D.S. 4 *(4 heures)*

Exercice : recherche d'équivalents

Soient deux suites (a_n) et (b_n) à termes strictement positifs et telles que $a_n \underset{\infty}{\sim} b_n$.

On suppose d'autre part que la fonction $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbb{R}$.

1) Quelle est l'ensemble de définition de la fonction $g : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$?

2) Justifier l'existence d'une suite (γ_n) convergeant vers 0 et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n (1 + \gamma_n) .$$

3) Soit $m \in \mathbb{N}$.

a) Prouver l'existence de

$$\delta_m = \sup_{n \geq m+1} |\gamma_n| .$$

b) Montrer que :

$$\forall t > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \qquad \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| \leq \delta_m + \frac{1}{b_{m+1} t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n| \, b_n t^n .$$

c) En déduire que :

$$f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} g(t) .$$

<u>*Applications*</u> :

4) Soit h la fonction définie par

$$h : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \quad \text{où} \quad c_n = \frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!} .$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

b) Trouver un équivalent de $h(t)$ au voisinage de $+\infty$.

5) Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t y''(t) + (1 - t) y'(t) = 1.$$

a) Démontrer que (E) possède une unique solution z développable en série entière à l'origine telle que

$$z(0) = 0 \quad \text{et} \quad z'(0) = 1.$$

Préciser les coefficients de ce développement.

b) Donner une expression simple de $z'(t)$ pour $t > 0$.

c) Trouver un équivalent de $z(t)$ au voisinage de $+\infty$.

Problème A : encore la fonction ζ !

On posera, dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul N et pour tout réel $s > 0$:

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}, \quad K_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^s}.$$

1) *Définition de ζ* : soient $s > 0$ et n un entier naturel non nul. Posons :

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}.$$

a) Montrer que la fonction u_n ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$0 \leq u_n(s) \leq \frac{s}{n^{s+1}}.$$

c) Prouver que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0,+\infty[$ et que sa somme, qui sera notée U dans la suite, est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

d) Prouver que, pour tout $s \in]0,1[\cup]1,+\infty[$, la suite de terme général

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée $\zeta(s)$, que l'on exprimera à l'aide de $U(s)$.

e) Prouver que la suite de terme général $H_N(1) - \ln N$ admet une limite strictement positive notée γ dans la suite du problème.

2) *Autre expression de ζ*

a) Soit s un réel strictement positif ; prouver que la série de fonctions de la variable réelle s

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur $]0,+\infty[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui sera notée f dans la suite.

b) Exprimer $S_{2N}(s)$ à l'aide de $H_{2N}(s)$ et $H_N(s)$. En déduire, si $s \in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \cdot \zeta(s) \ .$$

c) En déduire, en décomposant autrement $S_{2N}(s)$ que, pour les mêmes valeurs de s, la suite de terme général

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite que l'on exprimera à l'aide de $\zeta(s)$.

3) *Étude au voisinage de $+\infty$* : quelle est la limite de $f(s)$ lorsque s tend vers $+\infty$?

4) *Étude au voisinage de 1*

a) Montrer que, lorsque s est au voisinage de 1 :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$

b) Prouver, en calculant $f'(1)$ de deux façons, que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \cdot \ln 2.$$

Problème B : étude qualitative des solutions d'une équation différentielle

On note (E) l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + q(x) f(x) = 0 \quad \text{où} \quad q(x) = 1 + \frac{1}{1 + x^2 + x^4}.$$

On admettra que, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{S}_I$ des solutions de (E) sur I est un plan vectoriel et que, pour tout x_0 dans I et tout (y_0, v_0) dans $\mathbb{R}^2$, il existe une unique solution f de (E) sur I vérifiant les conditions initiales $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = v_0$.

1) Si $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2) **Inégalité de Gronwall** : soient $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) \leq u(x) h(x).$$

Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y \Rightarrow h(y) \leq h(x) \exp\left(\int_x^y u(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

On pourra étudier la fonction $x \mapsto h(x) \exp\left(\int_x^y u(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Dans les questions 3 et 4, f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$

3) **Les solutions sont bornées** : soit $h = f^2 + (f')^2$.

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) \leq \big(q(x) - 1\big) h(x)$.

b) En déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

c) Utilisant une fonction auxiliaire, montrer que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}^-$, et donc finalement sur $\mathbb{R}$.

4) **Conditions de nullité en un point** : on suppose qu'existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f'(a) = 0$.

a) Que peut-on dire de f, compte tenu de l'unicité admise en préambule ?

On se propose de démontrer directement ce résultat.

b) Montrer que : $\forall x \in [a, +\infty[\quad h(x) \leq 0$, où h est la fonction définie au **3**. Qu'en conclure sur $f(x)$?

c) Soit $\Phi : x \mapsto f(2a - x)$. Déterminer $r \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Phi'' + r\Phi = 0$.

d) Montrer que $f = 0$.

Dans les questions 5 et 6, f est une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}$

5) **Les zéros sont isolés**

a) On suppose qu'existe une suite (x_n) de réels distincts deux à deux, convergeant vers un réel x et telle que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) = 0$.

Montrer que $f(x) = f'(x) = 0$. Conclusion ?

b) On admettra ici le théorème de Bolzano-Weierstrass : "si (x_n) est une suite de réels bornée, alors (x_n) admet une suite extraite convergente". Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, montrer que f n'a qu'un nombre fini de zéros dans $[a, b]$.

6) **Comparaison avec les solution de l'équation $y'' + y = 0$**

a) Donner les solutions sur $\mathbb{R}$ de (F) : $y'' + y = 0$.

On va montrer que f peut être approchée en $+\infty$ par une solution de (F).

b) Montrer qu'il existe un couple unique (a, b) de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et bornées telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x) \\ f'(x) = -a(x)\sin(x) + b(x)\cos(x) \end{cases}$$

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} a'(x) = \big(q(x) - 1\big)\sin(x) f(x) \\ b'(x) = \big(1 - q(x)\big)\cos(x) f(x) \end{cases}$$

d) Montrer que a et b admettent des limites finies en $+\infty$.

e) Justifier enfin que f peut être approchée en $+\infty$ par une solution de (F), c'est-à-dire qu'il existe g solution de (F) sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{+\infty}(f-g)=0$.

7) Étude (partielle) du développement en séries entières des solutions de (E)

a) Soit f une solution de (E) développable en série entière sur un certain intervalle non trivial centré en 0 sur lequel $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

(i) Vérifier que :

$$(S)\quad \begin{cases} c_2=-c_0 \\ c_3=-\dfrac{1}{3}c_1 \\ c_4=-\dfrac{1}{3}c_2-\dfrac{1}{12}c_0 \\ c_5=-\dfrac{2}{5}c_3-\dfrac{1}{20}c_1 \\ \forall n\in[\![4,+\infty[\![\quad c_{n+2}=\dfrac{-n^2+n-2}{(n+1)(n+2)}c_n+\dfrac{-n^2+5n-7}{(n+1)(n+2)}c_{n-2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}c_{n-4} \end{cases}.$$

(ii) Soit $\beta>2$. Montrer que, si n est assez grand,

$$|c_{n+2}|\leq \beta\max\left(|c_n|,|c_{n-2}|,|c_{n-4}|\right).$$

(iii) Soit $\beta>2$. Montrer qu'existe $C>0$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N}\quad |c_n|\leq C\beta^n$.

(iv) En déduire que le rayon de convergence de f est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que toute solution de (E) est développable en série entière sur $\left]-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right[$.

Le problème général de l'éducation intellectuelle consiste à faire parvenir, en peu d'années, un seul entendement, le plus souvent médiocre, au même point de développement qui a été atteint, dans une longue suite de siècles, par un grand nombre de génies supérieurs appliquant successivement, pendant leur vie entière, toutes leurs forces à l'étude d'un même sujet.

Auguste Comte