégrales absolument convergentes, fonctions intégrables

On rappelle que I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b, éventuellement infinies.

1. Définition, lien avec la convergence

Définition – Convergence absolue

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

Remarque – Pour les fonctions de signe constant, les notions d'intégrale convergente et absolument convergente coïncident. □

Pour une fonction de signe quelconque, l'intérêt majeur de cette notion est que, comme pour les séries, la convergence absolue entraîne la convergence :

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Dans ce cas, on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration – On raisonne dans le cas où $I = [a,b[$, les autres cas sont similaires. L'idée est exactement la même que pour les séries. Posons $g = \mathcal{R}e(f)$ et

$$g^+ = \max\{0,g\} = \frac{1}{2}(|g| + g), \quad g^- = \max\{0, -g\} = \frac{1}{2}(|g| - g).$$

Les fonctions g^+ et g^- sont continues par morceaux sur I et vérifient

$$0 \leqslant g^+ \leqslant |g| \leqslant \sqrt{\mathcal{R}e(f)^2 + \mathcal{I}m(f)^2} = |f|, \quad 0 \leqslant g^- \leqslant |g| \leqslant |f|.$$

Pour $x \in [a,b[$ par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_a^x g^+(t)\,dt \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt.$$

La fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,dt$ est majorée sur $[a,b[$ car $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge. Il en est donc de même pour la fonction $x \mapsto \int_a^x g^+(t)$ et la fonction g^+ étant positive, on en déduit que l'intégrale $\int_a^b g^+(t)\,dt$ converge. On obtient de même la convergence de $\int_a^b g^-(t)\,dt$.

On remarque enfin que l'on a $g = g^+ - g^-$, et donc, par différence, $\int_a^b g(t)\,dt$ converge. On procède de même avec la partie imaginaire $\mathcal{I}m(f)$, d'où la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$.

En utilisant l'inégalité triangulaire sur les segments, puis en passant à la limite, on obtient l'inégalité souhaitée. □

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux.

On dit que f est **intégrable** sur I si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente.

La valeur de cette intégrale est bien définie d'après le théorème précédent. Elle pourra être notée

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{(notation déjà définie), mais aussi} \quad \int_I f(t)\,dt \quad \text{ou} \quad \int_I f.$$

2. Théorèmes de comparaison

Théorème de comparaison

Soient $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ et $g : [a,b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

- Si $|f| \leqslant |g|$ sur $[a,b[$, et si g est intégrable sur $[a,b[$, alors f est intégrable sur $[a,b[$.
- On a la même conclusion si l'inégalité $|f| \leqslant |g|$ est remplacée par l'une des conditions

$$f(t) \underset{t\to b^-}{=} O(g(t)) \quad \text{ou} \quad f(t) \underset{t\to b^-}{=} o(g(t)).$$

- Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ si et seulement si g est intégrable sur $[a,b[$.

Remarque – On adaptera facilement ce théorème au cas d'une intégrale généralisée sur $]a,b]$, et on peut combiner ces résultats pour traiter une intégrale généralisée sur $]a,b[$.

Démonstration

• On reprend une idée déjà utilisée ci-dessus. Pour $x \in [a,b[$ par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_a^x |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^x |g(t)|\,dt.$$

La fonction g est intégrable sur $[a,b[$, donc la fonction $x \mapsto \int_a^x |g(t)|$ est majorée sur $[a,b[$. Il en est donc de même pour la fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)|$, ce qui montre que f est intégrable sur $[a,b[$.

• Dans ce cas, il existe $M > 0$ et $a_0 \in [a,b[$ tel que pour tout $t \in [a_0,b[$, $|f(t)| \leqslant M|g(t)|$. On prouve alors le résultat de la même façon que le premier point, l'intégrale de $|f|$ et $|g|$ sur $[a_0,b[$ et l'intégrale sur $[a,b[$ étant de même nature. Le cas d'un petit « o » s'en déduit car il est contenu dans celui d'un grand « O ».

• Si $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$, alors on a $f(t) \underset{t \to b^-}{=} O(g(t))$ et $g(t) \underset{t \to b^-}{=} O(f(t))$. Le résultat vient donc du point précédent. $\square$

Remarque – Ces résultats sont très fréquemment utilisés en association avec les propriétés suivantes que nous avons déjà données :

- Pour des fonctions positives, l'intégrabilité de f sur I équivaut à la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.
- L'intégrabilité de f sur I entraîne la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Exemples

• La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Pour tout $t \geqslant 1$,

$$\left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2},$$

et $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (critère des intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$, exposant $2 > 1$).
Par comparaison, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,dt$ converge.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et à valeurs positives. Pour tout $t \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$$

et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (intégrale de référence) donc sur $[1, +\infty[$. Par comparaison, $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{t\cos(t)}{e^t - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Examinons la convergence éventuelle de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(t)}{e^t - 1}\,dt$. Tout d'abord, il y a un faux problème en 0 car

$$\frac{t\cos(t)}{e^t - 1} \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{t}{t} = 1.$$

De plus, pour $t > 0$

$$\left|\frac{t\cos(t)}{e^t - 1}\right| \leqslant \frac{t}{e^t - 1} \quad \text{avec} \quad \frac{t}{e^t - 1} \underset{t \to +\infty}{\sim} t\,e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} O(e^{-t/2})$$

car $t\,e^{-t/2} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

La fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc par comparaison, $t \mapsto t\,e^{-t}$ puis $t \mapsto \dfrac{t}{e^t - 1}$ et $t \mapsto \dfrac{t\cos(t)}{e^t - 1}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$. Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos(t)}{e^t - 1}\,dt$ converge absolument, et donc converge.

• La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 - t^2}$ est continue sur $[0,1[$, à valeurs positives. On a

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{(1 + t)(1 - t)} \underset{t \to 1^-}{\sim} \frac{1}{2(1 - t)}.$$

Or $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$, car elle est à valeurs positives et pour tout $x \in [0,1[$,

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-x) \quad \text{avec} \quad -\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par comparaison, $t \mapsto \dfrac{1}{1-t^2}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$, et comme elle est à valeurs positives, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1-t^2}$ diverge.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $[3,+\infty[$, à valeurs positives. Pour tout $t \geqslant 3$,

$$\frac{\ln(t)}{t} \geqslant \frac{1}{t} \geqslant 0,$$

et $t \mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $[3,+\infty[$.

Par la contraposée du premier résultat de comparaison, $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[3,+\infty[$, et comme elle est à valeurs positives, $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$ diverge.

Attention ! De même que pour les séries, la convergence n'entraîne pas la convergence absolue. Si un théorème de comparaison amène à la conclusion que f n'est pas intégrable sur $[a,b[$, il se peut malgré tout que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
Dans les deux derniers exemples ci-dessus, nous pouvions conclure à la divergence des intégrales car les fonctions comparées étaient positives.

III. Méthodes de calcul des intégrales généralisées

1. Utilisation d'une primitive

Bien sûr, la première méthode à essayer est d'utiliser une primitive : si f est continue sur $[a,b[$ et si F en désigne une primitive, alors pour tout $x \in [a,b[$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a).$$

On en déduit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si F possède une limite finie en b^-, et dans ce cas

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a).$$

On raisonne de même pour les autres formes de I.

C'est la méthode que nous avons mise en œuvre pour les intégrales de référence.

2. Intégration par parties

Il faut être très vigilant dans les intégrations par parties pour les intégrales généralisées, car on peut facilement écrire une intégrale convergente comme somme de deux termes divergents... Par exemple, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$$

converge (la fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0,2\pi]$).
Pourtant, ni le « crochet généralisé » $\left[\dfrac{-\cos(t)}{t}\right]_0^{2\pi}$ ni l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$ ne convergent.

Pour éviter cela, on revient à l'intégrale sur un segment, on fait une intégration par parties usuelle, puis on essaie de passer à la limite. Cela conduit immédiatement au théorème suivant :

Théorème – Intégration par parties dans une intégrale généralisée

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si la fonction fg a une limite dans $\mathbb{K}$ en a^+ et b^-, alors les intégrales

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt$$

sont de même nature.

En notant

$$[f(t)\,g(t)]_a^b = \lim_{y\to b^-}(f(y)\,g(y)) - \lim_{x\to a^+}(f(x)\,g(x)),$$

on a, en cas de convergence,

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,dt = [f(t)\,g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt.$$

Remarque – Si $I = [a,b[$, alors fg a une limite en a^+ car elle est continue en a. Il suffit donc de vérifier l'hypothèse sur la limite de fg en b^-. De même, si $I =]a,b]$, il suffit de vérifier l'hypothèse sur la limite de fg en a^+.

Exemple – On pose, sous réserve d'existence, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. La fonction ainsi définie est appelée fonction Γ d'Euler.

Commençons par étudier la convergence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$; la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Par croissances comparées, $t^{x+1}e^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$, donc

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (critère des intégrales de Riemann sur $[1,+\infty[$, exposant $2 > 1$) ; par comparaison, $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge. De plus,

$$t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to0^+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}},$$

donc, les deux termes étant positifs, $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$ converge si et seulement si l'intégrale de Riemann $\int_0^1 dt/t^{1-x}$ converge, ce qui équivaut à $1-x<1$, *i.e.* $x>0$. L'ensemble de définition de la fonction Γ est donc $]0,+\infty[$.

Fixons $x > 0$. Les fonctions $f : t \mapsto -e^{-t}$ et $g : t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, $t^xe^{-t} \to 0$ lorsque $t \to 0^+$ car $x > 0$, et $t^xe^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ par croissances comparées. Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)g(t)\,dt$ est convergente d'après ce qui précède. D'après le théorème d'intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g'(t)\,dt$ est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} t^xe^{-t}\,dt = \left[-t^xe^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\,t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

c'est-à-dire,

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

C'est ce que l'on appelle une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction Γ. Elle permet en particulier de définir Γ de proche en proche sur $\mathbb{R}\setminus(-\mathbb{N})$. De plus, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^A = \lim_{A\to+\infty}(1-e^{-A}) = 1.$$

On montre alors facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad \Gamma(n+1) = n!$

La fonction Γ généralise donc la factorielle aux valeurs non entières.

3. Changement de variable

Théorème – Changement de variable dans une intégrale généralisée

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux, et soit $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$. Alors les intégrales

$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$$

sont de même nature, et en cas de convergence :

- Si φ est strictement croissante,
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$
- Si φ est strictement décroissante,
$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Attention ! Ne pas oublier le signe dans la formule, qui prend en compte la monotonie de φ. En cas de convergence des deux intégrales, les deux cas ci-dessus peuvent être réunis dans la formule

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,|\varphi'(u)|\,du.$$

Remarques

• Sous les hypothèses du théorème, la fonction φ est continue et bijective de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, et on peut montrer qu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante. Les deux cas considérés ci-dessus sont donc les seuls possibles. De plus, la fonction φ^{-1} est strictement monotone, de même monotonie que φ.

• Le théorème précédent est formulé avec des intervalles ouverts, mais on peut avoir à traiter le cas d'intervalles semi-ouverts. C'est bien sûr possible, puisque pour une fonction $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux, les intégrales de f sur $[a,b[$ et sur $]a,b[$ sont de même nature et égale en cas de convergence (la situation est analogue pour $]a,b]$). Ceci se prouve en adaptant un résultat donné plus haut sur la cohérence des différentes notions d'intégrale, pour une fonction continue par morceaux sur un segment.

Démonstration du théorème – Soient r et s deux éléments de $]\alpha,\beta[$, x et y deux éléments de $]a,b[$. En utilisant la formule usuelle pour les segments, on a

$$\int_{\varphi(r)}^{\varphi(s)} f(t)\,dt = \int_r^s f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du \quad \text{et} \quad \int_x^y f(t)\,dt = \int_{\varphi^{-1}(x)}^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Si φ est strictement croissante,

$$\varphi(r) \underset{r\to\alpha^+}{\longrightarrow} a^+, \quad \varphi(s) \underset{s\to\beta^-}{\longrightarrow} b^-, \quad \varphi^{-1}(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} \alpha^+ \quad \text{et} \quad \varphi^{-1}(y) \underset{y\to b^-}{\longrightarrow} \beta^-.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$ converge, ainsi que la formule annoncée en cas de convergence.

Si φ est strictement décroissante, on reprend le raisonnement, les bornes a et b sont échangées dans les limites de φ et φ^{-1}, et en cas de convergence,

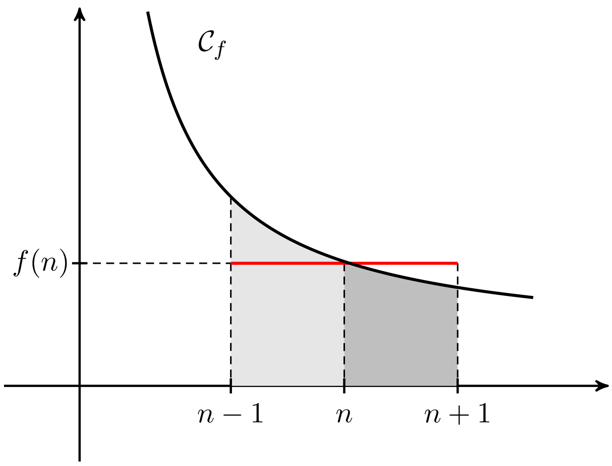
$$\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt. \qquad \square$$

Exemple – On souhaite calculer
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2(t)}\, dt.$$
La fonction
$$f : t \mapsto \frac{1}{1+\cos^2(t)}$$
est continue et positive sur le segment $[0,\pi/2]$, il ne s'agit en fait pas d'une intégrale généralisée, mais on peut bien sûr la considérer comme une intégrale généralisée convergente sur $]0,\pi/2[$.

On effectue le changement de variable $t = \arctan(u)$. La fonction $\varphi = \arctan$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ sur $]0,\pi/2[$. Le théorème de changement de variable montre donc que
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2(t)}\, dt &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\cos^2(\varphi(u))}\, \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\tan^2(\varphi(u))}}\, \frac{1}{1+u^2}\, du,\end{aligned}$$
la convergence de cette dernière intégrale faisant partie des conclusions du théorème. Or, sur $]0,\pi/2[$, tan coïncide avec φ^{-1}, d'où
$$\begin{aligned}I &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+u^2}}\, \frac{1}{1+u^2}\, du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+u^2}\, du \\ &= \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^A = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

IV. Comparaison entre une série et une intégrale

Reprenons l'idée d'encadrement des sommes partielles d'une série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ mise en œuvre dans le chapitre **Séries numériques** : soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux et décroissante. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $t \in [n-1,n]$, $f(n) \leqslant f(t)$ et donc, après intégration sur $[n-1,n]$,
$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt.$$
De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_n^{n+1} f(t)\, dt \leqslant f(n).$$
On rappelle que ceci est illustré sur le graphique suivant :



En additionnant la première inégalité pour n entre 1 et $p \geqslant 1$ puis en ajoutant $f(0)$, et en additionnant la seconde pour n entre 0 et p, on obtient

$$\int_0^{p+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{n=0}^{p} f(n) \leqslant f(0) + \int_0^p f(t)\,dt.$$

On en déduit que la suite $\left(\int_0^p f(t)\,dt\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est majorée. Or, la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ est à terme positifs, donc la suite de ses sommes partielles est majorée si et seulement si elle converge. De plus, la fonction f étant à valeurs positives, la suite $\left(\int_0^p f(t)\,dt\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ (définie sur $[0, +\infty[$) est majorée : en effet, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\int_0^x f(t)\,dt \leqslant \int_0^p f(t)\,dt$$

avec $p = \lfloor x \rfloor + 1$. Pour la même raison ($f$ à valeurs positives), la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est majorée si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Finalement, nous venons de démontrer le résultat suivant :

Théorème – Comparaison entre une série et une intégrale

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux, décroissante, à valeurs positives.
Pour que la série $\sum_{n\geqslant 0} f(n)$ converge, il faut et il suffit que f soit intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarques

- La fonction f étant positive, le fait que f soit intégrable équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.
- Bien sûr, on adapte facilement ce résultat au cas des fonctions définies sur $[n_0, +\infty[$, pour comparer les natures de $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\sum_{n\geqslant n_0} f(n)$.
- Dans le chapitre **Séries numériques**, on avait montré comment étudier, par encadrement, le comportement asymptotique de sommes partielles, ou de restes de séries convergentes. La méthode d'encadrement avait été exposée dans le cadre des fonctions continues, mais elle reste valable dans le cadre de l'intégrale des fonctions continues par morceaux.
- On peut donner des encadrements semblables de sommes partielles lorsque f est croissante.

Exemples

- Nous avons déjà mis en œuvre cette technique pour prouver la convergence des séries de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha > 1$. En effet, dans ce cas, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue, positive, décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$.

- On peut également obtenir des équivalents de sommes de séries de fonctions par cette méthode : définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$,

$$u_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x}.$$

La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, car pour tout $x \geqslant a$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{1}{n^2 a},$$

le majorant étant le terme général d'une série convergente. De plus, chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En particulier, la somme f de la série de fonctions est définie et continue sur

$\mathbb{R}_+^*$. On cherche à déterminer un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Pour cela, posons, $x > 0$ étant fixé,

$$g : t \mapsto \frac{1}{t + t^2 x}.$$

La fonction g est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a donc

$$\int_n^{n+1} g(t)\,dt \leqslant g(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} g(t)\,dt.$$

En ajoutant ces inégalités pour n entre 2 et $p \geqslant 2$, on obtient donc

$$\int_2^{p+1} g(t)\,dt \leqslant \sum_{n=2}^{p} \frac{1}{n + n^2 x} \leqslant \int_1^{p} g(t)\,dt$$

puis, en ajoutant le terme correspondant à $n = 1$,

$$\frac{1}{1+x} + \int_2^{p+1} g(t)\,dt \leqslant \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n + n^2 x} \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{p} g(t)\,dt. \tag{10.1}$$

Or, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $1 \leqslant a \leqslant b$,

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) dt = \left[\ln\left(\frac{t}{1+tx}\right)\right]_a^b$$

Lorsque $b \to +\infty$, on a donc, pour tout $a \geqslant 1$, la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ avec

$$\int_a^{+\infty} g(t)\,dt = \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \ln\left(\frac{a}{1+ax}\right).$$

Finalement, en faisant tendre p vers $+\infty$ dans (10.1), on obtient, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} - \ln(x) - \ln\left(\frac{2}{1+2x}\right) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1+x} - \ln(x) - \ln\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Il est alors immédiat, par encadrement, que $f(x) \sim -\ln(x)$ lorsque $x \to 0^+$.

V. Espaces fonctionnels et fonctions intégrables

Définition

- On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Si f est continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, on dit que f est **de carré intégrable** sur I si $|f|^2$ est intégrable sur I.

On note $L^2(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, de carré intégrable sur I.

Propriété

L'ensemble $L^1(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration – On montre que $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$: la fonction nulle appartient à $L^1(I,\mathbb{K})$. De plus, si f et g sont deux éléments de $L^1(I,\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $|\lambda f + g| \leqslant |\lambda||f| + |g|$. Les fonctions $|f|$ et $|g|$ ont une intégrale convergente sur I, il en est donc de même pour $|\lambda||f| + |g|$ par combinaison linéaire de limites. La fonction positive $|\lambda||f| + |g|$ est donc intégrable sur I, et par comparaison, il en est de même pour $\lambda f + g$. □

Propriété

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction **continue** et intégrable sur I, telle que

$$\int_I |f(t)|\,dt = 0.$$

Alors $f = 0$.

Démonstration – On fait la démonstration dans le cas où $I = [a,b[$, les autres cas sont similaires. Si J désigne un segment de $[a,b[$, alors pour $x \in [a,b[$ assez proche de b, on a $J \subset [a,x]$ et donc

$$0 \leqslant \int_J |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^x |f(t)|\,dt \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} \int_a^b |f(t)|\,dt = 0,$$

d'où $\displaystyle\int_J |f(t)|\,dt = 0$. Sachant que J est un segment et que $|f|$ est continue et positive, on a $f_{|J} = 0$. Ceci étant vrai pour tout segment $J \subset [a,b[$, on a $f = 0$. $\square$

Propriété

- Le produit de deux éléments de $L^2(I,\mathbb{K})$ est un élément de $L^1(I,\mathbb{K})$.
- L'ensemble $L^2(I,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Soit $\mathcal{H} = L^2(I,\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$. L'application

$$(\cdot\,|\,\cdot) : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{H}\times\mathcal{H} & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_I f\,g \end{array} \right.$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$, dont la norme associée est définie par

$$\forall\, f \in \mathcal{H}, \quad \|f\|_2 = \left(\int_I f^2\right)^{1/2}.$$

Démonstration

• Si f et g sont deux éléments de $L^2(I,\mathbb{K})$, alors d'après la majoration

$$|fg| \leqslant \frac{|f|^2 + |g|^2}{2},$$

on obtient par comparaison que $fg \in L^1(I,\mathbb{K})$ car $|f|^2$ et $|g|^2$ sont deux éléments de $L^1(I,\mathbb{K})$, qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

• Montrons alors que $L^2(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, la seule difficulté étant la stabilité par somme ; or, si f et g sont deux éléments de $L^2(I,\mathbb{K})$, alors

$$|f+g|^2 = |f|^2 + 2\,\mathcal{R}e(\overline{f}g) + |g|^2 \leqslant |f|^2 + 2\,|fg| + |g|^2.$$

Les fonctions $|f|^2$ et $|g|^2$ sont intégrables, et en particulier il en résulte que fg est intégrable, d'après le premier point. Par comparaison, $|f+g|^2$ est intégrable, c'est-à-dire que $f+g \in L^2(I,\mathbb{K})$.

• Les propriétés d'un produit scalaire sont immédiates à vérifier, la définie positivité étant une conséquence de la propriété précédente. Le fait que $\|\cdot\|_2$ soit une norme est alors clair : c'est la norme associée à ce produit scalaire. On rappelle que dans ce cadre, l'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_I f\,g\right| \leqslant \sqrt{\int_I f^2}\,\sqrt{\int_I g^2},$$

que nous démontrerons dans le chapitre **Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens**. $\square$