T.D. 4 – Espaces vectoriels normés

1. Soient a, b réels tels que $0 < a < b$. Montrer que l'on définit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n).$$

(Leur limite commune est la moyenne arithmético-géométrique *de a et b.)*

Peut-on estimer la rapidité de convergence ?

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Leur limite commune est e ; montrer que e est irrationnel *(on pourra remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < e - u_n < \frac{1}{n.n!}$).*

3. Étudier la suite (u_n) définie par : $u_0 \in \left]0, \pi\right[$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sin u_n$. Donner un équivalent de u_n.

(On pourra chercher la limite de $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ et utiliser le théorème de Cesàro*.)*

4. Montrer que, pour $n \geq 3$, l'équation $e^x = x^n$ admet deux solutions u_n, v_n dans $\mathbb{R}^{+*}$, telles que $1 < u_n < n < v_n$ *(on pourra utiliser la fonction $f_n : x \mapsto x - n \ln x$).*

Montrer que la suite (u_n) décroît, puis qu'elle converge vers 1 et donner un équivalent de $u_n - 1$.

5. © Pour z complexe donné, étudier la convergence de la suite complexe définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad Z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

6. Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit deux applications N_2 et N en posant, pour $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$,

$$N_2(P) = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{N}} |a_k|^2} \quad ; \quad N(P) = \max_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

Montrer que N_2 et N sont deux normes sur E et les comparer.

7. Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et g fixée dans E. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur g pour que $N : f \mapsto \max_{[0,1]} |fg|$ soit une norme sur E.

8. © Soit E un espace vectoriel normé, x un élément de E et A une partie non vide de E.

Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

Soient F et G deux fermés non vides disjoints de E. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints de E contenant respectivement F et G *(on pourra utiliser une fonction continue bien choisie).*

Montrer que $\emptyset$ et E sont les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées.

9. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, K une partie fermée, bornée, non vide de E et $f : K \to K$ vérifiant : $\forall (x, y) \in K^2 \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

Montrer que f admet un unique point fixe dans K *(considérer $\alpha = \min\{\|f(x) - x\|, \ x \in K\}$).*

10. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles telle que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers A et $\left(A_n^{-1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers B. Montrer que A est inversible et que $B = A^{-1}$.

11. Caractériser dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices limites d'une suite de la forme $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

12. Montrer que l'ensemble D des matrices diagonalisables de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est dense dans E.

Qu'en est-il dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?