Problème A : *intégrale de Dirichlet*

1) C'est un exemple du cours : soient ε et X tels que $0<\varepsilon<X$; j'intègre par parties :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \left[(1-\cos t)\,\frac{1}{t}\right]_\varepsilon^X + \int_\varepsilon^X \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\;.$$

Comme les fonctions intégrées se prolongent par continuité en 0, j'obtiens lorsque ε tend vers 0

$$\int_0^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{1-\cos X}{X} + \int_0^X \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t\;.$$

Or $\dfrac{1-\cos X}{X} \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la fonction $t\mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ (prolongée par continuité en 0) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs positives, et $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$). En conclusion

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^+}\frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t,$$

ce qui donne un sens à l'intégrale impropre

$$\boxed{F=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.}$$

2) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\,]0,\pi[$. J'ai

$$\forall k\in[\![1,n]\!]\quad 2\sin x\cos 2kx = \sin\left(2k+1\right)x - \sin\left(2k-1\right)x,$$

d'où, en constatant l'hécatombe

$$\sum_{k=1}^n 2\sin x\cos 2kx = \sin\left(2n+1\right)x - \sin x.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par $\sin x$ (qui est strictement positif)

$$\boxed{\forall x\in\,]0,\pi[\quad \frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x} = 1+2\sum_{k=1}^n\cos 2kx.}$$

(Autres idées récurrence ou utilisation de $\sum e^{2ikx}\ldots$)

La fonction $x\mapsto \dfrac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x}$ se prolonge par continuité en 0 et j'obtiens en intégrant la relation précédente (par linéarité de l'intégrale, il s'agit d'une somme finie !) :

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=1}^n\int_0^{\pi/2}\cos 2kx\mathrm{d}x,$$

soit

$$\boxed{\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\left(2n+1\right)x}{\sin x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.}$$

3) a) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$; pour $n\in\mathbb{N}^*$, j'intègre par parties (f et $x\mapsto -\dfrac{\cos nx}{n}$ sont bien de classe $\mathcal{C}^1$) :

$$I_n = \left[-f\left(x\right)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} f'\left(x\right)\cos nx\mathrm{d}x,$$

d'où, en notant $M_0=\sup\limits_{[0,\pi/2]}|f|$ et $M_1=\sup\limits_{[0,\pi/2]}|f'|$, $|I_n|\le \frac{2M_0}{n}+\frac{1}{n}\frac{\pi}{2}M_1$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{La suite de terme général } I_n=\int_0^{\pi/2} f\left(x\right)\sin nx\mathrm{d}x \text{ converge vers } 0.}$$

b) Par construction, f est continue sur $[0,\pi/2]$, de classe $\mathcal{C}^1$ (car $\mathcal{C}^2$) sur $]0,\pi/2]$ avec, en utilisant la formule de Taylor-Young pour g et pour g' :

$$\forall x \in \left]0,\pi/2\right] \quad f'(x) = \frac{xg'(x) - g(x) + g(0)}{x^2}$$
$$= \frac{x\left(g'(0) + xg''(0) + o(x)\right) - \left(g(0) + xg'(0) + \frac{x^2}{2}g''(0) + o\left(x^2\right)\right) + g(0)}{x^2}$$
$$= \frac{g''(0)}{2} + o(1)$$

Par conséquent, f' admet une limite finie en 0, donc (théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$)

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi/2].}$$

D'après le **a)**, la suite de terme général I_n converge vers 0, où :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{g(x)-g(0)}{x}\sin nx\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2}\frac{g(x)\sin nx}{x}\mathrm{d}x - g(0)\int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière égalité est justifiée par l'intégrabilité des deux fonctions apparaissant (elles se prolongent par continuité en 0). Ainsi, grâce au changement de variable $t = nx$:

$$I_n = J_n - g(0)\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t, \quad \text{soit} \quad J_n = g(0)\,\Phi(n\pi/2) + I_n,$$

où $\Phi : X \mapsto \displaystyle\int_0^X \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ admet pour limite F en $+\infty$ (d'après **1)**). Finalement :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } J_n = \int_0^{\pi/2} g(x)\frac{\sin nx}{x}\mathrm{d}x \text{ converge vers } F\cdot g(0).}$$

4) $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{\sin x} & \text{si } x \in \left]0,\pi/2\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est l'inverse de $h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \left]0,\pi/2\right] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (qui ne s'annule pas). Il suffit de montrer que h est de classe $\mathcal{C}^2$. On vérifie comme au **3)b)** que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, avec $h' : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \text{si } x \in \left]0,\pi/2\right] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. J'applique maintenant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à h', qui est continue sur $[0,\pi/2]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0,\pi/2\right]$, avec, tous calculs faits,

$$\forall x \in \left]0,\pi/2\right] \quad h''(x) = \frac{\left(2-x^2\right)\sin x - 2x\cos x}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{3}.$$

Ainsi, h' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$, autrement dit

$$\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,\pi/2].}$$

5) Appliqué à cette fonction g, le **2)** m'apprend que la suite (J_n) converge vers F (puisque $g(0) = 1$). Or le **2)** montre que $J_{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, d'où, par unicité de la limite de cette suite extraite

$$\boxed{F = \frac{\pi}{2}.}$$

Problème B

1) Soit $x \in \left]-1,1\right[$, j'ai

$$t^2 + 2xt + 1 = (t+x)^2 + 1 - x^2,$$

Puisque $1 - x^2 > 0$, il en résulte que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+2xt+1}$ est continue, positive sur $\mathbb{R}^+$; en outre j'ai les primitives

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2xt+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arctan\frac{t+x}{\sqrt{1-x^2}} + C^{ste}.$$

Par conséquent, pour tout $T > 0$

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2xt+1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\arctan\frac{T+x}{\sqrt{1-x^2}} - \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Cette expression admettant une limite finie lorsque T tend vers $+\infty$, l'existence de $F(x)$ est justifiée, avec plus précisément

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right).}$$

2) Par hypothèse, $a^2-4b<0$, ainsi j'ai nécessairement $b>0$ et donc, grâce au changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = t\sqrt{b}$, j'ai

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+au+b} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{b}\mathrm{d}t}{b\left(t^2+\frac{a}{\sqrt{b}}t+1\right)},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{G(a,b) = \frac{1}{\sqrt{b}}F\left(\frac{a}{2\sqrt{b}}\right).}$$

(Noter que $\frac{a}{2\sqrt{b}}$ est bien dans $]-1,1[$, puisque $\frac{a^2}{4b}<1$.)

3) Pour des raisons de parité, je cherche une décomposition de Φ sous la forme

$$\Phi(X) = \frac{\lambda X+\mu}{X^2+aX+b} + \frac{-\lambda X+\mu}{X^2-aX+b}.$$

Pour une fois, bricolons ! La valeur de $\Phi(0)$ me donne $\mu = \frac{1}{2b}$ et celle de $\Phi\left(i\sqrt{b}\right)$ (on peut bricoler habilement !) fournit $\lambda = \frac{1-b}{2ab}$ et l'on vérifie “aisément” que

$$\boxed{\Phi(X) = \frac{1}{2ab}\left[\frac{(1-b)X+a}{X^2+aX+b} + \frac{(b-1)X+a}{X^2-aX+b}\right].}$$

4) $X^4+X^2+\frac{1}{2} = \left(X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{2}-1\right)X^2$, soit

$$\boxed{P(X) = \left(X^2+aX+b\right)\left(X^2-aX+b\right) \quad \text{où} \quad a = \sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ et } b = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

(Noter que $a>0$ et $a^2-4b = -1-\sqrt{2}<0$.)

5) I est bien définie, en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment, je peux aussi la considérer comme une intégrale sur $[0,\pi/2[$! Pour calculer I, les règles de Bioche m'incitent à poser le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $\varphi \longmapsto \tan\varphi$, de $[0,\pi/2[$ dans $[0,+\infty[$ (d'où la remarque précédente !), de sorte que

J'ai alors

$$\varphi = \arctan t\ ;\ \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\ ;\ \sin^4\varphi = \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)^2 = \frac{t^4}{\left(t^2+1\right)^2},$$

d'où (puisque I converge)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1+\sin^4\varphi} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2+t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{P(t)}\mathrm{d}t.$$

Je reprends alors les valeurs a, b du **4)** et j'applique le résultat du **3)**

$$(1-b)X+a = \frac{1-b}{2}(2X+a) + a\cdot\frac{1+b}{2} \quad \text{et} \quad (b-1)X+a = \frac{b-1}{2}(2X-a) + a\cdot\frac{1+b}{2}$$

d'où

$$\int \Phi(t)\,\mathrm{d}t = \Psi(t) + C^{ste} \quad \text{où} \quad \Psi(t) = \frac{1-b}{4ab}\cdot\ln\frac{t^2+at+b}{t^2-at+b} + \frac{1+b}{4b}\cdot\left(\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+at+b} + \int\frac{\mathrm{d}t}{t^2-at+b}\right).$$

Il en résulte, grâce au **1)** et au **2)**,

$$2I = \lim_{t\to+\infty} \Psi(t) - \Psi(0) = \frac{1+b}{4b} \cdot \big(G(a,b) + G(-a,b)\big) = \frac{1+b}{4b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4b}}} \cdot \pi.$$

Or

$$\frac{1+b}{4b} = \frac{1+\sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad b - \frac{a^2}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

d'où finalement

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{4} \cdot \pi.}$$

(Il est satisfaisant de vérifier à la calculatrice que $I \approx 1,22033$!)

Problème C

Partie I

1) C'est un exemple du cours. Notons $f : (x,t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$. Je montre que Γ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, a et b réels fixés tels que $0 < a < b$ (pour faciliter la domination).

- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux (car continue !) et intégrable sur $]0,+\infty[$ par comparaison à des intégrales de Riemann : intégrable sur $]0,1]$ car $f(x,t) \underset{t\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $1-x<1$, intégrable sur $[1,+\infty[$ car $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $2>1$.
- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, avec
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)\, e^{-t}t^{x-1}$$
- Pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
- *Domination* : pour $t \in]0,1]$ j'ai $x-1 \geq a-1$ et $\ln t \leq 0$ d'où $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ et, pour $t>1$, j'ai $x-1 \leq b-1$ et $\ln t \geq 0$ d'où $t^{x-1} \leq t^{b-1}$. Ainsi
$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \quad \text{où} \quad \psi(t) = \begin{cases} |\ln t|\, e^{-t}t^{a-1} & \text{si} \quad t \in]0,1] \\ (\ln t)\, e^{-t}t^{b-1} & \text{si} \quad t>1 \end{cases}.$$
La fonction φ est indépendante de x, continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$: toujours $o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ et $o\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de 0, où α est fixé tel que $1-a<\alpha<1$, ce qui s'obtient en écrivant
$$|\ln t|\, e^{-t}t^{a-1} = \left(t^{\alpha-(1-a)}\, |\ln t|\, e^{-t}\right) \cdot \frac{1}{t^\alpha} \quad \text{où} \quad \alpha - (1-a) > 0.$$

Ainsi, le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique : Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, cela pour tous a,b tels que $0<a<b$, donc Γ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. De plus on intègre une fonction continue, positive et non identiquement nulle, donc

$$\boxed{\Gamma \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et strictement positive sur }]0,+\infty[.}$$

2) Soit $x>0$. Les fonctions $u : t \mapsto t^x$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et le produit uv admet la limite 0 en 0 ($x>0$) et en $+\infty$ (croissances comparées). Or nous avons vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ converge (c'est $\Gamma(x+1)$), je peux donc intégrer par parties :

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\mathrm{d}t = \left[t^x\left(-e^{-t}\right)\right]_{t\to0}^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}\left(-e^{-t}\right)\mathrm{d}t = x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Autrement dit

$$\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \text{ cela pour tout } x>0.}$$

Comme $\Gamma(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = 1$, il en résulte par une récurrence immédiate

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma(n) = (n-1)!}$$

3) a) Fixons $n \geq 1$ et $x > 0$. La continuité de f_n sur $]0,n[$ est assurée par les théorèmes opératoires classiques, f_n est nulle donc continue sur $]n,+\infty[$; enfin $\lim\limits_{n^-} f_n = 0$ donc f_n est également continue en n.

Pour l'intégrabilité, je vais dominer les f_n (ce sera utile au **b)**).

Selon l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$, j'ai

$$\forall t \in]0,n[\quad \ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n} \quad \text{d'où} \quad n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) \leq -t$$

et par croissance de l'exponentielle

$$\forall t \in]0,n[\quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \quad \text{d'où} \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}.$$

Or cette majoration est également vraie sur $[n,+\infty[$. J'ai donc la domination

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t > 0 \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t)$$

où $\varphi : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (vu au **1)**). Il en résulte en particulier que

$$\boxed{f_n \text{ est continue et intégrable sur }]0,+\infty[, \text{ cela pour tout } n \geq 1.}$$

b) Toujours avec $x > 0$ fixé, je remarque que $I_n(x)$ n'est autre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n$ et j'applique le théorème de convergence dominée à la suite (f_n) sur $]0,+\infty[$:

- $*$ les f_n sont continues par morceaux (car continues !) sur $]0,+\infty[$
- $*$ (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $\varphi : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ (en effet, pour $t > 0$ fixé, $t \in]0,n[$ à partir d'un certain rang (dès que $n > t$!), donc $f_n(t) = \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$ or $n\ln\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -t$, d'où par continuité de l'exponentielle $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(t)$)
- $*$ l'hypothèse de domination a été vérifiée au **a)**.

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} I_n(x) = \Gamma(x), \text{ cela pour tout } x > 0.}$$

c) Je justifie au préalable la convergence de $J_n(x)$ pour tout $x > 0$ et $n \geq 0$: la fonction $t \mapsto (1-t)^n t^{x-1}$ est continue sur $]0,1]$ et $(1-t)^n t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x < 1$ puisque $x > 0$, d'où la convergence par comparaison à un intégrale de Riemann.

Fixons $x > 0$ et $n \geq 0$. Les fonctions $u : t \mapsto (1-t)^{n+1}$ et $v : t \mapsto t^x$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1]$, le produit uv admet pour limite 0 en 0 (car $x > 0$) et en 1 (car $n+1 > 0$). De plus $\displaystyle\int_0^1 u'v$ converge (c'est $-(n+1)J_n(x+1)$), je peux donc intégrer par parties, avec un crochet nul :

$$-(n+1)J_n(x+1) = -\int_0^1 uv' = -xJ_{n+1}(x).$$

Il en résulte

$$\boxed{J_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}J_n(x+1), \text{ cela pour tout } x > 0 \text{ et tout } n \geq 0.}$$

d) Pour $x > 0$ fixé, une récurrence immédiate sur n donne alors

$$J_n(x) = \frac{n(n-1)\dots 1}{x(x+1)\dots(x+n-1)}J_0(x+n).$$

Or par un calcul banal de primitive, $J_0(x) = \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$, d'où finalement :

$$\boxed{J_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}.}$$

e) Par ailleurs, pour $x > 0$ et $n \geq 1$, le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t = u/n$ donne :

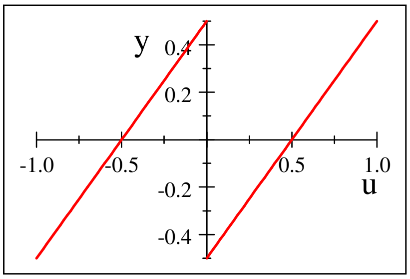
$$J_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n \left(\frac{u}{n}\right)^{x-1} \frac{1}{n} \mathrm{d}u = \frac{1}{n^x} I_n(x).$$

D'où, en combinant les résultats du **b)** et du **d)**,

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}.}$$

Partie II

1) Pour $u \in [-1, 0[$, $h(u) = u - (-1) - 1/2 = u + 1/2$ et pour $u \in [0, 1[$, $h(u) = u - 1/2$, d'où le graphe, sachant que $h(1) = -1/2$ ne se voit pas beaucoup.



2) Comme $[u + 1] = [u] + 1$, la fonction h est 1-périodique et donc bornée sur $\mathbb{R}$, précisément $|h| \leq 1/2$. Comme la fonction partie entière, h est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc la fonction H est bien définie sur $\mathbb{R}$ et 1/2-lipschitzienne en vertu de la remarque précédente et de l'inégalité de la moyenne :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |H(y) - H(x)| = \left|\int_x^y h\right| \leq |y - x| \cdot 1/2.$$

A fortiori H est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, h est d'intégrale nulle sur $[0, 1]$ donc sur tout intervalle d'amplitude 1 par périodicité. Ainsi d'après la relation de Chasles H est 1-périodique. Soit $n \in \mathbb{Z}$; la fonction h est continue sur $[n, n + 1[$ (la partie entière est constante sur cet intervalle), donc (théorème fondamental !) la fonction $H_n : x \mapsto \displaystyle\int_n^x h$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[n, n + 1]$; or d'après la relation de Chasles, H coïncide avec $H(n) + H_n$ sur cet intervalle, donc H est $\mathcal{C}^1$ sur $]n, n + 1[$ (on ne se prononce pas en n ou $n + 1$ pour H, qui est définie sur $\mathbb{R}$, et en effet H n'est pas dérivable en n, ni en $n + 1$). Finalement,

$$\boxed{H \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \text{ 1-périodique et } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]n, n+1[\text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.}$$

Notons en outre que, d'après ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in]n, n + 1[\quad H'(x) = h(x)$.

3) Soit $x > 0$ fixé et $n \in \mathbb{N}$; d'après **2)**, je peux intégrer par parties sur $[n, b]$ pour tout b de $[n, n + 1[$:

$$\int_n^b \frac{h(u)}{x + u} \mathrm{d}u = \left[\frac{H(u)}{x + u}\right]_{u=n}^{u=b} - \int_n^b H(u) \cdot \left(-\frac{1}{(x + u)^2}\right) \mathrm{d}u.$$

Pour les mêmes raisons que ci-dessus, ces fonctions de b sont continues et je peux donc passer à la limite lorsque b tend vers $n + 1$. Or H est nulle en 0 et 1-périodique, donc nulle en tout point entier, donc j'obtiens

$$\int_n^{n+1} \frac{h(u)}{x + u} \mathrm{d}u = \int_n^{n+1} \frac{H(u)}{(x + u)^2} \mathrm{d}u, \text{ cela pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Combinant cela avec la relation de Chasles, j'en déduis en sommant les égalités précédentes pour n allant de 0 à $[b] - 1$,

$$\begin{aligned} \forall b > 0 \quad \int_0^b \frac{h(u)}{x + u} \mathrm{d}u &= \int_0^{[b]} \frac{H(u)}{(x + u)^2} \mathrm{d}u + \int_{[b]}^b \frac{h(u)}{x + u} \mathrm{d}u \\ &= \int_0^b \frac{H(u)}{(x + u)^2} \mathrm{d}u + \frac{H(b)}{x + b} \end{aligned}$$

en reprenant l'intégration par parties ci-dessus. Or H est 1-périodique et continue, donc bornée sur $\mathbb{R}$,

par conséquent
$$\frac{H(u)}{(x+u)^2} \underset{u\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{u^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{H(b)}{x+b} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{H(u)}{(x+u)^2}$ est en outre continue sur $\mathbb{R}^+$ elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (par comparaison à une intégrale de Riemann au voisinage de $+\infty$, puisque $2>1$). J'en conclus que
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u}du \text{ converge et vaut } \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(x+u)^2}du.}$$

4) Le changement de variable $t = u - n$ donne (avec la périodicité de h)
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{n+1/2}^{n+1} \frac{|h(u)|}{x+u}\mathrm{d}u = \int_{1/2}^{1} \frac{|h(t)|}{x+n+t}\mathrm{d}t \geq \frac{1}{x+n+1}\int_{1/2}^{1}|h(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{8(x+n+1)}$$
J'en déduis que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \displaystyle\int_0^{n+1} \frac{|h(u)|}{x+u}\mathrm{d}u \geq \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k+1}.$

Ce minorant est de limite infinie quand $n \to +\infty$ (somme partielle d'une série positive divergente).

A fortiori, $b \mapsto \displaystyle\int_0^b \frac{|h(u)|}{x+u}du$ n'admet pas de limite finie quand $b \to +\infty$. Ainsi
$$\boxed{u \mapsto \frac{h(u)}{x+u} \text{ n'est pas intégrable sur } \mathbb{R}^+.}$$

5) Reprenant le résultat du **3)**, j'utilise le théorème de dérivation sous le signe $\int$ sur $[a,+\infty[$, $a>0$ étant fixé. Je note f la fonction de deux variables $f:(x,u) \mapsto \dfrac{H(u)}{(x+u)^2}$.

- Pour tout $x \geq a$, $u \mapsto f(x,u)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (vu au **3)**)
- Pour tout $u \geq 0$, $x \mapsto f(x,u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ et
$$\forall (x,u) \in [a,+\infty[\times [0,+\infty[\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = -2\frac{H(u)}{(x+u)^3}.$$
- Pour tout $x \geq a$, $u \mapsto f(x,u)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$
- <u>*Domination*</u> : en notant M un majorant de $|H|$ sur $\mathbb{R}$ (nous avons vu que H était bornée),
$$\forall (x,u) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}^+ \quad \left|-2\frac{H(u)}{(x+u)^3}\right| \leq \frac{2M}{(a+u)^3}$$
et la fonction $u \mapsto \dfrac{2M}{(a+u)^3}$ est indépendante de x, continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (dominée par $u \mapsto 1/u^3$ au voisinage de $+\infty$, avec $3>1$).

Donc le théorème s'applique : φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, cela pour tout $a>0$, donc sur $\mathbb{R}^{+*}$, avec selon la formule de Leibniz
$$\forall x>0 \quad \varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2H(u)}{(x+u)^3}\mathrm{d}u.$$
Par ailleurs, le même type d'intégration par parties qu'au **3)** donne aisément
$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{2H(u)}{(x+u)^3}\mathrm{d}u.$$
Soit finalement
$$\boxed{\varphi \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*} \text{ et : } \forall x>0 \quad \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(x+u)^2}\mathrm{d}u.}$$

Partie III

1) Une intégration par parties donne (en choisissant $t \mapsto t-x-i-1$ pour primitive de 1)
$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t\mathrm{d}t = \big[(t-x-i-1)\ln t\big]_{t=x+i}^{t=x+i+1} - \int_{x+i}^{x+i+1} \frac{t-x-i-1}{t}\mathrm{d}t$$

Avec le changement de variable $u = t - x$ dans la dernière intégrale

$$\boxed{\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t \mathrm{d}t = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} \mathrm{d}u.}$$

2) J'ai tout d'abord par définition de h

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \int_i^{i+1} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1/2}{u+x} \mathrm{d}u = \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} \mathrm{d}u + \frac{1}{2} \int_i^{i+1} \frac{du}{u+x}$$
$$= \ln(x+i) - \int_{x+i}^{x+i+1} \ln t \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_i^{i+1} \frac{\mathrm{d}u}{u+x} \text{ d'après } \mathbf{1)}$$

En sommant ces relation de $i=0$ à $i=n$ et en utilisant la relation de Chasles, il vient

$$\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u = \ln\big(x(x+1)\dots(x+n)\big) - \int_x^{x+n+1} \ln t \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u+x}.$$

Or

$$\int_x^{x+n+1} \ln t \mathrm{d}t = (x+n+1) \ln(x+n+1) - (x+n+1) - x \ln x + x$$

et

$$\int_0^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u+x} = \ln(x+n+1) - \ln x.$$

J'ai alors en sortant $\ln x$ du premier ln et en y absorbant $\ln(x+n+1)$,

$$\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u = \ln\big((x+1)\dots(x+n)(x+n+1)\big) - \left(x+n+\frac{3}{2}\right) \ln(x+n+1) + n + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right) \ln x,$$

ce qui donne bien, avec les notations de l'énoncé,

$$\boxed{F_n(x) = G_n(x) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u.}$$

3) a) J'ai selon la formule de Stirling $\ln\left(\dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit

$$\ln(n!) \underset{n\to\infty}{=} n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1)$$

et par développement limité de $\ln(1+t)$ en 0

$$\begin{aligned}(x+n+\tfrac{3}{2}) \ln(x+n+1) &\underset{n\to\infty}{=} \left(n+x+\frac{3}{2}\right)\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1+x}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{=} \left(n+x+\frac{3}{2}\right)\left(\ln n + \frac{1+x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\underset{n\to\infty}{=} n\ln n + \left(x+\frac{3}{2}\right)\ln n + (1+x) + o(1)\end{aligned}$$

J'en déduis que

$$G_n(x) \underset{n\to\infty}{=} n \ln n - n + \frac{\ln n}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2} + (x+1)\ln n - n\ln n - \left(x+\frac{3}{2}\right)\ln n - 1 - x + n + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x + o(1)$$

d'où finalement

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi}.}$$

b) Avec l'identité d'Euler et la continuité de ln, j'ai $F_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ln\Gamma(x+1)$. J'ai ainsi, en passant à la limite dans la relation établie au **2)**,

$$\boxed{\ln\Gamma(x+1) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{x+u} \mathrm{d}u.}$$

c) D'après les résultats précédents, je peux dériver la relation ci-dessus, par rapport à $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et j'obtiens après simplification

$$\boxed{\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln x + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} \mathrm{d}u.}$$