Problème A : le brachistrochrone

I.A. - On vérifie facilement pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$M(\theta+\pi) = M(\theta) + 2\pi\vec{j} \qquad \text{et} \qquad M(-\theta) = \mathrm{S}_{Ox}\big(M(\theta)\big)$$

On en déduit que (C) est globalement invariante par la translation de vecteur $2\pi\vec{j}$ et par la symétrie orthogonale par rapport à Ox.

N.B. : (C) est aussi globalement invariante par les composées de ces deux transformations et de leurs inverses, à savoir les translations de vecteur $2k\pi\vec{j}$ et les symétries orthogonales par rapport aux droites d'équation $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; ces invariances correspondent aux égalités :

$$M(\theta+k\pi) = M(\theta) + 2k\pi\vec{j} \qquad \text{et} \qquad M(k\pi-\theta) = \mathrm{S}_{[y=k\pi]}(M(\theta))$$

I.B. - L'étude précédente montre qu'il suffit de construire le sous-arc (C_0) correspondant à $\theta \in [0, \pi/2]$ puis de compléter successivement par la symétrie orthogonale par rapport à Ox et les translations de vecteur $2k\pi\vec{j}$ $(k \in \mathbb{Z})$. J'ai

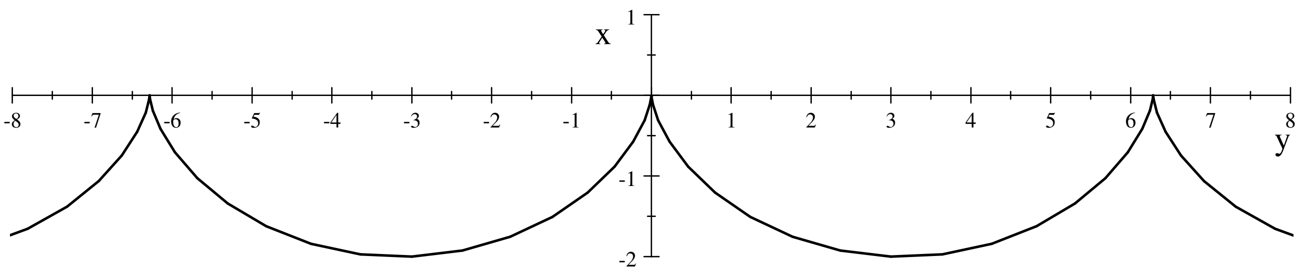
$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad x'(\theta) = 2\sin 2\theta \quad \text{et} \quad y'(\theta) = 2(1-\cos 2\theta),$$

donc x et y sont croissantes sur $[0, \pi/2]$. J'ai un unique point stationnaire sur cet intervalle, pour $\theta = 0$ et il vient

$$M''(\theta) = 4\cos 2\theta\vec{i} + 4\sin 2\theta\vec{j} \quad \text{et} \quad M^{(3)}(\theta) = -8\sin 2\theta\vec{i} + 8\cos 2\theta\vec{j},$$

donc en 0 $M'(0) = \vec{0}$ mais $M''(0) = 4\vec{i}$ et $M^{(3)}(0) = 8\vec{j}$ sont linéairement indépendants, donc il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce, où la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{i}$.

Voici l'allure de (C) (avec les signes opposés de ce qu'il faudrait sur l'axe des x…) :



Il s'agit d'une *cycloïde*. Les points de rebroussement sont obtenus pour $\theta \in \pi\mathbb{Z}$; la longueur d'une “arche” est donc, compte tenu de la symétrie,

$$\begin{aligned}\ell &= 2\int_0^{\pi/2} \left\|M'(\theta)\right\| \mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 2\theta + (1-\cos 2\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{2-2\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\pi/2} \sin\theta\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{La longueur d'une arche est 8.}}$$

I.C.1) Soit $\lambda \in [0,1]$; pour $s \in [0,1[$, $1-\lambda^2 s \geq 1-s > 0$, donc g_λ est définie, continue et positive sur $[0,1[$. De plus, $g_\lambda(s) \leq \dfrac{\lambda}{\sqrt{1-s}}$, d'où, par comparaison à une intégrale de Riemann ($\dfrac{1}{2} < 1$!),

$$\boxed{g_\lambda \text{ est intégrable sur } [0,1[.}$$

Cela justifie la définition et la continuité de f_λ sur $[0,1]$.

I.C.2) Soit $G : (\lambda, s) \mapsto g_\lambda(s)$ et $F : \lambda \mapsto f_\lambda(1) = \displaystyle\int_{[0,1[} G(\lambda, s)\,\mathrm{d}s$. G est définie sur $[0,1] \times [0,1[$, continue par rapport à λ, continue par morceaux par rapport à s et vérifie l'hypothèse de domination (établie à la question précédente)

$$\forall(\lambda, s) \in [0,1] \times [0,1[\quad |G(\lambda, s)| \leq \frac{1}{\sqrt{1-s}}$$

où la fonction $s \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-s}}$ est intégrable sur $[0,1[$. Le théorème de continuité sous le signe somme assure donc que F est continue sur $[0,1]$.

Plutôt que de chercher à la dériver, je considère λ et μ tels que $0 \leq \lambda < \mu \leq 1$ et je constate que

$$\forall s \in]0,1[\quad \lambda\sqrt{s} < \mu\sqrt{s} \quad \text{et} \quad \sqrt{1-\lambda^2 s} > \sqrt{1-\mu^2 s} \quad \text{d'où} \quad G(\lambda, s) < G(\mu, s).$$

Ainsi, $F(\mu) - F(\lambda)$ est l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive sur $]0,1[$, d'où $F(\lambda) < F(\mu)$. En conclusion,

$$\boxed{F : \lambda \mapsto f_\lambda(1) \text{ est continue et strictement croissante sur } [0,1].}$$

I.C.3) Soit $\theta \in [0,\omega]$; j'effectue le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $s = \dfrac{\sin^2 \alpha}{\lambda^2}$:

$$\begin{aligned} f_\lambda\left(\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right) &= \int_0^{\sin^2\theta/\lambda^2} \frac{\lambda\sqrt{s}}{\sqrt{1-\lambda^2 s}}\,\mathrm{d}s = \int_0^\theta \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda^2}\,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\theta (1-\cos 2\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\lambda^2}\left[\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right]_0^\theta \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{f_\lambda\left(\frac{\sin^2\theta}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{2\lambda^2}(2\theta - \sin 2\theta).}$$

La bijection $\varphi_\lambda : \begin{array}{ccc} [0,\omega] & \to & [0,1] \\ \theta & \mapsto & \dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2} \end{array}$ permet de paramétrer la courbe $(C_\lambda) = \big\{(x, f_\lambda(x)) \ / \ x \in [0,1]\big\}$ par :

$$M_\lambda(\theta) \begin{cases} x_\lambda(\theta) = \dfrac{\sin^2\theta}{\lambda^2} = \dfrac{1}{2\lambda^2}(1-\cos 2\theta) \\ y_\lambda(\theta) = f_\lambda(x_\lambda(\theta)) = \dfrac{1}{2\lambda^2}(2\theta - \sin 2\theta) \end{cases} \quad , \quad \theta \in [0,\omega]$$

ce qui prouve que (C_λ) est l'image par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2\lambda^2}$ du sous-arc de (C) défini par :

$$M(\theta) \begin{cases} x(\theta) = 1 - \cos 2\theta \\ y(\theta) = 2\theta - \sin 2\theta \end{cases} \quad , \quad \theta \in [0,\omega].$$

Toujours pour $\lambda = \sin\omega \in]0,1[$, le résultat précédent fournit, pour $\theta = \omega$:

$$\boxed{f_\lambda(1) = \frac{\omega - \sin\omega\,\cos\omega}{\sin^2\omega}.}$$

I.C.4) La continuité de $\lambda \mapsto f_\lambda(1)$ en 1 permet d'écrire :

$$f_1(1) = \lim_{\lambda\to 1^-} f_\lambda(1) = \lim_{\omega\to\pi/2^-} \frac{\omega - \sin\omega\,\cos\omega}{\sin^2\omega}$$

soit

$$\boxed{f_1(1) = \frac{\pi}{2}.}$$

II.A. - $z \in E$ est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}}$ est définie, continue, positive sur $]0,1]$ et majorée par $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+M^2}}{\sqrt{x}}$ (où $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |z(x)|$), elle-même intégrable sur $[0,1]$ (intégrale de Riemann). Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}} \text{ est intégrable sur }]0,1].}$$

L'ensemble $\mathcal{E}_a = \big\{U(z) \ / \ z \in E_a\big\}$ est une partie de $\mathbb{R}$, non vide (E_a est non vide, car il contient par exemple la fonction constante a !), minorée par 0 : il admet donc une borne inférieure $m(a)$.

De plus, pour tout z de E_a, j'ai

$$\forall x \in]0,1] \quad \frac{\sqrt{1+z^2(x)}}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{d'où} \quad U(z) \geq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2.$$

Donc 2 est un minorant de $\mathcal{E}_a$, dont $m(a)$ est le plus grand minorant : $m(a) \geq 2$. Enfin, nous avons vu que la constante a appartient à E_a, donc $U(a)$ appartient à $\mathcal{E}_a$ et par conséquent

$$m(a) \leq U(a) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{1+a^2}.$$

Finalement

$$\boxed{2 \leq m(a) \leq 2\sqrt{1+a^2}.}$$

II.B. - D'après l'encadrement précédent et le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{a\to 0} m(a) = 2.}$$

II.C.1) J'ai, pour $t \in \mathbb{R}$: $\phi(t) = \displaystyle\int_0^1 \psi(t,x)\mathrm{d}x$ avec :

$$\psi : (t,x) \mapsto \frac{\sqrt{1+[z(x)+t\,h_0(x)]^2}}{\sqrt{x}} \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times]0,1]$$

Je fixe $M > 0$ et j'applique le théorème de dérivation sous le signe somme sur $[-M, M]$.

- Pour tout t de $[-M, M]$, $\psi(t,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$ (cf. l'existence de $U(z+th_0)$ établie au **II.A**).
- ψ admet une première dérivée partielle $\dfrac{\partial\psi}{\partial t} : (t,x) \mapsto \dfrac{[z(x)+th_0(x)]\,h_0(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+[z(x)+t\,h_0(x)]^2}}$, continue par rapport à t, continue par morceaux par rapport à x et vérifiant l'hypothèse de domination
$$\forall (t,x) \in [-M,M] \times]0,1] \qquad \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)\right| \leq \frac{[|z(x)| + M\,|h_0(x)|] \cdot |h_0(x)|}{\sqrt{x}} \leq \frac{A}{\sqrt{x}}$$
où A est une constante (indépendante de t !) fournie par la continuité de z et de h_0, qui sont donc bornées sur $[0,1]$. Or $x \mapsto \dfrac{A}{\sqrt{x}}$ est bien intégrable sur $]0,1]$.

J'en conclus que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-M, M]$, cela pour tout $M > 0$, donc

$$\boxed{\phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

II.C.2) Le théorème précédent justifie également l'utilisation de la formule de Leibniz

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi'(t) = \int_0^1 \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{[z(x)+th_0(x)]\,h_0(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+[z(x)+th_0(x)]^2}}\mathrm{d}x.$$

En particulier,

$$\boxed{\phi'(0) = \int_0^1 \frac{z(x)h_0(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x.}$$

Notons que, pour tout t réel, $z + th_0 \in E_a$ (par linéarité de l'intégrale, puisque $z \in E_a$ et $h_0 \in E_0$!). Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi(t) \geq m(a) = \phi(0)$$

Comme ϕ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et admet un minimum en 0, j'ai $\phi'(0) = 0$, cela pour tout h_0 de E_0.
Soit maintenant $h \in E$ et $I = \int_0^1 h$; il est clair que $h - I \in E_0$ et j'ai donc :

$$0 = \int_0^1 \frac{z(x)[h(x)-I]}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{z(x)h(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 \frac{z(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x\right) I$$

soit

$$\boxed{\int_0^1 \frac{z(x)h(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x = \lambda\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x \text{ avec } \lambda = \int_0^1 \frac{z(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x, \text{ cela pour tout } h \text{ de } E.}$$

Notons qu'il était possible d'utiliser la remarque du tout début de l'énoncé…

II.C.3) N a été choisi tel que pour tout $n > N$ on ait :

$$[x_0 - 1/n, x_0 + 1/n] \subset [x_0 - 1/N, x_0 + 1/N] \subset [0,1]$$

Pour un tel n, l'intégrale proposée s'écrit :

$$\int_0^1 h_n(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} n\left(1 - n\left|x - x_0\right|\right) f(x)\mathrm{d}x$$

ou encore, par le changement de variable : $x = x_0 + u/n,\ u \in [-1,1]$

$$\int_0^1 h_n(x) f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 (1 - |u|) f(x_0 + u/n)\mathrm{d}u$$

Définissons pour $n \in \mathbb{N}$ $g_n : u \mapsto (1-|u|) f(x_0+u/n)$ et $g : u \mapsto (1-|u|)\, f(x_0)$ et appliquons le théorème de convergence dominée à la suite $(g_n)_{n>N}$:

- (g_n) converge simplement vers g sur $[-1,1]$;
- g est une fonction continue sur $[-1,1]$;
- $\forall n > N \quad \forall u \in [0,1] \quad |g_n(u)| \leq M = \max\limits_{[x_0-1/N, x_0+1/N]} |f|$, fonction constante intégrable sur $[-1,1]$.

Je peux donc conclure que les g_n, $n > N$ et g sont intégrables sur $[-1,1]$ et que

$$\int_{-1}^1 g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-1}^1 g = f(x_0) \int_{-1}^1 (1 - |u|)\,\mathrm{d}u = 2f(x_0) \int_0^1 (1-u)\,\mathrm{d}u.$$

Autrement dit

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h_n(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x = f(x_0).}$$

II.C.4) Je remarque que $h_n \in E$ et que

$$\int_0^1 h_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot n = 1.$$

J'applique alors le résultat du **II.C.2)** avec $h = h_n$:

$$\forall n > N \quad \lambda = \int_0^1 \frac{z(x) h_n(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}\mathrm{d}x.$$

J'applique alors le **II.C.3)** à $f : x \mapsto \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2(x)}}$, qui est bien continue sur $]0,1[$ et il vient, par unicité de la limite,

$$\lambda = \frac{z(x_0)}{\sqrt{x_0}\sqrt{1+z^2(x_0)}}, \text{ cela pour tout } x_0 \text{ de }]0,1[.$$

D'où, en multipliant par $\sqrt{x_0}$ et par continuité de z sur $[0,1]$:

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad \frac{z(x)}{\sqrt{1+z^2(x)}} = \lambda\sqrt{x}} \tag{2}$$

(où l'on a remplacé la variable “muette” x_0 par x...).

Supposons un instant $\lambda \leq 0$; alors la relation (2) montrerait que $z(x) \leq 0$ pour tout x de $[0,1]$; or $\displaystyle\int_0^1 z = a > 0$, par hypothèse, d'où une contradiction. Par conséquent $\lambda > 0$ et z est à valeurs positives.

Par ailleurs, avec $x = 1$, $\lambda^2 = \dfrac{z(1)}{\sqrt{1+z^2(1)}} < 1$; finalement

$$\boxed{\lambda \in]0,1[.}$$

Soit $x \in [0,1]$; toujours grâce à la relation (2), j'obtiens en élevant au carré

$$z^2(x) = \lambda^2 x\left(1 + z^2(x)\right) \quad \text{d'où} \quad \left(1 - \lambda^2 x\right) z^2(x) = \lambda^2 x.$$

Or $1 - \lambda^2 x > 0$, $\lambda > 0$, $x \geq 0$ et $z(x) \geq 0$, d'où en prenant la racine carrée :

$$\boxed{\forall x \in [0,1] \quad z(x) = \frac{\lambda\sqrt{x}}{\sqrt{1-\lambda^2 x}} = g_\lambda(x)\ !}$$

II.C.5) Par hypothèse et d'après le résultat précédent,

$$a = \int_0^1 z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g_\lambda(x)\,\mathrm{d}x = f_\lambda(1)\,.$$

Nous avons vu au **I.E.2)** que la fonction $\lambda \mapsto f_\lambda(1)$ est strictement croissante sur $[0,1]$. Or g_0 est la fonction nulle, donc $f_0(1) = 0$ et $f_1(1) = \pi/2$ d'après **I.E.4)**. Par conséquent, puisque $\lambda \in]0,1[$,

$$\boxed{0 < a < \pi/2.}$$

II.D.1) Nous avons fixé $a \in]0,\pi/2[$, or la fonction $\varphi : \lambda \mapsto f_\lambda(1)$, continue, strictement croissante sur $[0,1]$ et telle que $f_0(1) = 0$ et $f_1(1) = \pi/2$, définit une bijection strictement croissante de $]0,1[$ dans $]0,\pi/2[$. Il en résulte l'existence et l'unicité de λ dans $]0,1[$ tel que $\varphi(\lambda) = a$ (c'est $\lambda = \varphi^{-1}(a)$!).

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \lambda \in]0,1[\text{ tel que } f_\lambda(1) = a.}$$

II.D.2) Soit $h_0 \in E_0$. L'étude du **II.C.1)** vaut pour $z = g_\lambda$ (qui est dans E_a par choix de λ ! On n'a pas eu besoin de l'hypothèse $U(z) = m(a)$ dans ladite étude...) ; donc la fonction $\phi : t \mapsto U(g_\lambda + th_0)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi'(t) = \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{où} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) = \frac{[g_\lambda(x) + th_0(x)]\,h_0(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + [g_\lambda(x) + th_0(x)]^2}}.$$

Je calcule (en dérivant comme un produit), pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times]0,1]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t,x) &= \frac{h_0(x)}{\sqrt{x}} \left(\frac{h_0(x)}{\sqrt{1 + [g_\lambda(x) + th_0(x)]^2}} + [g_\lambda(x) + th_0(x)]\,\frac{-h_0(x)\,[g_\lambda(x) + th_0(x)]}{\left(1 + [g_\lambda(x) + th_0(x)]^2\right)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{h_0^2(x)}{\sqrt{x}\left(1 + [g_\lambda(x) + th_0(x)]^2\right)^{3/2}} \geq 0
\end{aligned}$$

Or, comme au **II.C.1)**, pour t dans un segment, je peux dominer cette dérivée par une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{C^{ste}}{\sqrt{x}}$ et en déduire que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec une dérivée seconde positive, *a fortiori* :

$$\boxed{\text{La fonction } \phi : t \mapsto U(g_\lambda + th_0) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ avec une dérivée croissante sur } \mathbb{R}.}$$

II.D.3) Autrement dit ϕ est convexe, or la tangente à son graphe au point d'abscisse 0 a pour équation cartésienne $y = \phi(0) + t\phi'(0)$, d'où classiquement (par exemple à l'aide du théorème des accroissements finis)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \phi(t) \geq \phi(0) + t\phi'(0)\,.$$

Reste à prouver (sans tricher...) que $\phi'(0) = 0$. Nous avons vu à la question précédente que

$$\phi'(0) = \int_0^1 \frac{g_\lambda(x)\,h_0(x)}{\sqrt{x}\sqrt{1 + g_\lambda^2(x)}}\mathrm{d}x.$$

Or, par définition de g_λ (cf. le calcul du **II.C.4)**...),

$$\forall x \in]0,1] \quad g_\lambda(x) = \frac{\lambda\sqrt{x}}{\sqrt{1 - \lambda^2 x}} \quad \text{d'où} \quad 1 + g_\lambda^2(x) = \frac{1}{1 - \lambda^2 x}$$

soit finalement

$$\phi'(0) = \int_0^1 \lambda h_0(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ par définition de } E_0.$$

D'après ce qui précède, ϕ admet un minimum global en 0 : en particulier $\phi(1) \geq \phi(0)$!

$$\boxed{U(g_\lambda + h_0) \geq U(g_\lambda).}$$

II.D.4) Fixons $a \in]0,\pi/2[$.

- Le **II.C.** a montré que, si $z \in E_a$ vérifie $U(z) = m(a)$, nécessairement $z = g_\lambda$, où λ vérifie $a = f_\lambda(1)$; g_λ est donc la seule solution **possible**.
- Le **II.D.3)** montre que g_λ convient, λ étant défini par $a = f_\lambda(1)$: en effet, soit $z \in E_a$; alors $h_0 = z - g_\lambda \in E_0$, d'où
$$U(z) = U(g_\lambda + h_0) \geq U(g_\lambda)\,,$$
cela pour tout z de E_a, ce qui signifie que $U(g_\lambda) = m(a)$.

En conclusion,

$$\boxed{g_\lambda \text{ est l'unique élément } z \text{ de } E_a \text{ tel que } U(z) = m(a).}$$

$a = f_\lambda(1)$ a été calculé en fonction de ω au **I.E.4)**. D'après ce qui précède,

$$m(a) = U(g_\lambda) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1-\lambda^2 x}}.$$

Je réutilise le changement de variable $x = \dfrac{\sin^2\alpha}{\lambda^2}$, $\alpha \in [0, \omega]$:

$$m(a) = \int_0^\omega \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\lambda\sin\alpha\cos\alpha}\mathrm{d}\alpha = \frac{2\omega}{\lambda}.$$

Finalement,

$$\boxed{a = \frac{\omega - \sin\omega\cos\omega}{\sin^2\omega} \quad \text{et} \quad m(a) = \frac{2\omega}{\sin\omega}.}$$

III.A. Par définition, les coordonnées $x(t)$, $y(t)$ du point $M(t)$ vérifient

$$y(t) = f\big(x(t)\big),\ y'(t) = x'(t).f'\big(x(t)\big) \quad \text{et} \quad g.x(t) = \frac{1}{2}\left[x'(t)^2 + y'(t)^2\right]$$

avec $x(0) = 0$, $x'(t) > 0$ et $t \in [0, T]$. Alors x est strictement croissante et

$$\forall t \in [0, T] \quad g.x(t) = \frac{1}{2}x'(t)^2\left[1 + f'\big(x(t)\big)^2\right] \quad \text{et} \quad x(t) > 0$$

soit

$$\forall t \in [0, T] \quad 1 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1 + f'\big(x(t)\big)^2}}{\sqrt{x(t)}}x'(t)$$

et en intégrant, grâce au changement de variable $x = x(t)$, sachant que $x(T) = 1$,

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x,$$

soit

$$\boxed{T = \frac{1}{\sqrt{2g}}U(f').}$$

III.B. Soit $a \in \left]0, \pi/2\right[$. Nous cherchons f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$, $f(1) = a$ et $U(f')$ minimum. Or, f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, j'ai

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0) = a \quad \text{donc} \quad f' \in E_a.$$

D'après la partie **II**, f est solution si et seulement si $f' = g_\lambda$ ($\lambda \in \left]0, 1\right[$ étant déterminé par $a = f_\lambda(1)$), c'est-à-dire si et seulement si $f = f_\lambda$ (puisque $f(0) = 0$).

$$\boxed{\text{L'unique solution pour } (\Gamma) \text{ est le graphe } (C_\lambda) \text{ de } f_\lambda.}$$

D'après la question précédente, le temps T vaut $\dfrac{1}{\sqrt{2g}}m(a)$, soit d'après **II.D.4)**

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{2}{g}}\frac{\omega}{\sin\omega} \text{ où } \omega = \arcsin\lambda.}$$

Problème B

Partie I

1) D'après le théorème de Cauchy, il existe une unique solution de (E) sur I vérifiant les conditions initiales

$$y(c) = 0,\ y'(c) = 0,$$

or la fonction nulle en est une :

$$\boxed{\text{Si } y \text{ solution de } (E) \text{ vérifie } y(c) = 0,\ y'(c) = 0, \text{ alors } y \text{ est la fonction nulle.}}$$

2) a) y étant $\mathcal{C}^2$ sur I est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur$]a, b[$, donc le théorème de Rolle fournit $c \in \,]a, b[$ tel que $y'(c) = 0$; or par hypothèse y ne s'annule pas sur $]a, b[$:

$$\boxed{\exists c \in \,]a, b[\quad y'(c) = 0 \quad \text{et} \quad y(c) \neq 0.}$$

b) Si $y(c) > 0$, y étant continue et ne s'annulant pas sur $]a, b[$ ne prend que des valeurs strictement positives ; or, y est solution de (E) et q est à valeurs négatives, donc $y'' = -qy \geq 0$; y' est croissante sur $[a, b]$, nulle en c ; quitte à les intervertir, je peux supposer que $a < b$, alors y' est négative sur $[a, c]$ et positive sur $[c, b]$:

$$\boxed{y \text{ est décroissante sur } [a, c], \text{ croissante sur } [c, b].}$$

c) La conclusion précédente contredit le fait que $y(a) = y(b) = 0$ et $y(c) > 0$! Dans le cas où $y(c) < 0$, le raisonnement précédent appliqué à $-y$ aboutit à la même contradiction :

$$\boxed{\text{L'hypothèse formulée au début de cette question est impossible.}}$$

3) a) Si m appartenait à F_1, j'aurais $a < m$ et $y(m) = 0$ et par définition de $m = \min F_1$

$$\forall x \in \,]a, m[\quad y(x) \neq 0.$$

Cela est impossible d'après la question précédente, donc

$$\boxed{m \notin F_1.}$$

b) m étant le plus grand minorant de F_1, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $m + \frac{1}{n}$ n'en est pas un, d'où l'existence de $b_n \in F_1$ tel que $b_n < m + \frac{1}{n}$; en outre $m < b_n$ car m est un minorant de F_1 et $b_n \neq m$ puisque $m \notin F_1$. Finalement, par définition de F_1 :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists b_n \quad m < b_n < m + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y(b_n) = 0.}$$

D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = m$, d'où, comme y est continue,

$$\boxed{y(m) = 0.}$$

Or a est un minorant de F_1, donc $a \leq m$ et puisque $m \notin F_1$, nécessairement

$$\boxed{m = a.}$$

c) y est continue sur $[a, b_n]$, dérivable sur $]a, b_n[$ et $y(a) = y(b_n) = 0$, donc, d'après le théorème de Rolle, du fait que $a < b_n < a + \frac{1}{n}$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists d_n \quad a < d_n < a + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad y'(d_n) = 0.}$$

Il en résulte comme ci-dessus que $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = a$ et, y' étant continue

$$\boxed{y'(a) = 0.}$$

d) D'après **1)**, y est la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse ; nécessairement

$$\boxed{F_1 = \emptyset.}$$

e) Si $F_2 \neq \emptyset$, on peut effectuer un raisonnement similaire à partir de $M = \sup F_2$ pour aboutir à une contradiction :

$$\boxed{F_2 = \emptyset.}$$

4) Je viens de montrer que, si une solution y de (E) admet un zéro a, alors y ne s'annule en aucun autre point de I :

$$\boxed{\text{Toute solution non nulle de } (E) \text{ possède au plus un zéro.}}$$

5) a) Dans le cas où $\omega = 0$, les solutions non nulles de $y'' = 0$ sont les $x \mapsto \lambda x + \mu$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ qui admettent au plus un zéro (un unique si $\lambda \neq 0$, aucun si $\lambda = 0$).

Je suppose désormais $\omega > 0$.

Les solutions non nulles de $y'' - \omega^2 y = 0$ sont les $x \mapsto \lambda e^{\omega x} + \mu e^{-\omega x} = e^{-\omega x}(\lambda e^{2\omega x} + \mu)$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ qui admettent au plus un zéro (un unique $x = \dfrac{1}{2\omega} \ln\left(-\dfrac{\mu}{\lambda}\right)$ si $\lambda \neq 0$ et λ, μ de signes contraires, aucun sinon).

Les solutions non nulles de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les $x \mapsto \lambda \cos(\omega x + \varphi)$, qui admettent une infinité de zéros.

b) $x \mapsto x^\alpha$ est solution de $x^2 y'' - \omega^2 y = 0$ si et seulement si $\alpha^2 - \alpha - \omega^2 = 0$, soit si et seulement si $\alpha = k$ ou $\alpha = 1 - k$, en posant $k = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4\omega^2}}{2}$; le wronskien en 1 de $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto x^{1-k}$ vaut $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1-k \end{vmatrix} = 1 - 2k \neq 0$ car $k > 1/2$, donc ces deux fonctions forment une base de l'espace des solutions, et les solutions non nulles sont les $x \mapsto x^k\left(\lambda + \mu x^{1-2k}\right)$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$; elles admettent au plus un zéro (raisonnement comme ci-dessus).

c) De même, $x \mapsto x^\alpha$ est solution de $x^2 y'' + \omega^2 y = 0$ si et seulement si $\alpha^2 - \alpha + \omega^2 = 0$; le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 1 - 4\omega^2$:

* Si $\omega \in [0, 1/2[$: les deux valeurs réelles de α fournissent comme ci-dessus une base de l'espace des solutions ; les solutions non nulles admettent alors au plus un zéro (raisonnement identique au précédent) ;
* Si $\omega = 1/2$: la seule solution de la forme $x \mapsto x^\alpha$ est $x \mapsto \sqrt{x}$; on trouve les solutions de (E) sous la forme $y = z\sqrt{x}$, ce qui conduit aux solutions, de la forme $x \mapsto \sqrt{x}\,(\lambda + \mu \ln x)$; là encore, les solutions non nulles admettent au plus un zéro ;
* Si $\omega > 1/2$: j'ai alors une base de l'espace des solutions à valeurs complexes de (E), formée des deux solutions à valeurs complexes de la forme $x \mapsto x^{k \pm i\varphi}$, où $k + i\varphi$ et $k - i\varphi$ sont les solutions de $\alpha^2 - \alpha + \omega^2 = 0$; or
$$x^{k+i\varphi} = x^k e^{i\varphi \ln x} = x^k \left[\cos(\varphi \ln x) + i \sin(\varphi \ln x)\right] = \overline{x^{k-i\varphi}} \ ;$$
les solutions à valeurs complexes sont donc de la forme
$$x \mapsto x^k \cdot \left[\lambda \cos(\varphi \ln x) + \mu \sin(\varphi \ln x)\right] \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \ ;$$
il en résulte que les solutions à valeurs réelles sont de la forme
$$x \mapsto x^k \cdot \left[\lambda \cos(\varphi \ln x) + \mu \sin(\varphi \ln x)\right] \ , \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$
(en effet ces fonctions forment un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ inclus dans l'ensemble des solutions qui est lui-même un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$ en vertu du théorème de Cauchy !).
Ces solutions peuvent se mettre sous la forme $x \mapsto A x^k \cos(\varphi \ln x + \psi)$, $(A, \psi) \in \mathbb{R}^2$.
Les solutions non nulles admettent une infinité de zéros.

Partie II

1) a) W est $\mathcal{C}^1$ et $W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = (p - q) y_1 y_2 > 0$ sur $]a, b[$ par hypothèse :

$$\boxed{W \text{ est strictement croissante sur }]a, b[.}$$

Or on a supposé $y_2(a) = y_2(b) = 0$ et $y_2 > 0$ sur $]a, b[$; nécessairement $y_2'(a) \geq 0$ et $y_2'(b) \leq 0$ (par passage à la limite dans les taux de variation) ; mézalor

$$W(a) = y_1(a) y_2'(a) \geq 0 \quad \text{et} \quad W(b) = y_1(b) y_2'(b) \leq 0 \ ,$$

ce qui est absurde, vu le résultat précédent :

$$\boxed{\text{L'hypothèse “}\forall x \in \,]a, b[\quad y_1(x) > 0\text{” est impossible.}}$$

b) Si y_1 ne prenait que des valeurs négatives, la question précédente, appliquée en remplaçant y_1 par $-y_1$, aboutit aussi à une contradiction ; y_1 doit changer de signe et donc s'annuler puisqu'elle est continue :

$$\boxed{y_1 \text{ possède au moins un zéro dans }]a,b[.}$$

2) Si a et b sont deux zéros consécutifs de y_2, alors y_2 ne change pas de signe sur $]a,b[$; si $y_2>0$, la question précédente s'applique ; si $y_2<0$, elle s'applique en remplaçant y_2 par $-y_2$:

$$\boxed{\text{Si } a \text{ et } b \text{ sont deux zéros consécutifs de } y_2\text{, toute solution de } (E_1) \text{ admet au moins un zéro dans }]a,b[.}$$

3) a) Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $q(x)=\omega^2$ et $y_2 : x \mapsto \sin \omega x$, dont $k\pi/\omega$ et $(k+1)\pi/\omega$ sont bien deux zéros consécutifs.

b) $p : x \mapsto \dfrac{\omega^2}{x^2}$ avec $\omega \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, fournit d'après **I)5)c)** un exemple où les solutions non nulles de (E) admettent au plus un zéro sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) a) Soit $f : (x,t) \mapsto \cos(x\cos t)$; f admet des dérivées partielles par rapport à x, à tout ordre, qui sont toutes dominées par la fonction constante 1, qui est intégrable sur le segment $[0,\pi]$! En effet

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0,\pi] \qquad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \cos^n t \cdot \cos\left(x\cos t + n\frac{\pi}{2}\right).$$

De plus toutes ces dérivées partielles (y compris f elle-même) sont continues par rapport à x et continues par morceaux et intégrables par rapport à t sur $[0,\pi]$ (puisque continues sur un segment !). Donc, en tant qu'intégrale dépendant d'un paramètre et grâce au théorème de dérivation sous le signe somme (réitéré) :

$$\boxed{F \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}\text{, avec } F' : x \mapsto \int_0^\pi -\cos t \sin(x\cos t)\,\mathrm{d}t \text{ et } F'' : x \mapsto \int_0^\pi -\cos^2 t \cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t.}$$

b) J'obtiens, comme $1-\cos^2 t = \sin^2 t$, en intégrant par parties, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} -x\left[F''(x)+F(x)\right] &= \int_0^\pi -x\sin^2 t\cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi (\sin t)\left[-x\sin t\cos(x\cos t)\right]\mathrm{d}t \\ &= \left[\sin t \sin(x\cos t)\right]_{t=0}^{t=\pi} - \int_0^\pi \cos t\sin(x\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= F'(x) \end{aligned}$$

C'est dire que

$$\boxed{F \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E)\ xy''+y'+xy=0.}$$

c) $z = y\sqrt{x}$ donne

$$z' = y'\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}y \quad ; \quad z'' = y''\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}y' - \frac{1}{4x\sqrt{x}}y$$

et

$$z'' + \left(1+\frac{1}{4x^2}\right)z = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(xy''+y'+xy\right).$$

Donc, d'après la question précédente

$$\boxed{z : x \mapsto \sqrt{x}F(x) \text{ est solution sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ de } z'' + \left(1+\frac{1}{4x^2}\right)z = 0.}$$

Je peux alors appliquer le **3)a)**, avec $\omega = 1$, et, F étant paire :

$$\boxed{\text{Tout intervalle }]k\pi,(k+1)\pi[,\ k \in \mathbb{Z}, \text{ contient au moins un zéro de } F.}$$