

Espaces probabilisés (Corrigé niveau 1).

Evénements et langage ensembliste.

1. Le « ou » se traduit en union, et donc :
« l'un des trois événements au moins est réalisé » devient $A \cup B \cup C$.
Ce deuxième événement est plus compliqué à traduire puisqu'on commence par l'écrire en :
« un événement est réalisé et les deux autres ne le sont pas », soit :
 $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$.
2. a. Pour des événements, que l'un entraîne l'autre signifie que le premier est inclus dans le deuxième (penser par exemple à : « obtenir 2 » entraîne « obtenir un résultat pair »).
Il suffit donc de montrer que : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$..
Or : $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
Et comme : $A \cap C \subset A$, on en déduit bien que : $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C)$.
Rappel : toutes ces inclusions ou égalités peuvent se démontrer « élément par élément », en commençant par : « $\forall x \in \dots$ ».
b. Un rapide examen « avec des patates » permet de suggérer comme condition nécessaire et suffisante :
 $A \subset C$.
 - Supposons cette condition réalisée.
Alors : $A \cap C = A$, et : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C)$, d'où l'égalité.
 - Supposons réciproquement que : $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.
Alors : $A \subset A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \subset C$.

Probabilité sur un ensemble fini.

3. On utilise comme univers l'ensemble des 10-uplets de nombres compris entre 1 et 4 (ensemble de toutes les listes de réponses possibles), que l'on munit de la probabilité uniforme (ce qui traduit le fait que toutes les réponses sont données au hasard).
Il y a donc 4^{10} listes de réponses possibles.
Les listes « acceptables » sont celles qui comportent 6, 7, 8, 9 ou 10 réponses correctes (et cette description correspond à une partition de l'ensemble cherché).
Or il y a 1 liste avec 10 réponses correctes, $\binom{10}{9} \cdot 3$ listes avec 9 réponses correctes (10 possibilités de positionner la réponse fausse et pour chaque positionnement, 3 réponses fausses possibles), puis $\binom{10}{8} \cdot 3^2$, $\binom{10}{7} \cdot 3^3$ et $\binom{10}{6} \cdot 3^4$ listes pour les catégories restantes.
Au total : $1 + \binom{10}{9} \cdot 3 + \binom{10}{8} \cdot 3^2 + \binom{10}{7} \cdot 3^3 + \binom{10}{6} \cdot 3^4 = 20686$, listes acceptables, et une probabilité de :
$$p = \frac{20686}{4^{10}} \approx 0.020.$$
4. L'univers que l'on choisit est l'ensemble des groupes de 4 personnes qu'on peut former à partir des 14 personnes initiales, et donc c'est un ensemble de $\binom{14}{4}$ groupes de représentants possibles.
Là encore, le fait que la désignation se fasse au hasard induit le choix d'une probabilité uniforme.
Un groupe acceptable est ensuite composé de 2 hommes et de 2 femmes et il y en a $\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2}$.

La probabilité cherchée est donc :
$$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}}{\binom{14}{4}} = \frac{8.7}{2} \cdot \frac{6.5}{2} \cdot \frac{4.3.2}{14.13.12.11} = \frac{6.5}{13.11} = \frac{30}{143} \approx 0.21.$$

5. On veut donc que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq k \leq n, P(\{k\}) = \lambda.k$.

Alors : $1 = P(\mathbb{N}_n) = \sum_{k=1}^n P(\{k\}) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n k = \lambda \cdot \frac{n.(n+1)}{2}$ (car les événements élémentaires sont deux à deux incompatibles), et donc : $\lambda = \frac{2}{n.(n+1)}$.

Réciproquement si λ prend cette valeur, alors les valeurs obtenues pour tous les $P(\{k\})$ sont des réels positifs de somme 1 et on définit bien ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}_n$.

6. On peut adopter la même démarche dans cet exercice que dans le précédent, en commençant par déterminer $P(\{k\})$ pour tout entier : $1 \leq k \leq n$.

On peut aussi remarquer qu'on doit avoir : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall 1 \leq k \leq n, P(\{1,2,\dots,k\}) = \lambda.k^2$,

donc en particulier pour : $k = n$, on en déduit que : $P(\{1,2,\dots,n\}) = \lambda.n^2 = P(\mathbb{N}_n) = 1$, et : $\lambda = \frac{1}{n^2}$.

Réciproquement, pour cette valeur de λ , alors :

- $P(\{1\}) = \lambda.1 = \frac{1}{n^2}$,

- $\forall 2 \leq k \leq n, P(\{1,2,\dots,k\}) = P(\{1,2,\dots,k-1\}) + P(\{k\})$, (par incompatibilité), d'où :

$$P(\{k\}) = \lambda.k^2 - \lambda.(k-1)^2 = \lambda.(2.k-1) = \frac{2.k-1}{n^2} \geq 0 \text{ (formule qui reste valable pour : } k=1).$$

P est alors entièrement déterminée, mais répond-elle au problème ?

Pour cela, on a tout d'abord : $\forall 1 \leq k \leq n, P(\{1,2,\dots,k\}) = \sum_{i=1}^k \frac{2.i-1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \left(2 \cdot \frac{k.(k+1)}{2} - k \right) = \frac{k^2}{n^2}$,

et : $P(\mathbb{N}_n) = P(\{1,2,\dots,n\}) = 1$.

Donc on a bien déterminé une unique probabilité répondant au problème.

7. L'univers avec lequel on peut travailler ici est l'ensemble des k -uplets de nombres compris entre 1 et n . Chaque place i dans un k -uplet représente le numéro de la boîte dans laquelle on a placé la boule i .

- L'événement « chaque boîte contient au plus une boule » correspond aux k -uplets dans lesquels les éléments sont tous distincts.

Il y en a donc autant que de façon de choisir k éléments distincts parmi n possibles, soit : $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Comme par ailleurs il y a en tout n^k k -uplets possibles, la probabilité cherchée vaut : $\frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k}$.

On peut remarquer que la probabilité est de 1 si : $k = 1$.

- L'événement « une boîte contient toutes les boules » correspond à la réunion des événements « la boîte i contient toutes les boules », pour i variant de 1 à n , soit n possibilités.

La probabilité cherchée vaut alors : $\frac{n}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}$.

On peut remarquer que pour : $k = 1$, la probabilité est de 1, ce qui est toujours rassurant.

- Le dernier événement « une boîte contient au moins deux boules » est la négation du premier donc la probabilité cherchée vaut : $1 - \frac{n.(n-1) \dots (n-k+1)}{n^k}$.

Cette fois, la probabilité est nulle si : $k = 1$.

8. a. Il est plus simple de chercher la probabilité de **ne pas obtenir** de 6.

La probabilité pour un lancer étant de $\frac{5}{6}$ de ne pas obtenir de 6 et les lancers étant indépendants, la probabilité pour n lancers de ne pas obtenir de 6 est donc (produit pour des événements indépendants) de $\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Pour que la probabilité d'obtenir un 6 devienne supérieure à 0.5, il est équivalent de chercher quand la probabilité de ne pas en obtenir devient inférieure à 0.5, soit : $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0.5$, ou : $n \geq \frac{\ln(0.5)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 3.80$.

Donc le nombre minimum de lancers est : $n = 4$.

- b. De même, la probabilité pour un double-six par lancer étant de $\frac{1}{36}$, par passage au complémentaire, on trouve que le nombre minimum de lancers vérifie : $n \geq \frac{\ln(0.5)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 24.60$, soit : $n = 25$.

Probabilité sur un ensemble quelconque.

9. a. Il suffit de vérifier que la série (positive) de ces probabilités élémentaires converge et a pour somme 1.

Or elle converge comme série géométrique, et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$.

- b. Puisque : $B = \bigcup_{n \geq 10} P(\{n\})$, on en déduit : $P(B) = \sum_{n=10}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=10}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$.

10. De même, on constate que la série (positive) converge puisque : $\frac{1}{n \cdot (n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$.

De plus : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right] = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 1$.

On a bien ainsi la définition d'une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

11. a. Remarquons tout d'abord que la série (positive) est convergente puisque : $a > 1$.

Puis : $\sum_{n=1}^{+\infty} P_a(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a)} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = 1$, donc on définit bien ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

- b. On calcule ensuite :

$$\bullet P_a(2 \cdot \mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(a) \cdot (2 \cdot n)^a} = \frac{1}{\zeta(a) \cdot 2^a} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \frac{1}{2^a}, \text{ et plus généralement :}$$

$$\bullet \forall m \in \mathbb{N}^*, P_a(m \cdot \mathbb{N}^*) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(a) \cdot (m \cdot n)^a} = \frac{1}{\zeta(a) \cdot m^a} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} = \frac{1}{m^a}.$$

12. a. On impose tout d'abord à A_c d'être positif ou nul.

Puis la série de terme général $P(\{k\})$ converge et : $\sum_{k=0}^{+\infty} A_c \cdot \frac{c^k}{k!} = A_c \cdot e^c$.

En posant : $A_c = e^{-c}$, on définit donc ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

- b. La probabilité p cherchée vaut :

$$p = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{2.k+1\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_c \cdot \frac{c^{2.k+1}}{(2.k+1)!} = e^{-c} . sh(c) = \frac{1 - e^{-2.c}}{2}.$$

Probabilités conditionnelles, indépendance, formule des probabilités totales.

13. Le premier événement correspond à : $A = \{2,4,6\}$, et le second à : $B = \{3,6\}$.

Par dénombrement, on a : $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, et : $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

De plus : $A \cap B = \{6\}$, et : $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(A).P(B)$.

Ce sont bien des événements indépendants.

14. a. Puisque : $A \subset A \cup B$, par croissance on en déduit que : $P(A) \leq P(A \cup B)$.

Donc : $P(A \cup B) > 0$, et :

$$P_{(A \cup B)}(A \cap B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P((A \cap B) \cap A)}{P(A)} = P_A(A \cap B).$$

b. D'autre part : $P(\bar{A}) = 1 - P(A) > 0$, donc : $P_{\bar{A}}(B)$ existe et :

$$P_A(B).P(A) + P_{\bar{A}}(B).P(\bar{A}) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.P(A) + \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}.P(\bar{A}) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B),$$

puisque les deux événements dont on ajoute les probabilités forment une partition de B .

15. On peut commencer par calculer : $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{9} = \frac{12+9-16}{36} = \frac{5}{36}$.

On en déduit que : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{36} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5}{9}$, et : $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A) = \frac{4}{9}$.

Enfin : $P_B(A \cap \bar{B}) = \frac{P((A \cap B) \cap \bar{B})}{P(B)} = 0$.

16. a. Si A et B sont indépendants, alors : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$.

Or : $P(\bar{A} \cap B) + P(A \cap B) = P(B)$, puisque les événements dont on calcule la somme des probabilités forment une partition de B .

Donc : $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A).P(B) = P(B).[1 - P(A)] = P(\bar{A}).P(B)$, et $\bar{A}$ et B sont indépendants.

De façon symétrique, A et $\bar{B}$ sont indépendants et en réappliquant le premier résultat à ce dernier couple, on en déduit que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi.

b. Supposons maintenant que $A_1, \dots, A_n$, sont mutuellement indépendants.

Soit J une partie non vide de $\{1, 2, \dots, n\}$.

• si J ne contient pas l'indice 1 alors les événements $(A_j)_{j \in J}$ sont mutuellement indépendants et :

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

• si J contient l'indice 1, notons : $J' = J \setminus \{1\}$.

Alors A_1 et $\bigcap_{j \in J'} A_j$ sont indépendants donc $\bar{A}_1$ et $\bigcap_{j \in J'} A_j$ aussi, et :

$$P\left(\bar{A}_1 \cap \bigcap_{j \in J'} A_j\right) = P(\bar{A}_1).P\left(\bigcap_{j \in J'} A_j\right) = P(\bar{A}_1) \cdot \prod_{j \in J'} P(A_j),$$

ce qui termine la démonstration de l'indépendance mutuelle de $\bar{A}_1, A_2, \dots, A_n$.

17. a. Si : $A \cap B = \emptyset$, alors : $P(A \cap B) = 0$.

Donc A et B sont indépendants si et seulement si : $P(A).P(B) = 0$, autrement dit si et seulement si : $P(A) = 0$, ou : $P(B) = 0$.

b. Si A est indépendant de tout événement, alors A est indépendant de lui-même et :

$P(A \cap A) = P(A) = P(A).P(A)$, autrement dit : $P(A) = 0$, ou : $P(A) = 1$.

Réciproquement :

- si : $P(A) = 0$, alors : $\forall B \in \mathcal{A}$, $A \cap B \subset A$, et par croissance : $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$, donc : $P(A \cap B) = 0$, d'où on déduit que : $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0$.

A est bien indépendant de tout événement B dans ce cas.

- si : $P(A) = 1$, alors : $P(\bar{A}) = 0$, donc $\bar{A}$ est indépendant de tout événement B et avec l'exercice précédent, A est également indépendant de tout événement B .

18. a. Notons R_k l'événement « obtenir Face au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

L'événement envisagé qu'on note E est la réunion des événements $\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_k \cap R_{k+1} \cap \dots \cap R_n$, pour : $0 \leq k \leq n$, puisque dès qu'apparaît un Face, il ne peut y avoir de Pile après.

Donc : $P(E) = \sum_{k=0}^n P(\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_k \cap R_{k+1} \cap \dots \cap R_n) = \sum_{k=0}^n P(\bar{R}_1) \dots P(\bar{R}_k).P(R_{k+1}) \dots P(R_n)$,

par incompatibilité puis indépendance, et : $P(E) = \sum_{k=0}^n (1-p)^k \cdot p^{n-k} = p^n \cdot \sum_{k=0}^n \left(\frac{1-p}{p}\right)^k$.

Puisque : $p \neq \frac{1}{2}$, on a : $\frac{1-p}{p} \neq 1$, et : $P(E) = p^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)} = \left(\frac{1}{2-p}\right) \cdot (p^{n+1} - (1-p)^{n+1})$.

b. On note encore R_k l'événement « obtenir Face au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

Alors les événements qui font gagner A sont les événements $\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{2,k} \cap R_{2,k+1}$, avec : $k \in \mathbb{N}$.

A nouveau par incompatibilité puis indépendance :

$P(A \text{ gagne}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\bar{R}_1 \cap \dots \cap \bar{R}_{2,k} \cap R_{2,k+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\bar{R}_1) \dots P(\bar{R}_{2,k}).P(R_{2,k+1})$,

et donc : $P(A \text{ gagne}) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2,k} \cdot p = p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$.

19. a. On note R_k l'événement « la boule tirée au $k^{\text{ième}}$ essai est Rouge ».

Notons par ailleurs E_n l'événement « les n premières boules tirées sont Rouges ».

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = R_1 \cap \dots \cap R_n$, et avec la formule des probabilités composées :

$P(E_n) = P(R_1).P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2.n-1}{2.n}$,

puisque le nombre de boules Rouges augmente de 2 unités à chaque essai.

Donc : $P(E_n) = \frac{(2.n)!}{2^{2.n} \cdot n!^2}$, en faisant apparaître au numérateur tous les termes pairs qui manquent.

b. Si on note E l'événement « on tire infiniment des boules Rouges », alors : $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$.

Donc comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E_{n+1} \subset E_n$, par continuité décroissante : $P(E) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$.

La formule de Stirling donne alors : $\frac{(2.n)!}{2^{2.n} \cdot n!^2} \sim \frac{(2.n)^{2.n} \cdot e^{-2.n} \cdot \sqrt{2.\pi.(2.n)}}{2^{2.n} \cdot (n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2.\pi.n})^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi.n}}$, et : $P(E) = 0$.

c. Dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \dots \frac{3n-2}{3n-1}$, qui n'a pas d'expression simple.

Puis : $\forall n \geq 1, \ln(P(E_n)) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{3k-2}{3k-1}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right)$, et comme : $\ln\left(1 - \frac{1}{3k-1}\right) \sim -\frac{1}{3k-1}$, la série qui donne $\ln(P(E_n))$ est divergente et comme série à termes négatifs, la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$: donc la suite $(\ln(P(E_n)))$ tend vers $-\infty$ et $(P(E_n))$ tend vers 0.

Enfin on a toujours : $P(E) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(E_n)$, donc : $P(E) = 0$

couleur ?

20. Notons R_k l'événement « le galet coule au $k^{\text{ième}}$ ricochet » et C_n l'événement « le galet coule après le $n^{\text{ième}}$ ricochet ».

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, C_n = R_1 \cap \dots \cap R_n \cap \overline{R_{n+1}}$, et par la formule des probabilités composées :

$$P(C_n) = p_n = P(R_1) \cdot P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) \cdot P_{R_1 \cap \dots \cap R_n}(\overline{R_{n+1}}) = 1 \dots \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)!}.$$

$$\text{Donc : } \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = (e-1) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} = (e-1) - (e-2) = 1.$$

Notons enfin C l'événement « le galet coule au cours des ricochets ».

$$\text{Alors : } C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n, \text{ et par incompatibilité : } P(C) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1.$$

Donc le galet coule presque sûrement.

21. a. p_1 correspond à obtenir au premier lancer 2 ou 4, donc : $p_1 = \frac{2}{5}$.

b. Si la somme de rang n est paire (probabilité p_n) alors celle de rang $n+1$ le sera aussi si le $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer donne un 2 ou un 4, et si la somme de rang n est impaire (probabilité $1-p_n$), celle de rang $n+1$ le sera aussi si le lancer suivant donne un 1, 3, ou 5.

Donc la formule des probabilités totales (ainsi que l'indépendance des lancers successifs) permet

$$\text{d'écrire : } p_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot p_n + \frac{3}{5} \cdot (1-p_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot p_n.$$

c. La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique.

On commence par trouver a tel que : $a = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot a$, soit : $a = \frac{1}{2}$, puis la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, q_n = p_n - a, \text{ vérifie : } \forall n \in \mathbb{N}^*, q_{n+1} = -\frac{1}{5} \cdot q_n, \text{ d'où : } q_n = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot q_1 = \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right).$$

$$\text{On en conclut que : } \forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

22. On va noter $E_{i,k}$ l'événement : « le joueur i l'emporte au $k^{\text{ième}}$ lancer ».

a. L'événement proposé (« A_1 l'emporte au $(2n+1)^{\text{ième}}$ lancer ») s'écrit :

$$E_{1,2n+1} = \overline{E_{1,1}} \cap \overline{E_{2,2}} \cap \overline{E_{1,3}} \cap \dots \cap \overline{E_{2,2n}} \cap E_{1,2n+1}, \text{ et par la formule des probabilités composées :}$$

$$P(E_{1,2n+1}) = P(\overline{E_{1,1}}) \cdot P_{\overline{E_{1,1}}}(\overline{E_{2,2}}) \dots P_{\overline{E_{1,1}} \cap \overline{E_{2,2}} \cap \dots \cap \overline{E_{1,2n-1}}}(\overline{E_{2,2n}}) \cdot P_{\overline{E_{1,1}} \cap \overline{E_{2,2}} \cap \overline{E_{1,3}} \cap \dots \cap \overline{E_{1,2n-1}} \cap \overline{E_{2,2n}}}(E_{1,2n+1}).$$

A ce stade, chaque probabilité du produit correspond simplement à la probabilité (simple) d'échec ou de succès au lancer correspondant.

$$\text{Donc : } P(E_{1,2n+1}) = q_1 \cdot q_2 \dots q_1 \cdot q_2 \cdot p_1 = (q_1 \cdot q_2)^n \cdot p_1.$$

b. Par un raisonnement analogue, on obtient : $P(E_{2,2n+2}) = q_1 \cdot q_2 \dots q_1 \cdot q_2 \cdot q_1 \cdot p_2 = (q_1 \cdot q_2)^n \cdot q_1 \cdot p_2.$

c. On a ensuite : $G_1 = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_{1,2,n+1}$, et les événements étant deux à deux incompatibles, on a donc :

$$P(G_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_{1,2,n+1}) = p_1 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (q_1 \cdot q_2)^n = \frac{p_1}{1 - q_1 \cdot q_2}.$$

$$\text{De même : } P(G_2) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_{2,2,n+2}) = q_1 \cdot p_2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (q_1 \cdot q_2)^n = \frac{q_1 \cdot p_2}{1 - q_1 \cdot q_2}.$$

Enfin, si on note G_∞ l'événement : « le jeu dure indéfiniment », alors G_1, G_2, G_∞ forment un système complet d'événements et :

$$P(G_\infty) = 1 - P(G_1) - P(G_2) = 1 - \frac{p_1}{1 - q_1 \cdot q_2} - \frac{q_1 \cdot p_2}{1 - q_1 \cdot q_2} = \frac{1 - q_1 \cdot q_2 - (1 - q_1) - q_1 \cdot (1 - q_2)}{1 - q_1 \cdot q_2} = 0.$$

Autrement dit, il est presque certain que le jeu s'arrête.

d. Le jeu est donc équitable si et seulement si : $\frac{p_1}{1 - q_1 \cdot q_2} = \frac{q_1 \cdot p_2}{1 - q_1 \cdot q_2}$, ou encore : $p_2 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_1}{1 - p_1}$.

Enfin, si : $p_1 > \frac{1}{2}$, alors : $\frac{p_1}{1 - p_1} > 1$, autrement dit le jeu ne peut jamais être équilibré.

23. a. L'événement D_n correspond à la situation où à chaque duel à partir du second et jusqu'au $(n-1)^{\text{ième}}$, le nouveau joueur (celui qui n'a pas participé au duel précédent), remporte le duel en cours, ce qui se passe au $n^{\text{ième}}$ pouvant terminer ou pas la partie.

Notons alors N_k l'événement : « le nouveau joueur remporte le $k^{\text{ième}}$ duel ».

On peut écrire : $\forall n \geq 3, D_n = N_2 \cap \dots \cap N_{n-1}$, et par la formule des probabilités composées :

$$P(D_n) = P(N_2) \cdot P_{N_2}(N_3) \dots P_{N_2 \cap \dots \cap N_{n-2}}(N_{n-1}) = \frac{1}{2^{n-2}},$$

formule encore valable pour : $n = 2$, puisqu'il est certain que le jeu dure au moins 2 parties.

Puis : $\forall n \geq 2, D_n = S_n \cup D_{n+1}$, et les événements de la réunion étant incompatibles :

$$P(D_n) = P(S_n) + P(D_{n+1}), \text{ soit : } P(S_n) = P(D_n) - P(D_{n+1}) = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Enfin l'événement S : « le jeu s'arrête », correspond à : $S = \bigcup_{n=2}^{+\infty} S_n$, et par incompatibilité :

$$P(S) = P\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} S_n\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(S_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1, \text{ autrement dit le jeu s'arrête presque sûrement.}$$

On aurait aussi pu dire que l'événement C : « le jeu continue indéfiniment », correspond à : $C = \bigcap_{n=2}^{+\infty} D_n$,

et puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, D_{n+1} \subset D_n$, on a : $P(C) = P\left(\bigcap_{n=2}^{+\infty} D_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(D_n) = 0$, et :

$$P(E) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1.$$

b. Notons G_A (respectivement G_B, G_C) l'événement : « A (respectivement B, C) remporte le jeu ».

On peut commencer par remarquer que A et B sont dans des situations totalement semblables.

Donc : $P(G_A) = P(G_B)$.

Supposons par ailleurs que A gagne le premier duel.

Alors tant que personne ne remporte la partie, la succession des gagnants de duels est :

A, C, B, A, C, B, ...

et A remporte la partie dans ce cas si et seulement si la succession précédente de gagnants s'interrompt à un moment où A gagne deux duels de suite, le premier gain intervenant alors lors d'un duel numéro $3.k + 1$, avec : $k \in \mathbb{N}$.

De même, si B gagne le premier duel, la succession des gagnants est B, C, A, B, C, A... et A remporte la partie s'il gagne deux duels de suite, le premier gain intervenant lors d'un duel numéro $3.k + 3$, $k \in \mathbb{N}$.

Si on note alors A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement : « A remporte le $n^{\text{ième}}$ duel », on a ainsi :

$$G_A = \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (A_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap \dots \cap A_{3,k+1} \cap A_{3,k+2}) \right) \cup \left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} (B_1 \cap C_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{3,k+3} \cap A_{3,k+4}) \right),$$

puis par incompatibilité et avec la formule des probabilités composées :

$$P(G_A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3,k+2}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3,k+4}} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{5}{16} \cdot \frac{8}{7} = \frac{5}{14}, \text{ puis : } P(G_B) = P(G_A) = \frac{5}{14}$$

$$\text{Enfin : } G_C = \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (A_1 \cap C_2 \cap B_3 \cap \dots \cap C_{3,k+2} \cap C_{3,k+3}) \right) \cup \left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} (B_1 \cap C_2 \cap A_3 \cap \dots \cap C_{3,k+2} \cap C_{3,k+3}) \right),$$

$$\text{et : } P(G_C) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{3,k+3}} = \frac{2}{7} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{8^k} = \frac{2}{8} \cdot \frac{8}{7} = \frac{2}{7}.$$

On peut remarquer qu'on retrouve bien : $P(G_A) + P(G_B) + P(G_C) = P(S) = 1$, ou on aurait pu utiliser cette remarque pour en déduire $P(G_C)$.

Finalement A et B ont autant de chances de remporter la partie, et tous deux plus que C.

Formule de Bayes.

24. Il faut commencer par écrire clairement les événements considérés :

T : « le test est positif »,

V : « le virus est présent dans l'organisme ».

On connaît : $P_V(T) = 0.95$, et : $P_{\bar{V}}(T) = 0.01$ (on confond ici probabilités et statistiques).

Enfin, on sait que : $P(V) = 0.005$, et on veut obtenir : $P_T(V)$.

$$\text{Pour cela la formule de Bayes donne : } P_T(V) = \frac{P(V \cap T)}{P(T)} = \frac{P_V(T) \cdot P(V)}{P_V(T) \cdot P(V) + P_{\bar{V}}(T) \cdot P(\bar{V})},$$

$$\text{et numériquement : } P_T(V) = \frac{0.95 \times 0.005}{0.95 \times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \approx 0.323,$$

autrement dit dans le cas d'un test positif, la probabilité d'être infecté est d'environ 32% et celle de ne pas l'être de 68%, donc même si le test est positif, le fait d'être sain a encore une probabilité double (environ) par rapport au fait d'être malade : on peut attendre un peu avant de s'inquiéter.

25. Supposons que le candidat choisit la boîte numéro 1 (par équivalence des boîtes, on peut supposer que la boîte choisie porte le numéro 1).

Pour : $k \in \{1, 2, 3\}$, notons B_k l'événement : « le trésor se trouve dans la boîte numéro k ».

Si le trésor a été mis au hasard (ce qui est sous-entendu ici), on a : $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$.

On note également O_2 l'événement « le présentateur ouvre la boîte numéro 2 » (là encore, le présentateur choisit une boîte qui n'est pas la numéro 1, et par équivalence, on peut considérer que c'est la numéro 2). On sait de plus que la boîte numéro 2 est alors vide et que le trésor se trouve dans la boîte numéro 1 ou la boîte numéro 3.

La question est : que vaut $P_{O_2}(B_3)$?

$$\text{Pour cela, on utilise la formule de Bayes : } P_{O_2}(B_3) = \frac{P_{B_3}(O_2) \cdot P(B_3)}{P(O_2)}.$$

On calcule alors :

- $P_{B_1}(O_2)$: les boîtes numéros 2 et 3 sont vides et n'ont pas été choisies par le candidat donc le

présentateur a la même probabilité de choisir l'une ou l'autre des boîtes restantes et : $P_{B_1}(O_2) = \frac{1}{2}$.

- $P_{B_2}(O_2)$: le trésor est dans la boîte numéro 2 et le présentateur ne peut pas la choisir : $P_{B_2}(O_2) = 0$.

- $P_{B_3}(O_2)$ le trésor est dans la boîte numéro 3 (et le candidat a choisi la boîte numéro 1) : le présentateur ne peut choisir que la boîte numéro 2 et : $P_{B_3}(O_2) = 1$.

On utilise ensuite la formule des probabilités totales :

$$P(O_2) = P_{B_1}(O_2).P(B_1) + P_{B_2}(O_2).P(B_2) + P_{B_3}(O_2).P(B_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Enfinement : $P_{O_2}(B_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$, et par complément : $P_{O_2}(B_1) = 1 - P_{O_2}(B_3) = \frac{1}{3}$.

Le candidat doit donc échanger la boîte initialement choisie pour la boîte restante.

Remarque : plus naïvement, on peut dire que lorsque le candidat choisit une boîte, il y a 1 chance sur 3 que le trésor soit dedans et 2 chances sur 3 qu'il soit dans l'une des deux autres boîtes. Lorsque le présentateur révèle ensuite que l'une des deux boîtes restantes est vide, la dernière boîte non choisie « récupère » les 2 chances sur 3 de contenir le trésor.