Espaces vectoriels normés (corrigé niveau 3).

Normes.

46. On peut partir de : $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\| = \left\|\left(\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|x\|}\right)+\left(\dfrac{y}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right)\right\| \le \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|}+\|y\|.\left|\dfrac{1}{\|x\|}-\dfrac{1}{\|y\|}\right| = \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|}+\dfrac{\left|\|y\|-\|x\|\right|}{\|x\|}$.

La deuxième inégalité triangulaire donne alors : $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\| \le \dfrac{\|x-y\|}{\|x\|}+\dfrac{\|x-y\|}{\|x\|} = 2.\dfrac{\|x-y\|}{\|x\|}$.

Mais cette relation est encore vraie en échangeant les rôles de x et de y et donc : $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\| \le 2.\dfrac{\|x-y\|}{\|y\|}$.

Par conséquent la quantité étudiée est inférieure ou égale à la plus petite de ces deux valeurs, donc :

$$\left\|\dfrac{x}{\|x\|}-\dfrac{y}{\|y\|}\right\| \le 2.\|x-y\|.\min\left(\dfrac{1}{\|x\|},\dfrac{1}{\|y\|}\right) = \dfrac{2.\|x-y\|}{\max(\|x\|,\|y\|)}.$$

Suites et comparaison de normes.

47. La réponse est non.

Supposons qu'une telle norme existe dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et considérons : $A=\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$, et : $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Elles sont semblables car si A représente : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, dans : $\mathcal{B} = (e_1,e_2)$, alors B représente u dans la base $(2.e_1,e_2)$.

Donc on devrait avoir : $N(A)=N(B)$.

Mais on a aussi : $A=2.B$, donc on doit avoir : $N(A)=2.N(B)$,

ce qui est impossible puisque les normes de ces matrices sont non nulles.

On généralise pour des valeurs de n supérieures avec les matrices par blocs :

$A'=\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}$, et : $B'=\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Remarque : on aurait pu dire qu'il existe des classes de matrices semblables (toutes semblables entre elles, donc qui devraient avoir la même norme) non bornées pour la norme infinie, donc non bornées pour n'importe quelle norme, ce qui est incompatible.

48. a. Puisque N_∞ est une norme sur E, il n'y a que le cas de nullité à examiner pour prouver que n est bien une norme sur E.

Or si pour : $f \in$ E, on a : $n(f)=0$, alors $f+f'$ est nulle sur [0,1].

Donc comme solution d'une équation différentielle sur [0,1], on en déduit que :

$\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall$ t $\in$ [0,1], $f(t)=\lambda.e^{-t}$, et comme : $f(0)=0$, on en déduit bien que f est nulle.

b. Il suffit d'écrire :

$\forall\ f \in$ E, $\forall\ x \in$ [0,1], $f(x)-f(0)=f(x)=\int_0^x f'(t).dt$, et : $|f(x)| \le \int_0^x |f'(t)|.dt \le x.N_\infty(f') \le N_\infty(f')$,

d'où on déduit qu'on a bien : $N_\infty(f) \le N_\infty(f')$.

c. Avec les notations proposées, on a :

$\forall\ f \in$ E, $\forall$ t $\in$ [0,1], $g'(t)=e^t.(f(t)+f'(t))$,

et immédiatement : $N_\infty(g') \le e.N_\infty(f+f') = e.n(f)$.

De plus : $\forall$ t $\in$ [0,1], $g'(t)=g(t)+e^t.f'(t)$, donc : $f'(t)=e^{-t}.(g'(t)-g(t))$.

On en déduit que : $N_\infty(f') \le N_\infty(g')+N_\infty(g)$.

Enfin : $N(f) \le 2.N_\infty(f') \le 2.N_\infty(g)+2.N_\infty(g') \le 4.N_\infty(g') \le 4.e.n(f)$.

d. Puisqu'on a aussi de façon évidente : $\forall\ f \in$ E, $n(f) \le N(f)$,

la question c permet de conclure que : $n \le N \le 4.e.n$.

Soit maintenant une suite (u_p) d'éléments de E et : $u \in$ E.

Alors : $\forall\ p \in \mathbb{N},\ n(u_p - u) \le N(u_p - u) \le 4.e.n(u_p - u)$,

et donc si l'une des suites $(n(u_p - u))$ ou $(N(u_p - u))$ tend vers 0, l'autre aussi par le théorèmes des gendarmes.

e. Pour N et N_∞, ce n'est plus le cas, car si on considère la suite définie par :

$\forall\ p \in \mathbb{N}^*, \forall\ t \in [0,1],\ u_p(t) = \dfrac{t^p}{p}$, alors : $N_\infty(u_p) = \dfrac{1}{p}$, et : $N(u_p) = \dfrac{1}{p} + 1$.

La suite (u_p) converge donc vers 0 pour N_∞ et pas pour N et donc il n'est pas possible de trouver : $\alpha > 0$, tel que : $\alpha.N \le N_\infty$.

49. a. • La continuité et la positivité des fonctions sous l'intégrale montrent l'existence et la positivité de N_φ.

• Si pour : $f \in$ E, on a : $N_\varphi(f) = 0$, alors la fonction sous l'intégrale étant positive et continue sur [0,1], on en déduit que $f.\varphi$ est nulle sur [0,1], donc f est nulle sauf (éventuellement) en un nombre fini de valeurs, là où φ s'annule.

Mais f étant continue, elle est alors nulle également en ces points.

• les deux autres points ne présentent pas de difficulté.

b. Si pour φ donnée, on note : $m = \inf\limits_{[0,1]} |\varphi|$, et : $M = \sup\limits_{[0,1]} |\varphi|$, ces valeurs sont strictement positives car φ est continue et strictement positive, et :

$\forall\ f \in$ E, $m.N_\infty(f) \le N_\varphi(f) \le M.N_\infty(f)$,

soit : $m.N_\infty \le N_\varphi \le M.N_\infty$.

Donc : $\forall\ (\varphi_1, \varphi_2) \in$ E^{+2}, strictement positives, on a en adaptant les notations :

$$\frac{m_2}{M_1}.N_{\varphi_2} \le N_{\varphi_1} \le \frac{M_1}{m_2}.N_{\varphi_2}.$$

Pour toutes suite (u_n) d'éléments de E et : $u \in$ E, on a alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \frac{m_2}{M_1}.N_{\varphi_2}(u_n - u) \le N_{\varphi_1}(u_n - u) \le \frac{M_1}{m_2}.N_{\varphi_2}(u_n - u),$$

et (u_n) converge vers u pour N_{φ_1} si et seulement si elle converge vers u pour N_{φ_2}.

c. Puisque le problème semble venir du fait que φ_1 et φ_2 s'annulent (donc ici en 0), on va construire une suite sur ce constat.

Soit pour cela : $n \in \mathbb{N}^*$, et u_n définie par :

• sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, u_n est affine avec : $u_n(0) = n^2$, et : $u_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$, soit : $\forall$ t $\in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, $u_n(t) = n^2 - n^3.t$,

• sur $\left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$, u_n est nulle.

Alors :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ N_{\varphi_1}(u_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} t.(n^2 - n^3.t).dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

et : $N_{\varphi_2}(u_n) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} t^2.(n^2 - n^3.t).dt = \frac{1}{3.n} - \frac{1}{4.n} = \frac{1}{12.n}$.

Autrement dit (u_n) converge vers 0 pour N_{φ_2} mais pas pour N_{φ_1}.

Norme matricielle (ou norme d'algèbre) dans $\mathscr{L}$(E).

50. On va utiliser une norme d'algèbre $\|\,.\,\|$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

a. A étant une matrice à coefficients complexes, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure, comportant λ sur sa diagonale, seule valeur propre supposée de A, d'où l'écriture proposée.

Puisque N est triangulaire supérieure stricte, N est nilpotente d'ordre au plus n (on peut le montrer en repassant par exemple à l'endomorphisme canoniquement associé à N), tout comme : $N' = P.N.P^{-1}$.

Dans ce cas : $\forall\ p \geq n$, $A^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}.\lambda^{p-k}.N'^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k}.\lambda^{p-k}.N'^k$, puisque I_n et N' commutent.

Or : $\forall\ 0 \leq k \leq n-1 \leq p$, $\binom{p}{k} = \dfrac{p.(p-1)...(p-k+1)}{k!} \leq p^k \leq p^n$.

Donc : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $\|A^p\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p}{k}.\lambda^{p-k}.\|N'^k\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} p^n.\lambda^{p-(n-1)}.\|N'^k\| = (p^n.\lambda^p).(\lambda^{-(n-1)}.\sum_{k=0}^{n-1}\|N'^k\|)$.

Si alors on suppose que : $|\lambda| < 1$, le théorème des croissances comparées montre alors que ($p^n.\lambda^p$) tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, et l'autre terme étant constant, on en déduit que la suite (A^p) converge vers 0.

b. La réciproque est fausse et on peut le montrer par contraposée.
Tout d'abord, en s'inspirant de la première question, on va raisonner sur des matrices triangulaires supérieures (il y a équivalence de convergence via une matrice inversible P).
Soit alors T , triangulaire supérieure, dont la diagonale est composée de λ et supposons : $|\lambda| \geq 1$.
Il est classique que les éléments diagonaux de T^p sont λ^p, donc si : $|\lambda| > 1$, ou si : $|\lambda| = 1$, avec : $|\lambda| \neq 1$, les suites coordonnées situées sur la diagonale sont géométriques et divergentes.
Reste donc le cas où : $|\lambda| = 1$, soit : $T = I_n + N$, avec N triangulaire supérieure stricte non nulle.
On démontre alors par récurrence que (T^p) diverge :
- pour : $n = 2$, T a pour forme : $T = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec : $a \neq 0$, et : $\forall\ p \in \mathbb{N}$, $T^p = \begin{pmatrix} 1 & p.a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui diverge.
- si le résultat est vrai pour : $n \geq 2$, donné, soit alors : $T_{n+1} = I_{n+1} + N$, avec N supérieure stricte non nulle.

Si : $T_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, où : $a \neq 0$, alors :

$\forall\ p \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p.a \\ 0 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui diverge,

sinon on peut écrire par blocs : $T_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & L_n \\ 0 & T_n \end{pmatrix}$, ou : $T_{n+1} = \begin{pmatrix} T_n & C_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
où dans l'une des deux écritures, on a : $T_n = I_n + N$, avec N triangulaire supérieure stricte non nulle, et si on est dans le premier cas par exemple :

$\forall\ p \in \mathbb{N}$, $T_{n+1}^p = \begin{pmatrix} 1 & L_{n,p} \\ 0 & T_n^p \end{pmatrix}$, où $L_{n,p}$ est une matrice ligne, et (T_n^p) diverge par hypothèse.

En revenant au besoin aux suites coordonnées, on en déduit que (T_{n+1}^p) diverge aussi.

51. a. Notons : $A = \left\{\dfrac{N(u(x))}{N(x)}, x \in E, x \neq 0\right\}$, $B = \{N(u(x)), x \in E, N(x) = 1\}$, $C = \{N(u(x)), x \in E, N(x) \leq 1\}$.

- Pour : $\alpha \in A$, $\exists\ x \in$ E, $x \neq 0$, tel que : $\alpha = \dfrac{N(u(x))}{N(x)}$.

Si on pose alors : $y = \frac{1}{N(x)}.x$, on a : $N(y) = 1$, et : $N(u(y)) = \frac{1}{N(x)}.N(u(x)) = \alpha$, d'où : $\alpha \in B$.
On en déduit que : $A \subset B$.
D'autre part : $\forall \ \beta \in B$, $\exists \ x \in$ E, tel que : $N(x) = 1$, et : $N(u(x)) = \beta$.

Mais alors x est non nul (puisque de norme 1), et : $\beta = \frac{N(u(x))}{N(x)}$, soit : $\beta \in A$.

On en déduit que : $B \subset A$, donc globalement : $A = B$.
Finalement B est borné et : $\sup(A) = \sup(B)$).
• D'autre part : $\forall \ \gamma \in C$, $\gamma \neq 0$, $\exists \ x \in$ E, tel que : $N(x) \leq 1$, et : $N(u(x)) = \gamma$.

Mais γ étant non nul, x est aussi non nul et en posant : $y = \frac{1}{N(x)}.x$, on a :

$N(y) = 1$, et : $\beta = N(u(y)) = \frac{1}{N(x)}.N(u(x)) \geq N(u(x)) = \gamma$,

soit en résumé : $\forall \ \gamma \in C$, $\gamma \neq 0$, $\exists \ \beta \in B$, $\gamma \leq \beta$.
Donc tout élément de C étant majoré par un élément de B (c'est aussi le cas de 0), C est donc majoré puisque B l'est et : $\sup(C) \leq \sup(B)$.
Enfin : $\forall \ \beta \in B$, $\exists \ x \in$ E, tel que : $N(x) = 1$, et : $N(u(x)) = \beta$.
Et puisqu'on a alors : $N(x) \leq 1$, on en déduit que : $\beta \in C$, et donc : $B \subset C$.
Par conséquent : $\sup(B) \leq \sup(C)$, et finalement : $\sup(B) = \sup(C)$.

b. Soit maintenant : $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$.
Alors : $\forall \ x \in$ E, tel que : $N(x) = 1$,
• si : $v(x) \neq 0$, on pose : $y = v(x)$, et :

$$N(uov(x)) = N(u(v(x)) = \frac{N(u(v(x)))}{N(v(x)))}.N(v(x)) = \frac{N(u(y))}{N(y)}.N(v(x)) \leq \|u\|.\|v\| \ ,$$

• si : $v(x) = 0$, l'inégalité précédente est encore vérifiée.
Donc : $\forall \ x \in$ E, tel que : $N(x) = 1$, on a : $N(uov(x)) \leq \|u\|.\|v\|$.
En considérant alors la borne supérieure de toutes les quantités à gauche de l'inégalité précédente, on en déduit que : $\|uov\| \leq \|u\|.\|v\|$.

Topologie.

52. a. [⇐] Il est immédiat que si : $N_1 = N_2$, alors : $B'_1 = B'_2$.
[⇒] Supposons maintenant que : $B'_1 = B'_2$.

Pour : $x \in$ E, $x \neq 0$, on pose : $y = \frac{1}{N_1(x)}.x$, et : $N_1(y) = 1$, donc : $y \in B'_1$, et donc : $y \in B'_2$.

Par conséquent : $N_2(y) = 1$, d'où : $\frac{1}{N_1(x)}.N_2(x) \leq 1$, et donc : $N_2(x) \leq N_1(x)$.

En échangeant les rôles de N_1 et N_2, on en déduit que : $N_1(x) \leq N_2(x)$.
Finalement : $N_1(x) = N_2(x)$.

b. [⇐] Toujours aussi immédiat.
[⇒] Supposons à nouveau : $B_1 = B_2$, B_k désignant la boule ouverte pour N_k.

Pour : $x \in$ E, $x \neq 0$, et : $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $y = \frac{1}{N_1(x) + \frac{1}{n}}.x$.

Alors : $N_1(y) = \frac{N_1(x)}{N_1(x) + \frac{1}{n}} < 1$, et donc : $y \in B_1$, d'où on déduit que : $y \in B_2$.

Donc : $N_2(y) = \dfrac{N_2(x)}{N_1(x) + \dfrac{1}{n}} < 1$, et : $N_2(x) < N_1(x) + \dfrac{1}{n}$.

Ceci étant vrai pour tout entier n non nul, on peut faire tendre n vers $+\infty$ et : $N_2(x) \leq N_1(x)$.

Comme précédemment, on a de façon symétrique : $N_1(x) \leq N_2(x)$.

Finalement à nouveau l'égalité.

53. a. • Pour : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la fraction rationnelle qui apparaît est définie sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $\pm\infty$ donc est bornée sur $\mathbb{R}$ et sa valeur absolue y admet une borne supérieure qui est donc positive.

• Si pour : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $N((x, y)) = 0$, alors :

$\forall\, t \in \mathbb{R},\ 0 \leq \dfrac{|x + t.y|}{1 + t + t^2} \leq N((x, y)) = 0$, et : $|x + t.y| = 0$.

En particulier pour : $t = 0$, on obtient : $x = 0$, puis pour : $t = 1$, on obtient : $y = 0$,

soit donc finalement : $(x, y) = (0,0)$.

• Classiquement, pour : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, puisque : $|\lambda| \geq 0$, on a : $N(\lambda.(x, y)) = |\lambda|.N((x, y))$.

• $\forall\, ((x, y), (x', y')) \in (\mathbb{R}^2)^2$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|(x + x') + t.(y + y')|}{1 + t + t^2} \leq \dfrac{|x + t.y|}{1 + t + t^2} + \dfrac{|x' + t.y'|}{1 + t + t^2} \leq N((x, y)) + N((x', y'))$,

et en prenant la borne supérieure de la partie gauche, on en déduit l'inégalité triangulaire.

b. Un point : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, est dans $B'(O,1)$ si et seulement si :

$\forall\, t \in \mathbb{R},\ -(1 + t + t^2) \leq x + t.y \leq 1 + t + t^2$, soit :

$0 \leq t^2 + t.(1 - y) + 1 - x$, et : $0 \leq t^2 + t.(1 + y) + 1 + x$.

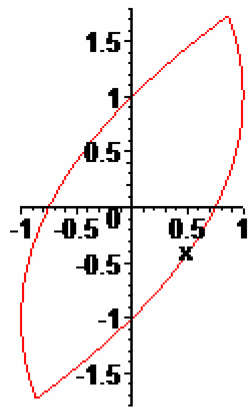
Cette double condition est réalisée si et seulement si les deux discriminants sont négatifs ou nuls, soit :

$(1 - y)^2 \leq 4.(1 - x)$, et : $(1 + y)^2 \leq 4.(1 + x)$.

On peut ainsi représenter les deux paraboles d'équation :

$(1 - y)^2 = 4.(1 - x)$, et : $(1 + y)^2 = 4.(1 + x)$,

et en déduire la zone donnant la boule $B'(O,1)$ cherchée.



Les points d'intersection ont pour coordonnées $(\varepsilon.\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \varepsilon.\sqrt{3})$, avec : $\varepsilon = \pm 1$.

c. Pour calculer la surface demandée, on va considérer qu'elle est bornée par des fonctions donnant x en fonction de y et : $S = \displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \left[\left(1 - \frac{(y-1)^2}{4}\right) - \left(\frac{(y+1)^2}{4} - 1\right)\right].dy = \int_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} \frac{3 - y^2}{2}.dy = \left[\frac{3.y}{2} - \frac{y^3}{6}\right]_{-\sqrt{3}}^{+\sqrt{3}} = 2.\sqrt{3}$.

54. a. Si : $f \in A$, f étant continue et ne s'annulant pas sur [0,1], garde un signe constant sur [0,1].

De plus, si note m la borne inférieure de f sur [0,1], alors : $m > 0$.

Posons alors B la boule ouverte centrée en f et de rayon : $\dfrac{m}{2} > 0$.

Pour : $g \in B$, on a alors : $N_\infty(f - g) < \dfrac{m}{2}$, et on en déduit que :

$\forall\ x \in [0,1],\ g(x) = f(x) - (f(x) - g(x)) \geq f(x) - |f(x) - g(x)| \geq f(x) - N_\infty(f - g) \geq m - \dfrac{m}{2} = \dfrac{m}{2} > 0$,

autrement dit g ne s'annule pas sur [0,1] et donc : $g \in A$.

Donc : $B \subset A$, et tout point de A est intérieur à A : A est bien un ouvert de E pour N_∞.

b. • Soit g maintenant, adhérent à A.

Il existe donc une suite (f_n) d'éléments de A telle que : $\lim\limits_{n \to +\infty} N_\infty(f_n - g) = 0$.

Supposons alors que : $\exists\ a \in [0,1]$, tel que : $g(a) > 0$.

Alors : $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \geq n_0$, $N_\infty(f_n - g) \leq \dfrac{g(a)}{2}$,

et en particulier : $-\dfrac{g(a)}{2} \leq f_n(a) - g(a)$,

d'où : $\forall\ n \geq n_0$, $0 < \dfrac{g(a)}{2} \leq f_n(a)$.

Mais puisque f_n garde un signe constant sur [0,1], les fonctions f_n sont donc toutes positives pour : $n \geq n_0$.

Enfin, la convergence uniforme de (f_n) sur [0,1] vers g entraîne la convergence simple, d'où :

$\forall\ x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x) \geq 0$,

comme limite d'une suite de réels positifs à partir d'un certain rang.
La démonstration évidemment s'adapte si : $\exists\ a \in [0,1]$, $g(a) < 0$.

On vient donc de montrer que si : $g \in \overline{A}$, alors g est nulle, ou positive sur [0,1] ou négative sur [0,1].

• Réciproquement, soit g une telle fonction (par exemple positive sur [0,1] et continue puisque dans E).

On peut poser : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = g + \dfrac{1}{n}$, et on constate alors que :

• $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\ x \in [0,1]$, $f_n(x) = g(x) + \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{n} > 0$, donc : $f_n \in A$,

• $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $N_\infty(f_n - g) = \dfrac{1}{n}$, et ($f_n$) converge bien vers g pour la norme N_∞.

Donc g est adhérent à A.

Par double inclusion, on vient de montrer que les points adhérents à A pour la norme N_∞ sont les fonctions continues, positives sur [0,1] ou négatives sur [0,1].

55. • Tout d'abord A est non borné.
En effet, si on note : $\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^t - t - 2$, alors : $\varphi'(t) = e^t - 1$, et φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc positive sur [2,+∞), puisque : $\varphi(2) = e^2 - 2 - 2 \geq 2^2 - 4 = 0$.
Donc toutes les fonctions constantes u_C égales à C, pour : $C \geq 2$, sont dans A, et :
$\forall\ C \geq 2$, $\|u_C\| = C$.
Donc : $\forall\ C \geq 2$, $\exists\ u_C \in A$, $\|u_C\| = C$, et A est non borné.
• A est ensuite fermé car si (u_n) est une suite de fonctions de A, convergente vers u pour la norme infinie, alors u est continue sur [0,1], puisque les u_n le sont et qu'il y a convergence uniforme de la suite sur [0,1].
Puis : $\forall\ x \in [0,1]$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $2 + u_n(x) \leq e^{u_n(x)}$,
et en passant à la limite (avec la continuité de $\exp$), on en déduit que : $\forall\ x \in [0,1]$, $2 + u(x) \leq e^{u(x)}$.
Donc : $u \in A$, et A est bien fermé.

56. Considérons une base orthonormale $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et l'application θ de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, définie par : $u \mapsto mat_{\mathscr{B}}(u)$.
Comme θ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie, θ est continue ainsi que θ^{-1}.
L'image de l'ensemble des rotations par θ est l'ensemble SO(3).
L'ensemble SO(3) est ensuite défini comme l'intersection de 7 ensembles qui sont :
• $\forall\ 1 \leq i < j \leq 3$, $\{A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ a_{i,1}.a_{j,1} + a_{i,2}.a_{j,2} + a_{i,3}.a_{j,3} = 0\}$,
• $\forall\ 1 \leq i \leq 3$, $\{A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ a_{i,1}^2 + a_{i,2}^2 + a_{i,3}^2 = 1\}$,
• $\{A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\}$.
Chacun de ces sept ensembles est ensuite un fermé car du type : $\{A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ f(A) = 1\}$,

où $f(A)$ est polynomiale en les coordonnées de A donc f continue de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Comme intersection de 7 fermés, SO(3) est fermé.
On peut au besoin refaire la démonstration à l'aide de la caractérisation séquentielle des fermés.
Enfin, si on considère maintenant une suite (u_n) de rotations qui converge vers : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, alors la suite : $(\theta(u_n)) = (A_n)$, est une suite de matrices de SO(3) convergente (car θ est continue) vers : $\theta(u) = A$.
Mais comme SO(3) est un fermé, la limite A de cette suite est dans SO(3) et donc u est une rotation.
Conclusion : l'ensemble des rotations de $\mathbb{R}^3$ est un fermé dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

57. a. Si : $F = E$, alors : $F = \overline{F}$.
Sinon, soit : $\mathcal{B}_F = (e_1,...,e_p)$, une base de F que l'on complète en : $\mathcal{B} = (e_1,...,e_n)$, une base de E.
Soit $(x^{(k)})$ une suite d'éléments de F, convergente dans E vers x.
Alors : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $x^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(k)}.e_i$, avec : $\forall\ p+1 \leq i \leq n$, $x_i^{(k)} = 0$.
Comme suite convergente, toutes les suites coordonnées de cette suite convergent et en notant :
$x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, on a : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $(x_i^{(k)})$ converge vers x_i.
Mais comme pour : $p+1 \leq i \leq n$, les suites $(x_i^{(k)})$ sont constantes nulles, on en déduit que :
$\forall\ p+1 \leq i \leq n$, $x_i = 0$, et donc : $x \in F$.
Tout point adhérent à F est donc dans F, ce qui s'écrit encore : $F = \overline{F}$.
b. On reprend la base $\mathcal{B}_F$ précédente et onn va utiliser la norme infinie dans E attachée à $\mathcal{B}$.
Soit : $a \in F$, avec : $a = \sum_{i=1}^{p} a_i.e_i$.
Alors : $\forall\ r > 0$, $B(a,r) \not\subset F$, car : $b = a + \frac{r}{2}.e_{p+1}$, est tel que :
- $N_\infty(b-a) = N_\infty\left(\frac{r}{2}.e_{p+1}\right) = \frac{r}{2} < r$, donc : $b \in B(a,r)$,
- $b \notin Vect(e_1,...,e_p) = F$.

Donc aucun point de F n'est intérieur à F et : $\overset{o}{F} = \emptyset$.

58. • Montrons que $\overline{C}$ est convexe et pour cela, soit : $(x,y) \in \overline{C}^2$.
Alors : $\exists\ ((x_n),(y_n)) \in (C^{\mathbb{N}})^2$, telles que : $x = \lim_{n \leftarrow +\infty} x_n$, et : $y = \lim_{n \leftarrow +\infty} y_n$.
Pour : t $\in$ [0,1], la suite $((1-t).x_n + t.y_n)$ converge vers $(1-t).x + t.y$.
Or C étant convexe, on sait que :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $(1-t).x_n + t.y_n \in C$, puisque x_n et y_n sont dans C.
Donc : $\lim_{n \to +\infty}((1-t).x_n + t.y_n) = (1-t).x + t.y \in \overline{C}$, et $\overline{C}$ est bien convexe.

• De même, si : $(x,y) \in (\overset{o}{C})^2$, alors : $\exists\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{+*2}$, tel que : $B(x,\alpha) \subset C$, et : $B(y,\beta) \subset C$.
Posons : $r = \min(\alpha,\beta) > 0$.
Alors pour : t $\in$ [0,1], on note : $z = (1-t).x + t.y$.
Tout d'abord : $B(x,r) \subset B(x,\alpha) \subset C$, et : $B(y,r) \subset B(y,\beta) \subset C$.
Ensuite, pour : $u \in B(z,r)$, on pose : $x' = x + (u-z)$, et : $y' = y + (u-z)$.
On constate alors que : $N(x'-x) = N(u-z) < r \leq \alpha$,
donc : $x' \in B(x,\alpha)$, et par conséquent : $x' \in C$.
De même : $y' \in B(y,\beta)$, et donc : $y' \in C$
Enfin : $(1-t).x' + t.y' = [(1-t).x + t.y] + [(1-t).(u-z) + t.(u-z)] = z + (u-z) = u$.

Donc on vient de constater que l'élément u de la boule $B(z,r)$ appartient à C puisque C est convexe.
On en déduit que : $B(z,r) \subset C$, et ayant trouvé une boule ouverte centrée en z incluse dans C, on peut affirmer que : $z \in \overset{o}{C}$.

Finalement : $\overset{o}{C}$ est bien convexe.

Continuité, applications lipschitziennes.

59. a. L'application : $x \mapsto \|x\|$, est continue car 1-lipschitzienne, donc : $x \mapsto \|x\|^2$, est aussi continue comme composée et finalement f également comme produit.

b. La fonction φ : $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$, est bornée sur ℝ par $\dfrac{1}{2}$, comme le montre son tableau de variations.

Donc : $\forall\ x \in$ E, $\| f(x)\| = \varphi(\|x\|) \le \dfrac{1}{2}$,

et : $f(E) \subset B'\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ (on notera plus simplement cette boule B').

De plus, pour : $x \in$ E, $f(x)$ est colinéaire à x.
Si maintenant : $y \in B'$, alors : ;
- pour y nul, $f(0) = y$,
- pour y non nul, chercher un antécédent à y revient à chercher : $\lambda \in$ ℝ, tel que :

$f(\lambda.y) = y = \dfrac{\lambda.y}{1+\|\lambda.y\|^2}$, ce qui est équivalent à : $\lambda^2.\|y\|^2 - \lambda + 1 = 0$.

Or ce dernier problème a une solution car : $\Delta = 1 - 4.\|y\|^2 \ge 0$.
Donc : $B' \subset f(E)$, et finalement, on a bien : $B' = f(E)$.

60. Notons que si : $x \in$ E, alors : $y = \Delta(x) \in$ E, car :

$\forall\ n \in$ ℕ, $|y_n| \le |x_{n+1}| + |x_n| \le 2.\|x\|_\infty$,

et y est bien une suite bornée.

De plus, on peut noter que : $\|y\|_\infty = \|\Delta(x)\|_\infty \le 2.\|x\|_\infty$.

Comme la linéarité de Δ est immédiate, Δ est bien un endomorphisme de E.
On en déduit également que : $\forall\ (x,x') \in$ E^2, $\|\Delta(x) - \Delta(x')\|_\infty = \|\Delta(x-x')\|_\infty \le 2.\|x-x'\|_\infty$.

Δ étant alors 2-lipschitzienne, elle est continue pour la norme proposée.

61. Soit K une partie fermée, bornée et non vide de ℝ^n.
Soit f une application de K dans K telle que : $\forall\ (x,y) \in$ K^2, $(x \ne y) \Rightarrow (\| f(x) - f(x)\| < \|x-y\|)$.

a. On déduit de la propriété vérifiée par f qu'elle est 1-lipschitzienne sur K car :
- $\forall\ (x,y) \in$ K^2, $(x \ne y) \Rightarrow (\| f(x) - f(x)\| < \|x-y\| \le 1.\|x-y\|)$.
- $\forall\ x \in K$, $\| f(x) - f(x)\| = 0 \le 1.\|x-x\|$.

Donc f est continue sur K.

Puisque K est fermé et borné, l'application φ définie sur K par : $x \mapsto \| f(x) - x\|$,
est bornée sur K et atteint ses bornes.
En particulier, elle admet un minimum m, atteint en au moins une valeur c dans K.
Supposons maintenant que : $m \ne 0$.
Alors : $f(c) \ne c$, et puisque f est une application de K dans K, on a aussi : $f(c) \in K$.
Donc : $\| f(f(c)) - f(c)\| < \| f(c) - c\| = m$,
et on vient de mettre en évidence un élément de K (à savoir $f(c)$), tel que : $\varphi(f(c)) < m$,
ce qui est impossible.

On en déduit que : $m = 0$, et donc : $f(c) = c$, autrement dit c est un point fixe de f.
Supposons enfin que : $\exists\ c' \in K$, $c \neq c'$, et : $f(c') = c'$.
Alors on aurait : $\|c - c'\| = \|f(c) - f(c')\| < \|c - c'\|$, ce qui est impossible.
Donc c est l'unique point fixe de f.

b. On peut remarquer que :
$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+1} - c\| = \|f(x_n) - f(c)\| < \|x_n - c\|$.
La suite réelle ($\|x_n - c\|$) est alors décroissante et positive donc convergente vers : $\alpha \geq 0$.
D'autre part, la suite (x_n) étant une suite d'éléments de K qui est fermé et borné, on peut en extraire une suite convergente ($x_{\varphi(n)}$) vers une valeur : $L \in K$.
Par la continuité de f, la suite : $(f(x_{\varphi(n)})) = (x_{\varphi(n)+1})$, converge vers $f(L)$.
D'autre part, les suites ($\|x_{\varphi(n)} - c\|$) et ($\|x_{\varphi(n)+1} - c\|$), comme suites extraites, convergent toutes deux vers α.
Mais la première converge aussi vers $\|L - c\|$ et la seconde vers $\|f(L) - c\|$, d'où :
$\|f(L) - c\| = \|L - c\| = \alpha$
Or si : $L \neq c$, alors : $\|f(L) - c\| < \|L - c\|$.
Donc on doit avoir : $L = c$, et : $\alpha = 0$.
Finalement la suite ($\|x_n - c\|$) converge vers 0 et (x_n) converge vers c.

62. a. On peut utiliser la deuxième inégalité triangulaire :
$\forall\ (x, y) \in E^2$, $\big|\|x - x_0\| - \|y - x_0\|\big| \leq \|(x - x_0) - (y - x_0)\| = \|x - y\|$,
et donc l'application proposée est 1-lipschitzienne.

b. Soit : $x \in E$, fixé.
Alors l'application : $y \mapsto \|x - y\| = \|y - x\|$, est continue d'après la question a.
Donc elle admet un minimum sur K_1, atteint en au moins en un point de K_1.
Soit maintenant : $(x, y) \in E^2$.
Alors : $\forall\ x_1 \in K_1$, $\|x - x_1\| \leq \|x - y\| + \|y - x_1\|$, et donc : $d(x, K_1) \leq \|x - x_1\| \leq \|x - y\| + \|y - x_1\|$.
On en déduit que : $d(x, K_1) - \|x - y\| \leq \|y - x_1\|$,
et comme plus grand des minorants, on en déduit que : $d(x, K_1) - \|x - y\| \leq d(y, K_1)$.
D'où : $d(x, K_1) - d(y, K_1) \leq \|x - y\|$,
et en inversant les rôles de x et de y : $d(y, K_1) - d(x, K_1) \leq \|y - x\| = \|x - y\|$,
et finalement : $|d(y, K_1) - d(x, K_1)| \leq \|y - x\|$.
L'application proposée est donc 1-lipschitzienne.

c. Puisque K_1 et K_2 sont non vides, l'ensemble $\{\|y_1 - y_2\|, y_1 \in K_1, y_2 \in K_2\}$ est un ensemble non vide de réels positifs et donc il admet une borne inférieure, elle-même positive.
La valeur $d(K_1, K_2)$ correspond ainsi à : $d(K_1, K_2) = \inf\limits_{y_2 \in K_2}\left(\inf\limits_{y_1 \in K_1}\|y_1 - y_2\|\right) = \inf\limits_{y_2 \in K_2} d(y_2, K_1)$.
Comme l'application : $y \mapsto d(y, K_1)$, est lipschitzienne donc continue, elle admet un minimum sur K_2 qui est non vide, fermé et borné, et ce minimum est atteint en une valeur x_2 de K_2.
Donc : $d(K_1, K_2) = d(x_2, K_1)$.
Enfin, la valeur $d(x_2, K_1)$ correspond au minimum sur K_1 de la fonction : $x \mapsto \|x - x_2\|$, et ce minimum est atteint en une valeur x_1 de K_1.
Autrement dit : $\|x_1 - x_2\| = d(x_2, K_1) = d(K_1, K_2)$.