Chapitre 5

Espaces vectoriels normés Convergence et continuité

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $|\cdot|$ désigne la valeur absolue (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou le module (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Le mot topologie signifie en grec, « discours sur le lieu ». Il s'agit de donner des définitions rigoureuses des notions de proximité, de distance, et en corollaire, de limite et de continuité, dans des espaces abstraits. Nous nous placerons dans le cadre déjà très riche des espaces vectoriels : intuitivement, mesurer la distance entre deux éléments x et y de E peut se faire en mesurant la différence $x - y$ (la notion de différence ayant un sens dans un espace vectoriel). Il reste à définir ce que l'on entend par cette idée de mesurer des vecteurs.

I. Espaces vectoriels normés

1. Normes

Définition – Norme

On appelle **norme** sur E toute application N telle que :
- N est définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in E$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité) ;
- Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ (séparation) ;
- Pour tout $x \in E$, pour tout $y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E,N) est alors appelé **espace vectoriel normé**. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme, on dira simplement que E est un espace vectoriel normé.

Remarque – Cette définition est donnée par analogie avec la valeur absolue ou le module. Une norme est d'ailleurs très souvent notée, non pas comme une application N, mais suivant cette analogie, avec des doubles barres : la norme de x est notée $\|x\|$.

Exemples

• **Sur** $\mathbb{K}$

Sur $\mathbb{K}$, $x \mapsto |x|$ est une norme. En fait c'est presque la seule : soit N une norme sur $\mathbb{K}$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda) = N(\lambda \cdot 1) = |\lambda| N(1)$. Toute norme sur $\mathbb{K}$ est proportionnelle à $|\cdot|$.

• **Norme associée à un produit scalaire** (voir le chapitre **Espaces préhilbertiens, espaces euclidiens**).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$. Alors l'application

$$\|\cdot\| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{(x\,|\,x)} \end{array} \right.$$

est une norme sur E, appelée norme euclidienne. L'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\,(x\,|\,y)\,| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

En effet, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = (x+y\,|\,x+y) &= \|x\|^2 + 2\,(x\,|\,y) + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

• **Sur** $\mathbb{K}^n$

Pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit

$$\begin{aligned}N_1(x) &= \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ N_2(x) &= \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \\ N_\infty(x) &= \|x\|_\infty = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|.\end{aligned}$$

Elles sont appelées respectivement « norme 1 », « norme 2 », et « norme infini ».

Toutes les propriétés sont évidentes sauf l'inégalité triangulaire : si $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n$, alors

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i| \leqslant \sum_{i=1}^n (|x_i| + |y_i|) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Cela prouve l'inégalité triangulaire pour la norme 1. La norme 2 sur $\mathbb{R}^n$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par

$$(x\,|\,y) = \sum_{i=1}^n x_i\,y_i.$$

Pour la norme 2 sur $\mathbb{C}^n$, on remarque que

$$\|x+y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^2\right)^{1/2} = \|X+Y\|_2$$

où X et Y désignent les vecteurs $(|x_1|,\ldots,|x_n|)$ et $(|y_1|,\ldots,|y_n|)$. Ces vecteurs étant à coefficients réels, on a

$$\|X+Y\|_2 \leqslant \|X\|_2 + \|Y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2.$$

On a donc aussi l'inégalité triangulaire dans ce cas.

Quant à la norme infini, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j| + \max_{j\in[\![1,n]\!]} |y_j| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Le majorant étant indépendant de i, en passant au maximum gauche, on en déduit

$$\|x+y\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i + y_i| \leqslant \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

• **Sur** $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$

Soit I un intervalle (non vide) de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$ des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition des fonctions et du produit d'une fonction par un scalaire, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K})$, on définit

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|.$$

L'application N_∞ est appelée « norme infini » ou norme de la convergence uniforme (cette dernière appellation sera expliquée dans le chapitre **Suites et séries de fonctions**). Elle est bien définie, car si $f \in \mathscr{B}(I,\mathbb{K})$, l'ensemble $\{|f(x)|;\ x \in I\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, elle a donc une borne supérieure.

Prouvons simplement l'inégalité triangulaire, les autres propriétés étant évidentes. Soient f et g deux éléments de $\mathscr{B}(I,\mathbb{K})$. Par définition, pour tout $x \in I$,

$$|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \sup_{y\in I} |f(y)| + \sup_{y\in I} |g(y)|.$$

Le majorant étant indépendant de x, en passant à la borne supérieure à gauche, on en déduit

$$\sup_{x\in I} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup_{y\in I} |f(y)| + \sup_{y\in I} |g(y)|,$$

c'est-à-dire

$$\|f + g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Remarque – Si $[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, on a $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$ car la fonction $|f|$ est continue sur un segment, à valeurs réelles, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ceci montre aussi que pour $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Propriété

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\|.$$

Démonstration – On remarque que $x = (x - y) + y$ et donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$\|x\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$

ce qui implique que

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x - y\|.$$

De même, en écrivant $y = (y - x) + x$, on montre que

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

De ces deux inégalités, on déduit le résultat. □

Remarque – Cette deuxième forme de l'inégalité triangulaire est très utile pour obtenir des informations sur la norme d'un vecteur, à partir d'informations sur sa distance à d'autres vecteurs.

2. Distance associée, boules et sphères

Propriété/Définition : Distance associée à une norme

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. L'application

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array} \right.$$

est appelée **distance** associée à la norme $\|\cdot\|$.

Il est immédiat qu'elle possède les propriétés suivantes :

- Pour tout $(x,y) \in E^2$, $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie),
- Pour tout $(x,y) \in E^2$, $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (séparation),
- Pour tout $(x,y,z) \in E^3$, $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$ (inégalité triangulaire).

Définition – Boules ouvertes, boules fermées, sphères

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

• On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$, défini par :

$$B(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) < r\} = \{x \in E;\ \|x-a\| < r\}.$$

• On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B_f(a,r)$, défini par :

$$B_f(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) \leq r\} = \{x \in E;\ \|x-a\| \leqslant r\}.$$

• On appelle **sphère** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $S(a,r)$, défini par :

$$S(a,r) = \{x \in E;\ d(a,x) = r\} = \{x \in E;\ \|x-a\| = r\}.$$

On remarquera que $S(a,r) = B_f(a,r) \setminus B(a,r)$.

Exemples

- $B(a,0) = \varnothing$, $B_f(a,0) = S(a,0) = \{a\}$.
- $B(0,1)$ et $B_f(0,1)$ sont appelées respectivement boules unité ouverte et fermée de E.

Exercice – Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ muni des normes 1, 2 et infini.

3. Suites d'éléments d'un espace vectoriel

L'un des objectifs majeurs de ce chapitre est l'étude des suites d'éléments de E ; commençons par définir cette notion, par généralisation évidente de la notion de suite réelle ou complexe :

Définition

On appelle **suite** d'éléments de E toute application $u : \mathbb{N} \to E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors $u_n = u(n)$ le terme de rang n de cette suite. La suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

On considère également des suites définies à partir d'un certain rang n_0, c'est-à-dire définies sur l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à n_0. On note $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une telle suite.

Remarque – L'ensemble des suites d'éléments de E est alors muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en définissant, pour deux suites (u_n) et (v_n) et pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \quad \lambda(u_n) = (\lambda u_n).$$

Exemple – Soit $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Alors $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$: c'est la suite des puissances de A.

On définit alors les suites extraites d'une suite d'éléments de E de la même façon que cela a été fait pour les suites réelles ou complexes.

4. Parties, suites et fonctions bornées

Définition

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- Soit A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe $M \geqslant 0$ tel que $A \subset B_f(0,M)$, c'est-à-dire, s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|x\| \leqslant M$.
- Soit (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que (u_n) est **bornée** s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$.
- Soit (F,N) un espace vectoriel normé, A une partie de E et $f : A \to F$ une fonction. On dit que f est **bornée** si $f(A)$ est une partie bornée de F, c'est-à-dire, s'il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in A$, $N(f(x)) \leqslant M$.

Exemples

- Une boule fermée $B_f(a,r)$ de E est une partie bornée. En effet, pour tout $x \in B_f(a,r)$,

$$\|x\| = \|(x-a)+a\| \leqslant \|x-a\| + \|a\| \leqslant r + \|a\|.$$

La définition est donc vérifiée avec $M = r + \|a\|$. On raisonne de même avec les boules ouvertes, ou les sphères.

- On munit $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme infini. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sqrt{n}\,x^n$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_\infty = \sqrt{n}, \quad \text{donc} \quad \|f_n\|_\infty \to +\infty;$$

la définition ne peut être vérifiée pour aucune valeur de M.

- On munit $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ de la norme infini. La fonction

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1]^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y+2z, x^2+y^2+z^2) \end{array}\right.$$

est bornée car pour tout $(x,y,z) \in [0,1]^3$,

$$\|f(x,y,z)\|_\infty = \max\{|x-y+2z|,|x^2+y^2+z^2|\} \leqslant \max\{|x|+|y|+2|z|,x^2+y^2+z^2\} \leqslant 4.$$

5. Parties convexes

Définition – Partie convexe

Soit A une partie de E. On dit que A est **convexe** si

$$\forall\,(a,b) \in A^2, \forall\,\lambda \in [0,1], \quad \lambda a + (1-\lambda)b \in A.$$

Autrement dit, A est convexe si A contient tout segment dont il contient les deux extrémités.

Propriété

Une boule (ouverte ou fermée) est convexe.

Démonstration – Soit $B_f(c,r)$ une boule fermée (on raisonne de même avec une boule ouverte). Soient a et b deux éléments de $B_f(c,r)$ et $\lambda \in [0,1]$; alors

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b - c\| = \|(\lambda a + (1-\lambda)b) - (\lambda c + (1-\lambda)c)\| = \|\lambda(a-c) + (1-\lambda)(b-c)\|.$$

D'après l'inégalité triangulaire et la propriété d'homogénéité, sachant que $\lambda \geqslant 0$ et $1-\lambda \geqslant 0$, on a

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b - c\| \leqslant \lambda\|a-c\| + (1-\lambda)\|b-c\| \leqslant \lambda r + (1-\lambda)r = r.$$

Donc $\lambda a + (1-\lambda)b \in B_f(c,r)$. □

Remarques

• En revanche, une sphère de E de rayon non nul, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x \leqslant 0\}$ ou une couronne de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas convexes.

• La notion de partie convexe ne fait pas intervenir de norme.

6. Effet d'un changement de norme

Certaines des notions que nous avons définies jusqu'à présent dépendent de la norme considérée. Pour illustrer ceci, reprenons l'exemple ci-dessus des fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{n}\, x^n$ appartenant à $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On sait que l'on peut munir E de la norme infini, et que la suite (f_n) n'est pas bornée dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
On peut aussi munir E de la norme $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire usuel sur E ; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|f_n\|_2 = \left(\int_0^1 (\sqrt{n}\, x^n)^2\, dx\right)^{1/2} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{1/2} \leqslant 1.$$

Ainsi la suite (f_n) est bornée dans $(E, \|\cdot\|_2)$!

On **admettra** que lorsque E est de dimension finie, ce phénomène ne peut pas se produire. Plus précisément, les seules notions étudiées dans ce chapitre qui dépendent de la norme considérée, même en dimension finie, sont les notions de distance associée à une norme, de boules et de sphère, et une autre exception qui sera mentionnée. Par exemple, même dans $\mathbb{R}^2$, on a vu que les sphères de centre $(0,0)$ et de rayon 1, pour les trois normes de référence, n'ont pas la même forme.

Dans toute la suite de ce chapitre,
***E* désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.**

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout x de E de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$, on peut définir

$$\|x\|_E = \|(x_1, \ldots, x_n)\|.$$

Alors $\|\cdot\|_E$ est une norme sur E (vérification immédiate).
Un choix très utile est souvent celui donné par

$$\forall\, x \in E, \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|,$$

correspondant à la norme infini sur $\mathbb{K}^n$. On fera parfois référence à cette norme sur E comme norme infini associée à la base $\mathcal{B}$.

Ainsi :

- un espace vectoriel E de dimension finie peut toujours être muni d'une norme ;
- par le moyen précédent, l'étude « topologique » de E se ramène à celle de $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme quelconque.

II. Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Définition – Convergence d'une suite

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite d'éléments de E.

• Soit $\ell \in E$. On dit que (u_n) **converge** vers ℓ (ou que u_n **tend** vers ℓ) si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon.$$

On note ceci $u_n \to \ell$.

• On dit que (u_n) est **convergente** s'il existe $\ell \in E$ tel que (u_n) converge vers ℓ. Le vecteur ℓ est alors unique ; il est appelé **limite** de la suite (u_n), noté $\lim u_n$.

• Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente**.

Remarque – En d'autres termes, (u_n) converge vers ℓ si pour toute boule fermée B centrée en ℓ de rayon strictement positif, tous les termes de la suite sauf un nombre fini appartiennent à B.

Démonstration de l'unicité de ℓ – Supposons l'existence de deux vecteurs ℓ et ℓ' vérifiant la définition. Soient $\varepsilon > 0$ et deux entiers n_0 et n_1 vérifiant la condition ci-dessus pour ℓ et ℓ' respectivement. Alors pour tout $n \geqslant \max(n_0,n_1)$,

$$\|\ell - \ell'\| \leqslant \|\ell - u_n + u_n - \ell'\| \leqslant \|u_n - \ell\| + \|u_n - \ell'\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci étant valable pour tout ε, on a $\|\ell - \ell'\| = 0$, donc $\ell = \ell'$. □

Remarques

• Une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ converge vers ℓ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0. Cette caractérisation est très utile pour prouver une convergence (lorsque l'on a l'intuition de la limite), par des majorations de $\|u_n - \ell\|$.

• Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, la convergence ou divergence d'une suite, et en cas de convergence, la valeur de sa limite, ne dépendent pas de la norme choisie, du fait de la dimension finie.

Exemples

• Illustrons la remarque précédente dans $\mathbb{K}^n$ muni des normes 1 et infini. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ et $\|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty$. Si (u_k) converge vers ℓ dans $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_1)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k - \ell\|_\infty \leqslant \|u_k - \ell\|_1 \quad \text{avec} \quad \|u_k - \ell\|_1 \to 0,$$

et donc (u_k) converge vers ℓ dans $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)$. De même, si (u_k) converge vers ℓ dans $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_\infty)$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|u_k - \ell\|_1 \leqslant n\,\|u_k - \ell\|_\infty \quad \text{avec} \quad \|u_k - \ell\|_\infty \to 0,$$

et donc (u_k) converge vers ℓ dans $(\mathbb{K}^n,\|\cdot\|_1)$.

• La suite $\left(\begin{pmatrix} e^{1/n} & 2/n \\ 3/n & 4/n \end{pmatrix}\right)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En effet, en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^4$ (maximum des valeurs absolues des coefficients de la matrice), on a

$$\left\|\begin{pmatrix} e^{1/n} & 2/n \\ 3/n & 4/n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} e^{1/n} - 1 & 2/n \\ 3/n & 4/n \end{pmatrix}\right\|_\infty \to 0$$

car chacun des termes apparaissant dans le maximum tend vers 0.

Même si la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme, il semble quand même qu'il faille considérer une norme pour vérifier la définition. En fait, ce n'est pas le cas, car l'étude de la convergence d'une suite se ramène à celle de ses coordonnées dans une base :

Théorème – Convergence composante par composante

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Notons, pour tout k,

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} u_{k,i}\, e_i$$

la décomposition de u_k dans la base $\mathcal{B}$.

Alors, pour que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(u_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Dans ce cas, on a

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{k\to+\infty} u_{k,i} \right) e_i,$$

c'est-à-dire que les coordonnées de la limite sont les limites des suites-coordonnées.

Démonstration – Notons $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini sur E associée à la base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que (u_k) converge vers $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i\, e_i$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{k,i} - \ell_i| \leqslant \|u_k - \ell\|_\infty \quad \text{avec} \quad \|u_k - \ell\|_\infty \to 0.$$

On en déduit que $(u_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_i.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $u_{k,i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; il existe des entiers $k_1, \ldots, k_n$ tels que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ et pour tout $k \geqslant k_i$,

$$|u_{k,i} - \ell_i| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i\, e_i$. Alors pour tout $k \geqslant \max(k_1, \ldots, k_n)$,

$$\|u_k - \ell\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |u_{k,i} - \ell_i| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi (u_k) converge vers ℓ. $\square$

Remarques

• Une démonstration semblable montre que (u_k) est bornée si et seulement si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $(u_{k,i})_k$ est bornée.

• Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F, et soit $f : A \subset E \to F$ une fonction avec $f = f_1\, \varepsilon_1 + \cdots + f_n\, \varepsilon_n$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i : A \to \mathbb{K}$. Les fonctions f_i sont les fonctions-coordonnées de f dans la base $\mathcal{C}$.
Par exemple, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[X]$ la fonction définie par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (x + y)X^2 + \cos(xy)X + y^2.$$

Les fonctions-coordonnées de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ sont les trois fonctions

$$(x, y) \mapsto x + y, \quad (x, y) \mapsto \cos(xy) \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto y^2.$$

Pour que f soit bornée, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i soit bornée.

• On parle de convergence, ou de suite ou fonction bornée « composante par composante ». L'intérêt principal de ces résultats est de pouvoir se ramener à des suites ou à des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ (les suites $(u_{k,i})_k$, ou les fonctions f_i).
Par exemple, une suite de matrices converge si et seulement si chacune de ses suites-coefficients converge. De même pour une suite de polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$. En revanche, cela n'a pas de sens pour nous dans $\mathbb{K}[X]$, qui n'est pas de dimension finie.

• Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors une suite $\big((x_k,y_k)\big)$ d'éléments de $E\times F$ converge si et seulement si les deux suites (x_k) et (y_k) convergent, et dans ce cas,

$$\lim\,(x_k,y_k) = (\lim x_k, \lim y_k)\,.$$

En effet, si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, et $(f_1,\dots,f_n)$ une base de F, alors

$$\big((e_1,0_F),\dots,(e_p,0_F),(0_E,f_1),\dots,(0_E,f_n)\big)$$

est une base de $E\times F$. Il suffit alors d'appliquer le résultat précédent.

Propriété

Toute suite convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé est bornée.
La réciproque est fausse.

Démonstration – On utilise les notations précédentes. Appliquons la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$: il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $\|u_n-\ell\|\leqslant 1$. D'après la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit $\|u_n\|-\|\ell\|\leqslant 1$, et donc, $\|u_n\|\leqslant\|\ell\|+1$ pour tout $n\geqslant n_0$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\|u_n\|\leqslant \max(\|u_0\|,\dots,\|u_{n_0-1}\|,\|\ell\|+1).$$

L'exemple de $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ montre que la réciproque est fausse. □

Propriété – Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes d'éléments de E, et (α_n) une suite convergente d'éléments de $\mathbb{K}$. Soit $n_0\in\mathbb{N}$. Alors :

• La suite (u_n+v_n) est convergente et $\lim(u_n+v_n) = \lim u_n + \lim v_n$.

• La suite $(\alpha_n u_n)$ est convergente et $\lim(\alpha_n u_n) = \lim\alpha_n\cdot\lim u_n$.

• Si $\alpha_n\neq 0$ pour tout $n\geqslant n_0$ et si $\lim\alpha_n\neq 0$, alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{\alpha_n}\right)_{n\geqslant n_0}$ est convergente et

$$\lim\left(\frac{u_n}{\alpha_n}\right) = \frac{\lim u_n}{\lim\alpha_n}.$$

Démonstration – Il suffit de raisonner composante par composante, et d'appliquer les résultats correspondants pour les suites à valeurs scalaires. □

De la même façon, on obtient le résultat suivant :

Propriété

Soit (u_n) une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell\in E$.
Alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

III. Vocabulaire de topologie

Définition – Points intérieurs à une partie

Soient A une partie de E, et a un point de A. On dit que a est un **point intérieur** à A si :

$$\exists\, r>0\,;\ B(a,r)\subset A.$$

En d'autres termes, a est intérieur à A si on peut trouver une boule ouverte centrée en a, de rayon strictement positif, et incluse dans A.

Exemples

- 2 est intérieur à [0,3] car $2 \in B(2, 0.5) =]1.5, 2.5[\subset [0,3]$ (ici la norme est la valeur absolue).
- 0 n'est pas intérieur à [0,3] : pour tout $r > 0$, $-r/2 \in B(0,r)$ mais $-r/2 \notin [0,3]$.

Remarque – Soit A une partie de E. Soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge vers un point a intérieur à A. Alors, pour n assez grand, $x_n \in A$.

En effet, soit $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$. En appliquant la définition de la limite avec $\varepsilon = r/2$, on obtient l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|x_n - a\| < r$, et donc, $x_n \in B(a,r) \subset A$.

Définition – Intérieur d'une partie

Soit A une partie de E. On appelle **intérieur** de A l'ensemble, noté $\mathring{A}$, des points intérieurs à A.

Remarque – On a toujours $\mathring{A} \subset A$.

Définition – Partie ouverte

Une partie A de E est dite **ouverte** (on dit aussi que A est un ouvert de E) si tout point de A est intérieur à A, *i.e.* :

$$\forall a \in A, \exists r > 0\,;\ B(a,r) \subset A.$$

Ceci équivaut à : $\mathring{A} = A$.

Propriété

Une boule ouverte est un ouvert.

Démonstration – Le cas d'une boule ouverte de rayon 0 est trivial. Soient $x \in E$ et $R > 0$. Montrons que $B(x,R)$ est un ouvert de E. On fixe donc $a \in B(x,R)$, et on définit

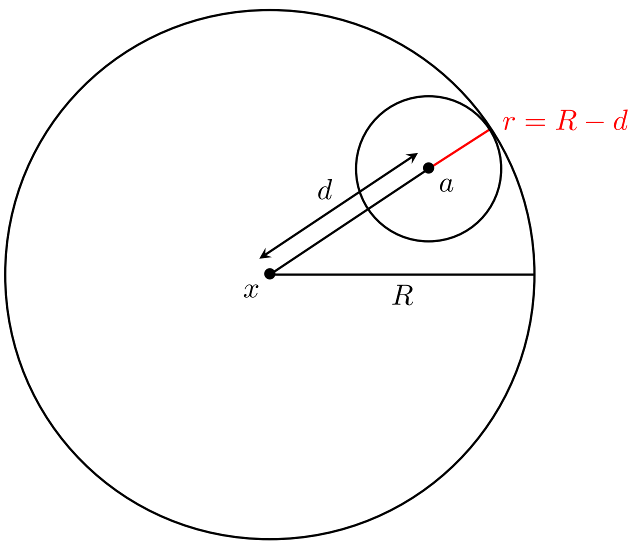
$$d = d(a,x) = \|x - a\|.$$

Alors $d < R$ car $a \in B(x,R)$, et pour tout y appartenant à $B(a, R-d)$, on a

$$\|x - y\| \leq \|x - a\| + \|a - y\| = d + \|y - a\| < d + R - d = R,$$

donc $y \in B(x,R)$. Ainsi, en posant $r = R - d > 0$, on a : $B(a,r) \subset B(x,R)$. Cette construction étant possible pour tout $a \in B(x,R)$ (avec r dépendant de a, ce qui est tout à fait possible au vu de la définition précédente), on a le résultat.

La démonstration est illustrée sur la figure suivante, dans le cas de la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$:



Exemples

- Les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ sont des ouverts.
- Pour tout $A \subset E$, $\mathring{A}$ est un ouvert.
- Le demi-plan

$$\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On vérifie la définition avec la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|_2$.
Soit $a = (x,y) \in \mathcal{P}$. Notons $r = y > 0$. Pour tout $p = (u,v)$ dans $B(a,r)$, on a

$$|y - v| \leq \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2} = \|p - a\|_2 < r = y,$$

donc

$$y - v \leq |y - v| < y.$$

On en déduit que $v > 0$, donc $p \in \mathcal{P}$. Ainsi, $B(a,r) \subset \mathcal{P}$. $\square$

De même que l'on a défini les points situés « à l'intérieur » de A, on peut définir les points « qui touchent » A (sans nécessairement appartenir à A) : il s'agit, intuitivement, des points situés arbitrairement près de points de A :

Définition – Points adhérents à une partie

Soient A une partie de E et $a \in E$. On dit que a est un point **adhérent** à A si

$$\forall r > 0, \quad B(a,r) \cap A \neq \varnothing.$$

Exemples

- Tout point de A est adhérent à A.
- 4 est adhérent à $[-2, 4[$.

Propriété – Caractérisation séquentielle des points adhérents

Soient A une partie de E et $a \in E$. Le point a est adhérent à A si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Si a est adhérent à A, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $x_n \in B(a,1/n) \cap A$. Alors $x_n \to a$ car pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|x_n - a\| < \frac{1}{n}.$$

De plus (x_n) est une suite d'éléments de A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soient $r > 0$ et (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a. Comme $x_n \to a$, pour n assez grand, $x_n \in B(a,r)$ et même $x_n \in B(a,r) \cap A$. Cet ensemble est donc non vide, et ce pour tout $r > 0$, donc a est adhérent à A. $\square$

Exemple – La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est adhérente à l'ensemble des matrices inversibles, car elle est limite de la suite des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n \end{pmatrix}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Définition – Adhérence d'une partie

Soit A une partie de E. On appelle **adhérence** de A l'ensemble, noté $\overline{A}$, des points adhérents à A.

Remarque – On a toujours $A \subset \overline{A}$.

Définition – Partie fermée

Une partie A de E est dite **fermée** (on dit aussi que A est un fermé de E) si tous les points adhérents à A appartiennent à A (ce qui équivaut au fait que $\overline{A} = A$).

Exemples

- L'adhérence de $[0,1[$ est $[0,1]$.
- Pour tout $a \in E$ et $r > 0$, l'adhérence de $B(a,r)$ est $B_f(a,r)$.
- $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $A \subset E$, $\overline{A}$ est un fermé.

On déduit en particulier de la propriété précédente une caractérisation des parties fermés :

Propriété – Caractérisation séquentielle des fermés

Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- A est une partie fermée.
- Pour toute suite convergente (x_n) d'éléments de A, on a $\lim x_n \in A$.

Exemple – Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Soit (x_n,y_n) une suite d'éléments de $\mathbb{U}$ convergeant vers $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n^2 + y_n^2 = 1,$$

de sorte qu'à la limite, on obtient $x^2 + y^2 = 1$. Le point (x,y) appartient donc à $\mathbb{U}$. On a donc montré que $\mathbb{U}$ est fermé.

Plus généralement, on obtient :

Propriété

Toute boule fermée est un fermé. Toute sphère est un fermé.

Attention ! Les notions d'ouverts et de fermés ne sont pas contraires l'une de l'autre : il est immédiat que E et $\varnothing$ sont ouverts *et* fermés.

Le lien est en fait le suivant :

Propriété

Une partie A de E est fermée si et seulement si son complémentaire dans E est ouvert. On rappelle que le complémentaire de A est défini par $\complement A = E \setminus A = \{x \in E;\ x \notin A\}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A fermé, et soit $a \in \complement A$. On veut montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \complement A$. Si ce n'est pas le cas, pour tout $r > 0$, il existe $x \in B(a, r)$ tel que $x \notin \complement A$, c'est-à-dire $x \in A$. Le point a est donc adhérent à A, qui A est fermé, donc $a \in A$, ce qui est absurde. D'où le résultat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\complement A$ ouvert, et soit $a \in \overline{A}$. Si $a \notin A$, sachant que $\complement A$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \complement A$. Or a est adhérent à A, donc il existe $x \in A$ tel que $x \in B(a, r)$: c'est absurde. Donc $a \in A$, ce qui prouve que A est fermé. □

Propriété (Hors-programme)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, U_1, …, U_p des ouverts de E, et $F_1, \ldots, F_p$ des fermés de E. Alors :

- $U_1 \cup \cdots \cup U_p$ et $U_1 \cap \cdots \cap U_p$ sont des ouverts.
- $F_1 \cup \cdots \cup F_p$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_p$ sont des fermés.

L'ensemble des ouverts de E et l'ensemble des fermés de E sont stables par réunion finie et intersection finie.

Démonstration

• Soit $a \in U_1 \cup \cdots \cup U_p$. Il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $a \in U_i$. Comme U_i est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U_i$. Alors $B(a, r) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_p$, donc $U_1 \cup \cdots \cup U_p$ est ouvert.

• Soit $a \in U_1 \cap \cdots \cap U_p$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a,r_i) \subset U_i$. Posons $r = \min\{r_i;\ i \in [\![1, p]\!]\}$. On a alors $r > 0$ et $B(a, r) \subset B(a,r_i)$ pour tout i, donc

$$B(a, r) \subset U_1 \cap \cdots \cap U_p,$$

ce qui montre que $U_1 \cap \cdots \cap U_p$ est ouvert.

• Pour les deux points concernant les fermés, il suffit de passer au complémentaire et d'utiliser les deux premiers points ; en effet,

$$\complement\left(\bigcap_{i=1}^{p} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{p} \left(\complement F_i\right) \quad \text{et} \quad \complement\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{p} \left(\complement F_i\right).$$ □

Définition – Frontière d'une partie

Soit A une partie de E. On appelle **frontière** de A l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$, constitué des points de E qui sont adhérents à A mais pas intérieurs à A.

Bien sûr, cette notion coïncide avec l'intuition que suggère son nom : la frontière correspond au « bord » de l'ensemble. Par exemple, la frontière d'une boule $B_f(a, r)$ ou $B(a, r)$ de rayon non nul est la sphère $S(a, r)$.

IV. Fonctions entre espaces vectoriels normés : limite et continuité

Dans toute la suite, E et F désignent deux espaces vectoriels normés de dimension finie, A une partie de E et f une fonction définie sur A et à valeurs dans F. On peut munir E d'une norme $\|\cdot\|_E$ et F d'une norme $\|\cdot\|_F$.

1. Définitions

Définition – Limite en un point

• Soit a un point adhérent à A ($a \in \overline{A}$) et $b \in F$.
On dit que f **a pour limite** b en a (ou que $f(x)$ **tend** vers b lorsque x tend vers a) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0;\ \forall x \in A, \quad [\|x-a\|_E \leqslant \eta] \Rightarrow [\|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon].$$

On note ceci $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$.
• On dit que f **a une limite** en a s'il existe $b \in F$ tel que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$. Le vecteur b est alors unique ; il est appelé **limite** de f en a et noté $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_a f$.

Démonstration de l'unicité de b

Soient b et b' deux vecteurs de F vérifiant la définition ; soient $\varepsilon > 0$ et deux réels $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ vérifiant la condition ci-dessus pour b et b' respectivement. Alors pour tout $x \in A$ tel que $\|x-a\|_E \leqslant \min(\eta,\eta')$,

$$\|b-b'\|_F = \|b-f(x)+f(x)-b'\|_F \leqslant \|f(x)-b\|_F + \|f(x)-b'\|_F \leqslant 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $b = b'$. □

Remarque – Pourquoi définir la limite de f en un point a *adhérent* à A ? Dans la définition de point adhérent, on peut clairement remplacer $B(a,r)$ par $B_f(a,r)$: les points adhérents à A sont exactement les points de E pour lesquels, pour tout $\eta > 0$, $B_f(a,\eta) \cap A$ n'est pas vide, et donc ceux pour lesquels l'éventualité « $x \in A$ et $\|x-a\|_E \leqslant \eta$ » se présente.

Définition – Limite en $\pm\infty$

• Soient $m \in \mathbb{R}$, f une fonction définie sur $]m,+\infty[$ à valeurs dans F et $b \in F$.
On dit que f a pour limite b en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 ;\ \forall x \geqslant M, \quad \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

• Soient $m \in \mathbb{R}$, f une fonction définie sur $]-\infty,m[$ à valeurs dans F et $b \in F$.
On dit que f a pour limite b en $-\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 ;\ \forall x \leqslant -M, \quad \|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon.$$

Définition – Limite infinie

• Soient f une fonction définie sur A à valeurs réelles et a un point adhérent à A. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a si

$$\forall K > 0, \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in A, \quad [\|x-a\|_E \leqslant \eta] \Rightarrow [f(x) \geqslant K].$$

• Soient f une fonction définie sur A à valeurs réelles et a un point adhérent à A. On dit que f a pour limite $-\infty$ en a si

$$\forall K > 0, \exists \eta > 0\,;\ \forall x \in A, \quad [\|x-a\|_E \leqslant \eta] \Rightarrow [f(x) \leqslant -K].$$

On vérifie aisément que l'unicité de la limite est toujours vérifiée.

Propriété/Définition – Continuité en un point

Lorsque $a \in A$ et f admet une limite en a, on a nécessairement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Dans ce cas, on dit que f est **continue** en a.

Démonstration – Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $b = \lim_a f$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de A vérifiant $\|x-a\|_E \leqslant \eta$, on ait $\|f(x)-b\|_F \leqslant \varepsilon$. En appliquant ceci à $x = a$ (ce qui est possible car $a \in A$), on a donc $\|f(a) - b\|_F \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$. Ainsi $b = f(a)$, c'est-à-dire

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

□

Définition – Continuité sur une partie

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A. Ceci équivaut à :

$$\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0;\ \forall x \in A,\ [\|x-a\|_E \leqslant \eta] \Rightarrow [\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon].$$

2. Caractérisation séquentielle de la limite

Propriété – Caractérisation séquentielle de la limite

Soit a un point adhérent à A ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- La fonction f possède une limite en a.
- Pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite.

Dans ce cas, pour toute suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n).$$

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Notons $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Soit (a_n) une suite d'éléments de A convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de A vérifiant $\|x-a\|_E \leqslant \eta$, on ait $\|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon$. Or $a_n \to a$, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\|a_n - a\|_E \leqslant \eta$. Alors, pour un tel n,

$$\|f(a_n) - b\|_F \leqslant \varepsilon,$$

d'où le résultat.

$\boxed{\Leftarrow}$ Commençons par montrer que, avec les notations de l'énoncé, la limite de $(f(a_n))$ ne dépend pas de la suite (a_n). Soient donc (a_n) et (α_n) deux suites d'éléments de A qui convergent vers a. On construit une suite (c_n) en posant, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $c_{2p} = a_p$ et $c_{2p+1} = \alpha_p$: (c_n) est construite en écrivant alternativement les termes de (a_n) et (α_n). En particulier, la suite (c_n) converge vers a, et donc la suite $(f(c_n))$ est convergente. Or les suites $(f(a_n))$ et $(f(\alpha_n))$ sont extraites de $(f(c_n))$, donc

$$\lim f(a_n) = \lim f(c_n) = \lim f(\alpha_n),$$

qui est le résultat annoncé.

Notons alors b la valeur commune de la limite de toutes les suites $(f(a_n))$ où (a_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers a. Pour montrer que f a une limite en a égale à b, on raisonne par l'absurde : supposons au contraire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leqslant \eta$ mais $\|f(x) - b\|_F > \varepsilon$. En appliquant cela avec $\eta = 1/n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ on construit une suite (a_n) d'éléments de A telle que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|a_n - a\|_E \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \|f(a_n) - b\|_F > \varepsilon.$$

Alors $a_n \to a$ mais $(f(a_n))$ ne converge pas vers b ; c'est absurde, et on en déduit le résultat. □

Remarques

• L'implication directe est très souvent employée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} a_n \to a \\ f \text{ est continue en } a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(a_n) \to f(a).$$

• Cette caractérisation permet de ramener de nombreuses questions de limites de fonctions à des questions de limites de suites, pour lesquelles on a déjà de nombreuses propriétés.

• On a une propriété analogue pour les limites en $\pm\infty$ lorsque $E = \mathbb{R}$.

3. Limite et continuité composante par composante, opérations

Propriété – Limite ou continuité composante par composante

Soient $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F et $f : A \to F$ une fonction. Notons

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \, \varepsilon_i$$

la décomposition de f dans la base $\mathcal{C}$, c'est-à-dire que les fonctions $f_i : A \to \mathbb{K}$ sont les fonctions-coordonnées de f dans la base $\mathcal{C}$.

Alors :

1. Soit a un point adhérent à A. Pour que f ait une limite en a, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i ait une limite en a. Dans ce cas, on a

$$\lim_a f = \sum_{i=1}^{n} (\lim_a f_i) \, \varepsilon_i,$$

c'est-à-dire que les coordonnées de la limite sont les limites des fonctions-coordonnées.

2. Soit $a \in A$. Pour que f soit continue en a, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i soit continue en a.

3. Pour que f soit continue sur A, il faut et il suffit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, f_i soit continue sur A.

Démonstration – Il suffit d'utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et la propriété de convergence composante par composante pour les suites. □

Propriété – Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies sur A à valeurs dans F, et α une fonction définie sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. Soit a un point adhérent à A. On suppose que f, g et α ont une limite en a.

Alors :

- La fonction $f+g$ a une limite en a et $\lim_a(f+g) = \lim_a f + \lim_a g$.
- La fonction αf a une limite en a et $\lim_a(\alpha f) = (\lim_a \alpha)(\lim_a f)$.
- Si $\alpha(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$ et si $\lim_a \alpha \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{\alpha}$ a une limite en a et
$$\lim_a \left(\frac{f}{\alpha}\right) = \frac{\lim_a f}{\lim_a \alpha}.$$

Toutes ces propriétés sont vraies si $E = \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$, ainsi que les cas déjà connus pour des limites infinies ; attention cependant aux formes indéterminées.

2. Lorsque a appartient à A, on peut traduire ces propriétés en termes de continuité en a.

3. On peut traduire ces propriétés en termes de continuité sur A.

En particulier, l'ensemble $\mathcal{C}^0(A,F)$ des fonctions continues sur A à valeurs dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pour les lois usuelles).

Démonstration – Il suffit de démontrer le point **1**. On se ramène aux propriétés analogues sur les suites grâce à la caractérisation séquentielle de la limite. □

Propriété – Composition

Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie, A une partie de E et B une partie de F. Soient $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux fonctions. On suppose que $f(A) \subset B$, de sorte que la fonction $g \circ f : A \to G$ est bien définie.

1. Soit a un point adhérent à A. On suppose que f a une limite b en a. Alors :

- b est adhérent à B.

  Si de plus g a une limite c en b, on a :
- $g \circ f$ a une limite en a et $(g\circ f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} c$.

2. Soit $a \in A$. Si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g\circ f$ est continue en a.

3. Si f est continue sur A et si g est continue sur B, alors $g \circ f$ est continue sur A.

Démonstration – Il suffit de démontrer le point **1**.

• Le point a est adhérent à A, donc il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers a. Sachant que f a pour limite b en a, on a donc $f(a_n) \to b$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \in f(A) \subset B$. On a donc construit une suite d'éléments de B qui converge vers b : b est adhérent à B.

• Soit (a_n) une suite d'éléments de A qui converge vers a. Alors sachant que f a pour limite b en a et que g a pour limite c en b, on a $f(a_n) \to b$ et $g(f(a_n)) \to c$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite (sens réciproque, appliqué à $g\circ f$), on obtient que $g \circ f$ a pour limite c en a. □

Propriété – Continuité des applications polynomiales

Toute application polynomiale f définie sur $\mathbb{K}^n$ est continue (par application polynomiale, on entend que chaque fonction-coordonnée de f dans une base de l'espace d'arrivée est un polynôme en les composantes $x_1, \dots, x_n$ de la variable x).

Démonstration – D'après les deux premières propriétés de ce paragraphe, il suffit de prouver que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ est continue, ce qui est immédiat. $\square$

Remarque – On montre de la même façon que toute application f définie sur E, polynomiale en les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ de sa variable x dans une base de E, est continue.

Exemples

• L'application $(x, y, z) \mapsto (x^2 + 3xy + 4xz^2, xz - y^3)$ est polynomiale, donc continue, sur $\mathbb{R}^3$.

• L'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto M_n(x_1, \ldots, x_n)$ (où $M_n(x_1, \ldots, x_n)$ est la matrice de Vandermonde associée à $x_1, \ldots, x_n$) est polynomiale, donc continue, sur $\mathbb{K}^n$.

• L'application $A \mapsto A^2$ est polynomiale, donc continue, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; pour tout $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$, le coefficient en position (i, j) de A^2 est $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, a_{k,j}$; ceci définit une fonction polynomiale en les coefficients de A.

4. Fonctions Lipschitziennes

Définition – Fonction Lipschitzienne

Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est k-Lipschitzienne si

$$\forall\, (x,y) \in A^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\, \|x - y\|_E.$$

On dit que f est Lipschitzienne s'il existe k tel que f est k-Lipschitzienne.

Remarque – Le fait pour une fonction d'être Lipschitzienne ne dépend pas des normes choisies, mais le fait d'être k-Lipschitzienne en dépend !

Exemples

• La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est Lipschitzienne sur $[1, +\infty[$: en effet, f est dérivable sur $[1, +\infty[$ avec, pour tout $x \geqslant 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a donc, pour tout $(x,y) \in [1, +\infty[^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

Le théorème des accroissements finis est un outil très utile pour prouver qu'une fonction est Lipschitzienne.

• Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, l'application $x \mapsto \|x\|$ de E dans $\mathbb{R}$ est 1-Lipschitzienne : en effet, d'après la seconde forme de l'inégalité triangulaire, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\|.$$

Remarques

• Il est très facile de prouver que l'ensemble des fonctions Lipschitziennes de $A \subset E$ dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En revanche, l'ensemble des fonctions k-Lipschitziennes de A dans F, avec $k > 0$ fixé, n'en est pas un.

• On a également une propriété de stabilité vis-à-vis de la composition : soient $(E,\|\cdot\|_E)$, $(F,\|\cdot\|_F)$ et $(G,\|\cdot\|_G)$ trois espaces vectoriels normés, A une partie de E et B une partie de F. Soient $f : A \to F$ et $g : B \to G$ deux fonctions. On suppose que $f(A) \subset B$, de sorte que la fonction $g \circ f$ est bien définie.

Si f est k_1-Lipschitzienne et g est k_2-Lipschitzienne, alors $g \circ f$ est k_1k_2-Lipschitzienne.

En effet, pour tout $(x,y) \in A^2$,

$$\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)\|_G \leqslant k_2\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k_2\, k_1\, \|x - y\|_E.$$

Propriété

Toute fonction Lipschitzienne est continue. La réciproque est fausse.

Démonstration – Avec les notations précédentes, soit f une fonction k-Lipschitzienne. Si $k = 0$, f est constante et le résultat est évident. Sinon, soient $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $(x,y) \in A^2$,

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant k\,\|x - y\|_E.$$

En particulier, si $\|x - a\|_E \leqslant \varepsilon/k$, alors

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leqslant k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Donc f est continue en a, et ce pour tout $a \in A$. On voit même que le nombre $\eta = \varepsilon/k$ permettant de vérifier la définition de la continuité est indépendant de x : le caractère Lipschitzien est donc beaucoup plus fort que la continuité en chaque point.

Pour montrer que la réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas Lipschitzienne, bien qu'elle soit continue. En effet, supposons au contraire qu'il existe k tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^2 - y^2| \leqslant k|x - y|$. Alors, pour tout x et y distincts, on a

$$|x + y|\,|x - y| \leqslant k|x - y| \quad \text{d'où} \quad |x + y| \leqslant k,$$

ce qui est absurde lorsque par exemple $y = 0$ et x tend vers $+\infty$. □

V. Propriétés des fonctions continues à valeurs réelles

1. Ensembles de niveaux d'une fonction continue

Propriété

Soit f une application continue sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors :
- L'ensemble $\{x \in E;\ f(x) > 0\}$ est une partie ouverte de E.
- L'ensemble $\{x \in E;\ f(x) \geqslant 0\}$ est une partie fermée de E.
- L'ensemble $\{x \in E;\ f(x) = 0\}$ est une partie fermée de E.

Démonstration

• Soit $a \in E$ tel que $f(a) > 0$; par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x de E vérifiant $\|x - a\|_E \leqslant \eta$, on ait $|f(x) - f(a)| \leqslant f(a)/2$, et donc

$$f(x) \geqslant f(a) - \frac{f(a)}{2} = \frac{f(a)}{2} > 0.$$

En particulier, $B(a,\eta) \subset \{x \in E;\ f(x) > 0\}$. Il en résulte que $\{x \in E;\ f(x) > 0\}$ est ouvert.

• On utilise la caractérisation séquentielle des fermés : soit (a_n) une suite d'éléments de $\{x \in E;\ f(x) \geqslant 0\}$ qui converge vers $a \in E$. Pour tout n, $f(a_n) \geqslant 0$, et f étant continue, on sait que $f(a_n) \to f(a)$. On en déduit que $f(a) \geqslant 0$, c'est-à-dire, $a \in \{x \in E;\ f(x) \geqslant 0\}$. Cet ensemble est donc fermé.

• On raisonne de même en passant à la limite dans la relation $f(a_n) = 0$. □

Remarques

• Bien sûr, en changeant f en $-f$, on prouve des résultats analogues pour $f(x) < 0$ et $f(x) \leqslant 0$.

• Cette dernière propriété est très utile pour prouver que des parties de E sont ouvertes, ou fermées : on peut parfois voir ces parties comme ensembles de niveau $f(x) > 0$, $f(x) \geqslant 0$ ou $f(x) = 0$ d'une application **continue à valeurs réelles** f bien choisie.

Exemples

• L'exemple du cercle unité $\mathbb{U}$ traité plus haut entre dans ce cadre : on a

$$\mathbb{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - 1 = 0\},$$

la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$ étant continue car polynomiale.

• Revenons sur l'exemple du demi-plan

$$\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$$

Montrons par cette méthode qu'il s'agit d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$: l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & y \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$. De plus, $\mathcal{P} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) > 0\}$. D'après la propriété précédente, $\mathcal{P}$ est donc un ouvert.

• L'ensemble $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles d'ordre n est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: en effet, une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On en déduit donc que

$$\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R});\ \det(A) < 0\} \cup \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R});\ \det(A) > 0\}.$$

Nous montrerons bientôt que la fonction déterminant est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$ est la réunion de deux ouverts de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc une partie ouverte.

• L'ensemble $\mathcal{O}$ des trinômes à coefficients réels qui ont deux racines réelles distinctes est une partie ouverte de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit en effet l'application discriminant

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ aX^2 + bX + c & \mapsto & b^2 - 4ac \end{array} \right.$$

et $\psi : aX^2 + bX + c \mapsto a$. Alors

$$\mathcal{O} = (\{P \in \mathbb{R}_2[X];\ \psi(P) < 0\} \cup \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ \psi(P) > 0\}) \cap \{P \in \mathbb{R}_2[X];\ \phi(P) > 0\}.$$

Or, ϕ et ψ sont continues sur $\mathbb{R}_2[X]$ (c'est immédiat pour ψ, et ϕ est polynomiale en les coordonnées de sa variable). Donc $\mathcal{O}$ est une partie ouverte comme intersection de deux ouverts, le premier étant lui-même la réunion de deux ouverts. De la même façon, on montre que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant deux racines complexes conjuguées distinctes est un ouvert, et que l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant au plus une racine (éventuellement double) est un fermé.

2. Extrema de fonctions continues

Théorème des bornes atteintes (admis : démonstration non exigible)

Si K est une partie fermée, bornée et non vide de E et $f : K \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarque – Ce théorème est bien sûr une généralisation du théorème selon lequel une fonction continue sur un segment, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

Exemple – La boule unité B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour la norme infini est fermée, bornée et non vide. La fonction déterminant, qui est continue sur B, est donc bornée sur B et atteint ses bornes. Ainsi, parmi les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont compris entre -1 et 1, il en existe au moins une dont le déterminant est maximal.

VI. Le cas des applications linéaires et multilinéaires

Théorème – Caractère Lipschitzien des applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors u est Lipschitzienne.

Démonstration – Munissons E d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et de la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ associée à cette base, et F d'une norme $\|\cdot\|_F$. Soit $x \in E$ dont la décomposition dans la base $\mathcal{B}$ est $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$. Alors par linéarité de u,

$$\|u(x)\|_F = \|x_1 u(e_1) + \cdots + x_n u(e_n)\|_F \leqslant |x_1| \|u(e_1)\|_F + \cdots + |x_n| \|u(e_n)\|_F,$$

d'après l'inégalité triangulaire. Alors

$$\|u(x)\|_F \leqslant [\|u(e_1)\|_F + \cdots + \|u(e_n)\|_F] \, \|x\|_\infty.$$

Posons $k = \|u(e_1)\|_F + \cdots + \|u(e_n)\|_F$. Soit $(x,y) \in E^2$; alors par linéarité de u et d'après l'inégalité précédente,

$$\|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leqslant k \, \|x - y\|_\infty,$$

d'où le résultat, car la notion de fonction Lipschitzienne ne dépend pas des normes choisies sur E et F. $\square$

Attention ! La linéarité de u est essentielle pour que l'inégalité $\|u(x)\|_F \leqslant k \, \|x\|_\infty$, valable pour $x \in E$, entraîne que u est Lipschitzienne.

Exemple – L'application Trace, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, est linéaire entre deux espaces de dimension finie, donc Tr est Lipschitzienne. Si $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme infini (et $\mathbb{K}$ de la valeur absolue ou du module), elle est en fait n-Lipschitzienne car pour tout $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$|\operatorname{Tr}(M)| = \left| \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |m_{i,i}| \leqslant n \max_{i,j} |m_{i,j}| = n \, \|M\|_\infty.$$

Si $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme 1, définie par $\|M\|_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |m_{i,j}|$, elle est 1-Lipschitzienne car

$$|\operatorname{Tr}(M)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |m_{i,i}| \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} |m_{i,j}| = \|M\|_1.$$

On sait que le caractère Lipschitzien entraîne la continuité, on a donc le résultat suivant :

Corollaire

Une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie est continue.

On a aussi un résultat de continuité pour les applications multilinéaires :

Propriété – Continuité des applications multilinéaires

Soit p un entier avec $p \geqslant 2$ et $f : (\mathbb{K}^n)^p \to F$ une application multilinéaire, c'est-à-dire, linéaire par rapport à chacune de ses p variables.
Alors f est continue.

Démonstration – On notera $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $j \in [\![1,p]\!]$, soit $x_j = (x_1^j,\dots,x_n^j) = x_1^j e_1 + \cdots + x_n^j e_n \in \mathbb{K}^n$. Par multilinéarité de f, on a

$$f(x_1,\dots,x_p) = \sum_{(i_1,\dots,i_p)\in[\![1,n]\!]^p} x_{i_1}^1 \cdots x_{i_p}^p \, f(e_{i_1},\dots,e_{i_p}).$$

En décomposant tous les vecteurs $f(e_{i_1},\dots,e_{i_p})$ dans une base de F, on voit que chaque coordonnée de $f(x_1,\dots,x_p)$ dans cette base définit une fonction polynomiale en les x_i^j pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, et donc, définit une fonction continue. On en déduit que f est continue. □

Remarque – Si E et F sont de dimension finie, on généralisera sans difficulté la propriété précédente pour montrer qu'une application $f : E^p \to F$ multilinéaire est continue.

Exemples

• L'application déterminant, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, est continue car multilinéaire par rapport aux colonnes de sa variable.

• Si $(E, (\cdot\,|\,\cdot))$ est un espace euclidien, alors le produit scalaire $(\cdot\,|\,\cdot)$ est une application continue. Si de plus E est orienté de dimension 3, alors le produit vectoriel $\wedge$ est une application continue. En effet, dans ces deux cas, l'application considérée est bilinéaire.

• Le produit matriciel

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \mapsto & AB \end{array}\right.$$

est continu car bilinéaire.

On peut donc passer à la limite dans un déterminant, un produit scalaire en dimension finie, un produit vectoriel, un produit de matrices.