Chapitre 16

Fonctions vectorielles
Arcs paramétrés

Dans ce chapitre, n est un entier strictement positif, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point), et (sauf indication contraire) f désigne une application définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I. Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1. Définition et premières propriétés

Définition – Dérivabilité en un point

Soit $a \in I$. On dit que f est **dérivable** en a si la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

définie sur $I \setminus \{a\}$, possède une limite en a.
Dans ce cas, cette limite, qui est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, est appelée **vecteur dérivé de f en a**, noté

$$f'(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a).$$

Remarque – La dérivabilité de f en a équivaut au fait que la fonction

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

définie sur $\{h \neq 0\,;\ a + h \in I\}$, possède une limite en 0.

Définition

Soit $a \in I$. On dit que f est :

• dérivable à gauche en a si a est intérieur à I ou $a = \sup I$, et si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite à gauche en a. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a^-)$.

• dérivable à droite en a si a est intérieur à I ou $a = \inf I$, et si $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ possède une limite à droite en a. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(a^+)$.

Remarque – Si $n = 1$, on retrouve la définition déjà connue pour les fonctions à valeurs réelles. Le quotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est le taux d'accroissement de f entre a et x, et $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f dans un repère au point d'abscisse a.
Cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple – La fonction $f : x \mapsto (x,x^2,x^3)$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$f'(a) = (1,2a,3a^2).$$

□

On remarque que pour $f : I \to \mathbb{R}^n$, former le quotient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

revient à former le vecteur contenant les taux d'accroissement de chaque fonction-coordonnée de f. Ceci suggère une formule de dérivation composante par composante, dont la démonstration est immédiate :

Propriété – Dérivation composante par composante

Écrivons $f = (f_1, \ldots ,f_n)$ où les $f_i : I \to \mathbb{R}$ sont les fonctions-coordonnées de f dans la base canonique.
Soit $a \in I$. Pour que f soit dérivable en a, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i soit dérivable en a. Dans ce cas,

$$f'(a) = (f_1'(a), \ldots ,f_n'(a)).$$

La propriété suivante montre le lien entre la dérivabilité en un point a et le fait de posséder un développement limité à l'ordre 1 en a :

Propriété – Lien avec l'existence d'un développement limité

Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- f est dérivable en a et $f'(a) = b$.
- f admet le développement limité $f(x) = f(a) + b(x-a) + o(x-a)$ en a.

Notation – La notation $o(x-a)$ représente une fonction $x \mapsto (x-a)\,\varepsilon(x)$ où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^n$ a pour limite $(0, \ldots ,0)$ en a.

Démonstration – La fonction f est dérivable en a avec $f'(a) = b$ si et seulement si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} b,$$

c'est-à-dire, si et seulement si

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{=} b + o(1).$$

Ceci équivaut au fait que $f(x) = f(a) + b(x-a) + o(x-a)$ lorsque $x \to a$. □

Corollaire

Si f est dérivable en a, elle est continue en a. La réciproque est fausse.

Démonstration – Si f est dérivable en a, elle possède un développement limité à l'ordre 1 en a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$. Lorsque x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, d'où le résultat.
L'exemple de la fonction $t \mapsto (|t|,0, \ldots ,0)$ montre que la réciproque est fausse. □

2. Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété – Combinaison linéaire et produit

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ trois fonctions dérivables en $a \in I$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $\lambda f + g$ est dérivable en a et $(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.
- La fonction αf est dérivable en a et $(\alpha f)'(a) = \alpha'(a)f(a) + \alpha(a)f'(a)$.

Démonstration

- Le premier point est évident par combinaison linéaire de limites.
- Le cas du produit αf est une conséquence d'une propriété plus générale (voir ci-dessous) sur la dérivation des fonctions du type $B(f_1,f_2)$ où B est une application bilinéaire (dans notre cas, le produit), et f_1, f_2 sont deux fonctions dérivables en $a \in I$. $\square$

Propriété – Composition par une application linéaire ou bilinéaire

- Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire.

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable en $a \in I$, alors $L \circ f : I \to \mathbb{R}^p$ est dérivable en a et

$$(L \circ f)'(a) = L(f'(a)).$$

- Soient $(m,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions, et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ une application bilinéaire.

Si f et g sont dérivables en $a \in I$, alors $B(f,g) : I \to \mathbb{R}^p$ est dérivable en a et

$$B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

Démonstration

- Pour tout $x \in I$ différent de a, par linéarité de L, on a

$$\frac{(L \circ f)(x) - (L \circ f)(a)}{x - a} = L\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right).$$

Or, f étant dérivable en a,

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a).$$

De plus, L est une application linéaire sur un espace de dimension finie, elle est donc continue. Il en résulte que

$$\frac{(L \circ f)(x) - (L \circ f)(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} L(f'(a)),$$

d'où le résultat.

- Pour tout $x \in I$ différent de a, par bilinéarité de B, on a

$$\begin{aligned}\frac{B(f,g)(x) - B(f,g)(a)}{x - a} &= \frac{B(f(x),g(x)) - B(f(a),g(x)) + B(f(a),g(x)) - B(f(a),g(a))}{x - a} \\ &= B\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, g(x)\right) + B\left(f(a), \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right).\end{aligned}$$

Or, f et g étant dérivables (et en particulier continues) en a,

$$g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} g(a), \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} f'(a) \quad \text{et} \quad \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} g'(a).$$

L'application B est bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, elle est donc continue, d'où

$$\frac{B(f,g)(x) - B(f,g)(a)}{x - a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)),$$

ce qui prouve le résultat. $\square$

Corollaire – Cas d'un produit scalaire et d'un déterminant

Soit $(\cdot\,|\,\cdot)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions dérivables en $a \in I$. Alors :

- La fonction $(f\,|\,g)$ est dérivable en a avec

$$(f\,|\,g)'(a) = \big(f'(a)\,|\,g(a)\big) + \big(f(a)\,|\,g'(a)\big)\,.$$

- La fonction $\|f\|^2$ est dérivable en a avec

$$(\|f\|^2)'(a) = 2\,\big(f(a)\,|\,f'(a)\big)\,.$$

- Si $n = 2$ et $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, la fonction $\det_{\mathcal{B}}(f,g)$ est dérivable en a avec

$$(\det_{\mathcal{B}}(f,g))'(a) = \det_{\mathcal{B}}(f'(a),g(a)) + \det_{\mathcal{B}}(f(a),g'(a)).$$

Démonstration – Le premier et le troisième point sont immédiats car un produit scalaire et le déterminant sont bilinéaires. Pour le second point, il suffit de remarquer que $\|f\|^2 = (f\,|\,f)$ et d'appliquer le premier point ainsi que la symétrie du produit scalaire. □

Propriété – Composition

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Si φ est dérivable en $a \in J$ et si f est dérivable en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et

$$(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a)\,(f' \circ \varphi)(a).$$

Démonstration – On raisonne à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de φ en a,

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x),$$

et de f en $\varphi(a)$,

$$f(y) = f(\varphi(a)) + f'(\varphi(a))(y - \varphi(a)) + (y - \varphi(a))\,\eta(y).$$

En appliquant cette dernière égalité avec $y = \varphi(x)$, on obtient, pour $x \in J$,

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)) &+ f'(\varphi(a))\big(\varphi'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x)\big) \\ &+ \big(\varphi'(a)(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)\big)\,\eta\big(\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x)\big). \end{aligned}$$

Lorsque x tend vers a, $\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x) \to \varphi(a)$ et donc

$$\eta\big(\varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + (x-a)\,\varepsilon(x)\big) \to 0.$$

En rassemblant les termes, on obtient donc une fonction $h : J \to \mathbb{R}^n$ telle que $h(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} (0,\ldots,0)$ et

$$f(\varphi(x)) = f(\varphi(a)) + f'(\varphi(a))\varphi'(a)\,(x-a) + (x-a)h(x).$$

On en déduit le résultat. □

3. Fonction dérivée

Définition

Si f est dérivable sur I (c'est-à-dire en tout point de I), la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f, notée f'.

Bien sûr, la propriété de dérivation composante par composante, et les opérations sur les fonctions dérivables en un point se traduisent pour les fonctions dérivables sur un intervalle.

En raisonnant composante par composante, on obtient :

Propriété – Dérivation et fonctions constantes

Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable.

Pour que f soit constante sur I, il faut et il suffit que $f' = 0$.

II. Dérivées d'ordre supérieur

Définition – Classe $\mathcal{C}^k$, dérivées d'ordre k

- Sous réserve d'existence, on définit par récurrence les dérivées successives de f par : $f^{(0)} = f$ et $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$, pour $k \in \mathbb{N}$.
- Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si $f^{(k)}$ existe et est continue sur I.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \geqslant 1$.

La fonction $f^{(k)}$ se note aussi $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.

Propriété – Classe $\mathcal{C}^k$ composante par composante

Écrivons $f = (f_1, \dots, f_n)$ où les $f_i : I \to \mathbb{R}$ sont les fonctions-coordonnées de f dans la base canonique. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour que f soit de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i soit de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I. Dans ce cas, pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ (resp. $j \in \mathbb{N}^*$),

$$f^{(j)} = (f_1^{(j)}, \dots, f_n^{(j)}).$$

Propriété – Combinaison linéaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ (resp. $j \in \mathbb{N}^*$),

$$(\lambda f + g)^{(j)} = \lambda f^{(j)} + g^{(j)}.$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I,\mathbb{R}^n)$ (resp. $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R}^n)$) des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété – Composition par une application linéaire

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, alors $L \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ (resp. $j \in \mathbb{N}^*$),

$$(L \circ f)^{(j)} = L \circ f^{(j)}.$$

Démonstration des trois propriétés précédentes - Elle se fait par récurrences immédiates à partir des propriétés correspondantes de dérivation première, données plus haut. □

Théorème – Formule de Leibniz

Soient $(m,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $f : I \to \mathbb{R}^n$ et $g : I \to \mathbb{R}^m$ deux fonctions, et $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ une application bilinéaire.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, alors $B(f,g)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I et pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ (resp. $j \in \mathbb{N}^*$),

$$B(f,g)^{(j)} = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} B(f^{(i)}, g^{(j-i)}).$$

Démonstration – Elle est en tout point semblable à la démonstration de la formule du binôme de Newton ; elle se fait par récurrence sur k. Tout d'abord, B est bilinéaire sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, donc continue. Pour $k = 1$, le résultat est immédiat d'après la propriété de dérivation de $B(f,g)$, et car $B(f,g)' = B(f',g) + B(f,g')$ est continue par composition et somme. De plus, on a bien

$$B(f,g)' = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} B(f^{(i)}, g^{(1-i)}).$$

Supposons le résultat vrai pour un certain entier k, et supposons f et g de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Alors par hypothèse de récurrence,

$$B(f,g)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i)}).$$

Cette fonction est dérivable sur I par opérations sur les fonctions dérivables. De plus, par linéarité de la dérivation et d'après la formule donnant la dérivée d'une fonction de la forme $B(u,v)$,

$$\begin{aligned}
B(f,g)^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(B((f^{(i)})', g^{(k-i)}) + B(f^{(i)}, (g^{(k-i)})')\right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i+1)}, g^{(k-i)}) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i+1)}) \\
&= \sum_{p=1}^{k+1} \binom{k}{p-1} B(f^{(p)}, g^{(k-p+1)}) + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i+1)})
\end{aligned}$$

grâce au changement d'indice $p = i + 1$ dans la première somme. En rassemblant les termes communs aux deux sommes, on a donc

$$\begin{aligned}
B(f,g)^{(k+1)} &= B(f^{(k+1)}, g) + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i}\right) B(f^{(i)}, g^{(k-i+1)}) + B(f, g^{(k+1)}) \\
&= B(f^{(k+1)}, g) + \sum_{i=1}^{k} \binom{k+1}{i} B(f^{(i)}, g^{(k-i+1)}) + B(f, g^{(k+1)}) \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} B(f^{(i)}, g^{(k+1-i)}),
\end{aligned}$$

qui est une fonction continue par composition et combinaison linéaire. Ceci prouve le résultat au rang $k + 1$ et termine la démonstration. □

Remarque – En reprenant cette démonstration, il est immédiat que le résultat est vrai pour les fonctions à valeurs complexes, lorsque B désigne le produit : on retrouve la formule connue du programme de première année.

Propriété – Composition

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction avec J intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction.
Si φ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J et si f est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur I, alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (resp. $\mathcal{C}^\infty$) sur J.

Démonstration – À nouveau, c'est une récurrence immédiate basée sur la formule donnant la dérivée d'une composée. En effet, si φ et f sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I, alors

$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \, (f' \circ \varphi)$$

est de classe $\mathcal{C}^k$ comme produit et composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$, et par hypothèse de récurrence. Donc $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. □

Remarque – Les propriétés concernant la combinaison linéaire et la composition d'applications ont leurs équivalents pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ (lorsque cela a un sens, en ce qui concerne la composition). On peut également donner une propriété analogue sur le quotient de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tous ces résultats, on renvoit au cours de première année.

III. Arcs paramétrés

1. Définitions

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
- On appelle **arc paramétré** de classe $\mathcal{C}^k$ (tracé dans $\mathbb{R}^n$) tout couple $\Gamma = (I,f)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.
- L'image $\mathcal{C} = f(I)$ de f est aussi appelée **support** de l'arc paramétré Γ.

Dans toute la suite, sauf indication contraire, $\Gamma = (I,f)$ désigne un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de support $\mathcal{C}$.

Sans soulever de question théorique, on notera $M(t)$ le point de $\mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{OM(t)} = f(t)$, où O désigne l'origine du repère canonique de $\mathbb{R}^n$. On identifie vecteur $f(t)$ et point $M(t)$.

Remarque – Si le paramètre décrivant l'intervalle I est le temps, Γ représente le mouvement d'un point dans $\mathbb{R}^n$. La courbe $\mathcal{C}$ est alors la **trajectoire** de ce mouvement. □

Cas particulier – Lorsque pour tout $t \in I$, $f(t) = (t,x(t))$ où $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}$ est le graphe de la fonction x.

Exemple – Les deux arcs paramétrés par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2} \right) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

ont pour support le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ privé du point $(-1,0)$. Deux arcs différents peuvent donc avoir le même support. Il faut bien distinguer un arc et son support. □

Un point M de $\mathcal{C}$ peut être associé à plusieurs paramètres : on peut avoir $\overrightarrow{OM} = f(t_1) = f(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. Pour cette raison, on distingue les notions de point *de paramètre* t, indissociable de son paramètre, et de point *géométrique*, qui désigne l'élément de $\mathcal{C}$ correspondant. On parlera plutôt de point de Γ dans le premier cas, et de point de $\mathcal{C}$ dans le second.

Définition

• Un point $M(t)$ de Γ est dit **simple** s'il existe un *unique* $t \in I$ tel que $\overrightarrow{OM(t)} = f(t)$. Sinon, il est dit **multiple**. L'arc Γ est dit **simple** si tous ses points sont simples, ce qui équivaut au fait que f soit injective.

• L'arc Γ est dit **fermé** si I est un segment $[a,b]$ et si $f(a) = f(b)$.

Définition – Point régulier

Un point $M(t)$ de Γ est dit **régulier** si $f'(t) \neq (0,\ldots,0)$. Sinon, il est dit **stationnaire** (ou singulier). Si tous les points de Γ sont réguliers, on dit que Γ est régulier.

Attention ! Dans le cas d'un point multiple, par exemple $f(t_1) = f(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$, le point $M(t_1)$ peut être régulier sans que $M(t_2)$ le soit.

Exemple – L'arc Γ paramétré par

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

a pour support le cercle unité de $\mathbb{R}^2$. Il est fermé et régulier. Tous les points de son support excepté $(1,0)$ sont simples.

Il est important de comprendre que cet arc est différent de celui paramétré par

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,4\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{array} \right.$$

même si ces deux arcs ont le même support (dans le deuxième cas, le cercle est parcouru deux fois).

Remarque – Un arc (I,f) de classe $\mathcal{C}^1$ avec f de la forme $t \mapsto (t, x(t))$ ou $t \mapsto (t, x(t), y(t))$ est toujours régulier :

$$\forall\, t \in I, \quad f'(t) = (1, x'(t)) \ \neq (0,0) \ \ (\text{ou } f'(t) = (1, x'(t), y'(t)) \ \neq (0,0,0)).$$

Propriété/Définition : Tangente en un point régulier

Soit $M(a)$ un point régulier de Γ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{M(a)M(t)} \xrightarrow[t>a]{t\to a} \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|} \qquad \text{et} \qquad \frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{M(a)M(t)} \xrightarrow[t<a]{t\to a} -\frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}.$$

La droite passant par $M(a)$ et dirigée par le vecteur $f'(a)$ (ou par tout vecteur non nul colinéaire à $f'(a)$) est appelée **tangente** à Γ en $M(a)$.

Démonstration – Pour t voisin de a, on peut écrire

$$f(t) = f(a) + f'(a)\,(t-a) + o(t-a)$$

avec $f'(a) \neq (0,\ldots,0)$, et donc

$$\overrightarrow{M(a)M(t)} = f(t) - f(a) = f'(a)\,(t-a) + o(t-a) = (t-a)\,\big(f'(a) + o(1)\big)\,.$$

En particulier, pour $t > a$ assez proche de a, $M(t) \neq M(a)$, et en utilisant l'homogénéité de la norme, on a

$$\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{M(a)M(t)} = \frac{t-a}{t-a}\,\frac{f'(a)+o(1)}{\|f'(a)+o(1)\|} = \frac{f'(a)+o(1)}{\|f'(a)+o(1)\|} \xrightarrow[t>a]{t\to a} \frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}.$$

De même, pour $t < a$, on a

$$\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{M(a)M(t)} = \frac{t-a}{a-t}\,\frac{f'(a)+o(1)}{\|f'(a)+o(1)\|} = -\frac{f'(a)+o(1)}{\|f'(a)+o(1)\|} \underset{\substack{t\to a\\ t<a}}{\longrightarrow} -\frac{f'(a)}{\|f'(a)\|}. \qquad \square$$

Remarques

• Du point de vue cinématique, $f'(t)$ est le vecteur vitesse (instantanée) du point mobile M au temps t. La propriété précédente montre donc qu'à un instant t où la vitesse du point mobile est non nulle, la trajectoire admet une tangente en $M(t)$ dirigée par le vecteur vitesse en ce point. De même, si Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, $f''(t)$ est le vecteur accélération de M au temps t. $\square$

• La démonstration précédente montre que la tangente à Γ en un point régulier $M(a)$ est la « limite » de la droite $(M(a)M(t))$ lorsque $t \to a$ avec $t \neq a$.

2. Étude locale des arcs plans

La situation est donc assez simple concernant les points réguliers. On cherche maintenant à décrire plus précisément l'allure de la courbe au voisinage d'un point. Pour cela il est naturel de pousser le développement limité aux ordres suivants.

On suppose que $n = 2$ (on considère un arc plan). Notons $f = (x,y)$, c'est-à-dire que x et y sont les fonctions-coordonnées de f. Alors x et y sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I de même que f. La formule de Taylor-Young permet d'écrire un développement limité de x et y en $a \in I$ à l'ordre k, et donc d'obtenir un développement limité de f de la forme

$$f(t) \underset{t\to a}{=} \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(t-a)^j + (t-a)^k\,\varepsilon(t),$$

où $\varepsilon : I \to \mathbb{R}^2$ a pour limite $(0,0)$ en a.

Supposons maintenant qu'il existe deux entiers p et q avec $1 \leqslant p < q \leqslant k$ tels que :

- Pour tout $j \in [\![1,p-1]\!]$, $f^{(j)}(a) = (0,0)$,
- Pour tout $j \in [\![p+1,q-1]\!]$, $(f^{(p)}(a),f^{(j)}(a))$ est liée.
- $(f^{(p)}(a),f^{(q)}(a))$ est libre.

Les entiers p et q sont alors uniques, on dit que p et q sont les **entiers caractéristiques** de Γ en a.

On a alors nécéssairement $f^{(p)}(a) \neq (0,0)$. D'après la seconde condition, il existe donc (lorsque $p+1 \leqslant q-1$) des scalaires $\lambda_{p+1},\ldots,\lambda_{q-1}$ tels que pour tout $j \in [\![p+1,q-1]\!]$,

$$f^{(j)}(a) = \lambda_j\, f^{(p)}(a).$$

En tronquant le développement limité précédent à l'ordre q, on obtient un développement limité de la forme

$$f(t) \underset{t\to a}{=} f(a) + f^{(p)}(a)\frac{(t-a)^p}{p!}\Bigg(1 + \underbrace{\sum_{j=p+1}^{q-1} \lambda_j \frac{(t-a)^{j-p}}{j!}}_{=o(1)}\Bigg) + f^{(q)}(a)\frac{(t-a)^q}{q!} + (t-a)^q\,\eta(t);$$

notamment, pour $t \neq a$ proche de a, on a $M(t) \neq M(a)$ car $f^{(p)}(a) \neq (0,0)$. De plus

$$\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{(t-a)^p} \underset{\substack{t\to a\\ t\neq a}}{\longrightarrow} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}, \qquad \frac{M(a)M(t)}{|t-a|^p} \underset{\substack{t\to a\\ t\neq a}}{\longrightarrow} \frac{\|f^{(p)}\|(a)}{p!}$$

et donc

$$\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{M(a)M(t)} \underset{\substack{t\to a\\ t>a}}{\longrightarrow} \frac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}, \qquad \frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{M(a)M(t)} \underset{\substack{t\to a\\ t<a}}{\longrightarrow} (-1)^p\frac{f^{(p)}(a)}{\|f^{(p)}(a)\|}.$$

La droite passant par $M(a)$ et dirigée par le vecteur $f^{(p)}(a)$ est ici aussi appelée **tangente** à Γ en $M(a)$. Le cas d'un point régulier correspond au cas où $p = 1$.

De plus, pour tout $t \in I$, le vecteur $\eta(t)$ peut être décomposé sur la base $(f^{(p)}(a), f^{(q)}(a))$ de $\mathbb{R}^2$. Finalement, dans le repère $(M(a), f^{(p)}(a), f^{(q)}(a))$, et pour $t \in I$ proche de a, le point $M(t)$ a pour coordonnées

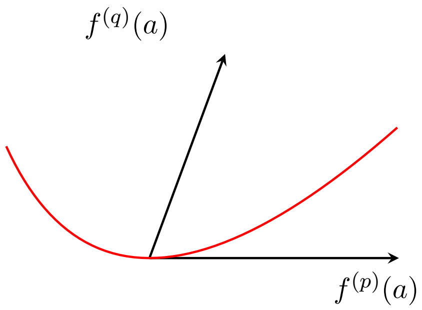
$$\begin{pmatrix} \dfrac{(t-a)^p}{p!} + o((t-a)^p) \\ \dfrac{(t-a)^q}{q!} + o((t-a)^q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t-a)^p \left(\dfrac{1}{p!} + o(1)\right) \\ (t-a)^q \left(\dfrac{1}{q!} + o(1)\right) \end{pmatrix}$$

Pour $t \neq a$ assez proche de a, la première coordonnée est du signe de $(t-a)^p$, la seconde, du signe de $(t-a)^q$.

Finalement, en déterminant p et q, on peut décrire l'allure de la courbe au voisinage de $M(a)$, selon la parité de p et q :

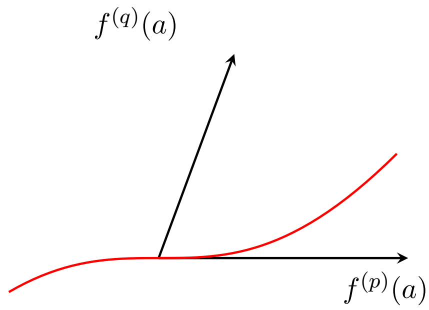
• Si p est impair, q pair :

On dit que $M(a)$ est un **point ordinaire**.



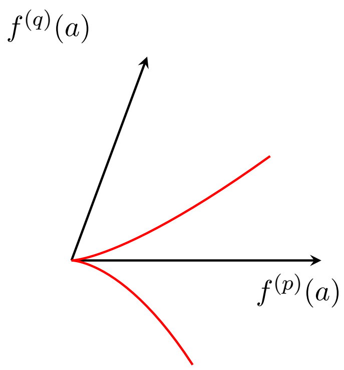
• Si p est impair, q impair :

On dit que $M(a)$ est un **point d'inflexion**.



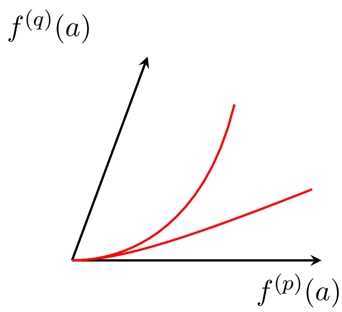
• Si p est pair, q impair :

On dit que $M(a)$ est un **point de rebroussement de première espèce**.



• Si p est pair, q pair :

On dit que $M(a)$ est un **point de rebroussement de deuxième espèce**.



Exemple – Soit Γ l'arc paramétré par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2 + \cos(t), t - \sin(t)) \end{array} \right.$$

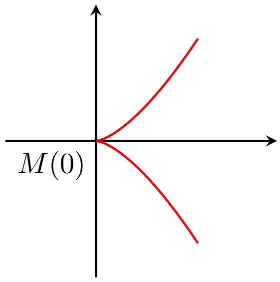
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f'(t) = (2t - \sin(t), 1 - \cos(t)) \,.$$

On en déduit facilement que tous les points sont réguliers, sauf le point $(1,0)$ de paramètre 0.

Effectuons un développement limité des fonctions-coordonnées de f en 0 :

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 + \cos(t) \\ t - \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^3) \\ \dfrac{1}{6}t^3 + o(t^3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{6} \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$



Les vecteurs $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(0, \dfrac{1}{6}\right)$ sont indépendants, donc $p = 2$ et $q = 3$. Il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

Remarque – Avec les notations précédentes, supposons que $x^{(p)}(a) \neq 0$. Le vecteur $\overrightarrow{M(a)M(t)}$ a pour coordonnées

$$(x(t) - x(a), y(t) - y(a))$$

avec

$$x(t) - x(a) \underset{t \to a}{\sim} \frac{x^{(p)}(a)}{p!}(t-a)^p$$
$$y(t) - y(a) \underset{t \to a}{=} \frac{y^{(p)}(a)}{p!}(t-a)^p + o((t-a)^p).$$

On a notamment $x(t) \neq x(a)$ pour $t \neq a$ assez proche de a, et la droite $(M(a)M(t))$ a pour pente

$$\frac{y(t) - y(a)}{x(t) - x(a)} \xrightarrow[t \to a]{} \frac{y^{(p)}(a)}{x^{(p)}(a)},$$

qui est la pente de la tangente à Γ en $M(a)$. De même, d'après la formule de Taylor-Young,

$$x'(t) \underset{t \to a}{\sim} \frac{x^{(p)}(a)}{(p-1)!}(t-a)^{p-1}$$
$$y'(t) \underset{t \to a}{=} \frac{y^{(p)}(a)}{(p-1)!}(t-a)^{p-1} + o((t-a)^{p-1}).$$

On a notamment $x'(t) \neq 0$ pour $t \neq a$ assez proche de a, et la tangente à Γ en $M(t)$ a pour pente

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} \xrightarrow[t \to a]{} \frac{y^{(p)}(a)}{x^{(p)}(a)}.$$

On retiendra que lorsque les entiers caractéristiques existent avec $x^{(p)}(a) \neq 0$, la considération de l'un des quotients

$$\frac{y(t) - y(a)}{x(t) - x(a)} \quad \text{ou} \quad \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

permet de déterminer la pente de la tangente à Γ en $M(a)$. Si $x^{(p)}(a) = 0$ alors $y^{(p)}(a) \neq 0$ et on peut raisonner de même avec les quotients inverses pour obtenir l'inverse de la pente.

3. Branches infinies

On suppose que $n = 2$; on note $f = (x,y)$. On s'intéresse aux droites qui donnent la « direction » de la courbe $\mathcal{C}$ lorsque le paramètre t tend vers a, point adhérent à I ou $\pm\infty$.

Définition – Branche infinie

On dit que Γ possède une **branche infinie** en a si $\|f(t)\| \xrightarrow[t \to a]{} +\infty$.

On peut distinguer $t \to a^-$ et $t \to a^+$.

- Premier cas : x ou y a une limite finie en a.
  - Si $x(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} m \in \mathbb{R}$ et $y(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dit que Γ possède une **asymptote verticale** d'équation $x = m$ en a.
  - Si $x(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $y(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} m \in \mathbb{R}$, on dit que Γ possède une **asymptote horizontale** d'équation $y = m$ en a.
- Deuxième cas : x et y ont une limite infinie en a.
  - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to a}{\longrightarrow} 0$, on dit que Γ possède une **branche parabolique** de direction (Ox) en a.
  - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dit que Γ possède une **branche parabolique** de direction (Oy) en a.
  - Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \underset{t\to a}{\longrightarrow} m \in \mathbb{R}^*$:
    - (i) si $y(t) - m\,x(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} p \in \mathbb{R}$, on dit que Γ possède une **asymptote** d'équation $y = mx + p$ en a.
    - (ii) si $y(t) - m\,x(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dit que Γ possède une **direction asymptotique** d'équation $y = mx$ en a.

Remarque – La liste de cas ci-dessus n'est pas exhaustive : il se peut par exemple que y n'ait pas de limite en a, comme dans le cas du graphe de la fonction sinus lorsque $t \to +\infty$, qui ne rentre dans aucun de ces cas.

4. Construction d'arcs plans

On se donne un arc plan $\Gamma = (I,f)$ avec $f = (x,y)$.

1. On commence par déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et les simplifications éventuelles de l'ensemble d'étude dues par exemple aux symétries de la courbe. Par exemple :

- Si x et y sont T-périodiques, il suffit de restreindre l'étude à un intervalle de longueur T.

Si I est symétrique par rapport à 0, il suffit de restreindre l'étude à $I \cap \mathbb{R}_+$, puis de compléter la courbe par symétrie, dans les cas suivants :

- si x et y sont paires : la courbe $\mathcal{C}$ est entièrement obtenue à partir de $I \cap \mathbb{R}_+$.
- si x et y sont impaires : la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine.
- si x est paire et y impaire : la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox).
- si x est impaire et y paire : la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- si pour tout $t \in I$, $x(-t) = y(t)$ et $y(-t) = x(t)$: la courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.

2. On donne la classe de f, on étudie les variations et les limites aux bornes de x et y.

On en déduit les tangentes horizontales ou verticales.

3. On identifie les points réguliers, les points stationnaires, et on étudie leur nature.

4. On étudie les branches infinies. Pour connaître la position de la courbe par rapport à une asymptote d'équation $y = mx + p$, il peut être utile d'étudier le signe de la différence $y(t) - mx(t) - p$.

5. On peut également rechercher les éventuels points doubles, c'est-à-dire tels qu'il existe $t_1 \neq t_2$ avec $x(t_1) = x(t_2)$ et $y(t_1) = y(t_2)$.

6. On effectue le tracé.

Exemple – Étudions l'arc Γ paramétré par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{\ln(t)} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2(t-1)} \end{cases}$$

pour $t \in \mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (on peut le considérer comme réunion de deux arcs).

Il n'y a pas de symétrie évidente. Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$ (y est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$). De plus, pour tout $t \in \mathcal{D}$,

$$x'(t) = \frac{\ln(t) - 1}{\ln^2(t)}$$
$$y'(t) = \frac{2t(t-1) - t^2}{2(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{2(t-1)^2}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

t	0		1		2		e		$+\infty$
$x'(t)$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$x(t)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{2}{\ln(2)}$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\dfrac{e^2}{2(e-1)}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	

En particulier, Γ est régulier, possède une tangente horizontale au point $\left(\dfrac{2}{\ln(2)}, 2\right)$ de paramètre 2, et une tangente verticale au point $\left(e, \dfrac{e^2}{2(e-1)}\right)$ de paramètre e.

L'arc admet trois branches infinies, en 1^-, 1^+ et $+\infty$, qui ne sont pas des asymptotes horizontales ou verticales, car x et y ont des limites infinies. Pour tout $t \in \mathcal{D}$,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t\,\ln(t)}{2(t-1)}.$$

Lorsque $t \to +\infty$,

$$\frac{y(t)}{x(t)} \sim \frac{1}{2}\ln(t) \to +\infty,$$

donc Γ admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

Pour $t \neq 1$ proche de 1, posons $t = 1 + h$, avec h non nul voisin de 0. Alors

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1+h}{2}\,\frac{\ln(1+h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{2}$$

car ln est dérivable en 1 avec $\ln'(1) = 1$. Alors

$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) = \frac{(1+h)^2}{2h} - \frac{1+h}{2\ln(1+h)} = \frac{1}{2h} + 1 + \frac{h}{2} - \frac{1+h}{2}\,\frac{1}{h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + o(h^3)} &= \frac{1}{h}\,\frac{1}{1 - \dfrac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} + o(h^2)} \\
&= \frac{1}{h}\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o(h^2)\right),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
y(t) - \frac{1}{2}x(t) &= \frac{1}{2h} + 1 + \frac{h}{2} - \frac{1+h}{2h}\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{2h} + 1 + \frac{h}{2} - \frac{1}{2h}\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{7}{24}h + o(h).
\end{aligned}$$

On en déduit notamment que Γ possède une asymptote d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ en $1^{\pm}$.

Pour connaître la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on étudie le signe de

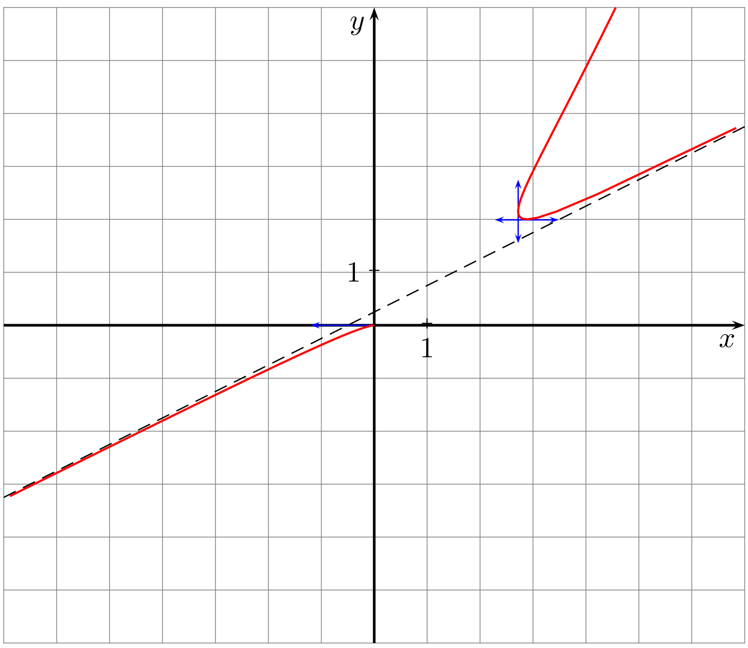
$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) - \frac{1}{4}$$

qui est donné, pour t voisin de 1, par le développement limité précédent. On en déduit que la courbe est au-dessous de son asymptote pour $t < 1$ proche de 1, et au-dessus pour $t > 1$ proche de 1. On remarque l'intérêt d'avoir effectué le développement limité à un ordre suffisant dès le départ.

Lorsque $t \to 0$, $x(t) \to 0$. On peut prolonger x par continuité en 0 en posant $x(0) = 0$. En remarquant que $x'(t) \to 0$ lorsque $t \to 0^+$, le théorème de la limite de la dérivée montre que x est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0 avec $x'(0) = 0$; de plus $y(0) = y'(0) = 0$. L'origine n'est pas un point régulier du prolongement de Γ ; mais, en remarquant que

$$\frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t\,\ln(t)}{2(t-1)} \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

on voit que le prolongement de Γ a une tangente horizontale au point $(0, 0)$ de paramètre 0.



5. Longueur d'un arc

Dans ce paragraphe, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$.

Définition

Soit $\Gamma = (I,f)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$.

- Si I est un segment $[a,b]$, on appelle **longueur** de Γ le réel $\displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\,dt$.
- Si I est un intervalle quelconque, on appelle **longueur** de Γ le réel

$$\int_I \|f'(t)\|\,dt$$

lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_I \|f'(t)\|\,dt$ est convergente.

Remarque – On peut considérer les intégrales écrites dans la définition précédente car la fonction $\|f'\|$ est continue sur I.

Exemple – On considère la cycloïde paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$

pour $t \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un arc de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t+2\pi) = t + 2\pi - \sin(t) = x(t) + 2\pi \\ y(t+2\pi) = 1 - \cos(t) = y(t) \end{cases}$$

Il suffit donc d'étudier la portion (appelée arche) de l'arc correspondant à $t \in [0,2\pi]$, puis de compléter le tracé par translations horizontales. La longueur de cette arche est donnée par

$$\begin{aligned} L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2(t) + (y')^2(t)}\,dt &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}\,dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2(t/2)}\,dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin(t/2)\,dt = 8 \end{aligned}$$

(on a utilisé que pour tout $t \in [0,2\pi]$, $\sin(t/2) \geqslant 0$).

Le support de la cycloïde est la courbe décrite par un point fixe sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite, par exemple un point d'une roue de vélo. La longueur d'une arche de cycloïde est égale à quatre fois le diamètre du cercle correspondant (ci-dessus ce diamètre vaut 2 car le périmètre du cercle correspondant est 2π). En revanche, évidemment, l'arc « complet » n'est pas de longueur finie.