T.D. 10 – Équations différentielles linéaires

1. Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $\left(x^2-4\,x\right)\,y'-(x+2)\,y=x$ (chercher un polynôme solution). Étudier le raccordement en 0.
b) $y'\sin t+y\cos t=\sin^2 t$. Étudier les possibilités de raccordement.

2. © Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\lim\limits_{+\infty}(f+f')=0$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty}f=0$.
(On pourra exprimer f comme solution de l'équation différentielle $y'+y=h$ où $h=f'+f$!)

3. Soit $\lambda>0$. Écrire à l'aide d'une intégrale la solution générale de (E) $xy'+\lambda y=\dfrac{1}{1+x}$.
Existe-t-il des solutions admettant une limite finie en 0 ?
Existe-t-il des solutions développables en série entière en 0 ?

4. Soient $\lambda\in\mathbb{C}^*$, $b\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, 2π-périodique et (E) $y'+\lambda y=b$.
a) Montrer qu'une solution f de (E) sur $\mathbb{R}$ est 2π-périodique si et seulement si $f(0)=f(2\pi)$.
b) Discuter selon λ et b l'existence de solutions de (E) 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

5. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x'=3x-y+\cos t\\ y'=x+y+2\sin t\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x'=y+z-3x\\ y'=z+x-3y\\ z'=x+y-3z\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x'=3x+y-z\\ y'=x+y+z\\ z'=2x+2z\end{cases}$

6. Résoudre les équations différentielles suivantes :
a) $y''-2\alpha y'+y=(x+1)e^{\alpha x}$ ($\alpha\in\mathbb{R}$ donné)
b) $(2x+1)y''+(4x-2)y'-8y=0$ (chercher une solution de la forme $x\mapsto e^{\alpha x}$)
c) $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ (chercher une série entière solution, trouver les solutions maximales)
d) $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ (poser $u=x^2y$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$; étudier le recollement en 0)
e) $(1+t^2)^2y''+2t(1+t^2)y'+my=\dfrac{t}{1+t^2}$ ($m\in\mathbb{R}$ donné ; poser $x=\arctan t$).

7. Condition nécessaire sur a, b respectivement $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^0$ sur I pour que $y''+a(x)\,y'+b(x)\,y=0$ admette deux solutions y_1, y_2 telles que $y_2=xy_1$? Est-ce une condition suffisante ?
Résoudre : $y''+2xy'+\left(x^2+1\right)y=x\exp\left(-x^2/2\right)$.

8. *Équations de Riccati* : ce sont les équations de la forme $y'=a(x)\,y^2+b(x)\,y+c(x)$.
Lorsqu'on connaît une solution “particulière” y_0, le changement de fonction $y=z+y_0$ conduit à une équation de Bernoulli… Par exemple, en remarquant que $x\mapsto x^2$ est solution, intégrer

$$(E)\quad\left(1+x^3\right)y'=y^2+x^2y+2x$$

9. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$ fixé. On appelle φ la solution maximale du problème de Cauchy :

$$y'=x^2+y^2\quad\text{et}\quad y(a)=b$$

et $]\alpha,\beta[$ son intervalle de définition.
a) Montrer que $\beta\leq a+\dfrac{\pi}{a}$.
b) En déduire que $\beta-\alpha\leq 2a+\dfrac{2\pi}{a}$ *(dans le cas $\alpha<-a$, on pourra utiliser $\psi:x\mapsto-\varphi(-x)$).*