D.L. 3

Exercice

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose :

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$

1) Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

2) Étudier les variations de la fonction u_n.

Que peut-on conclure pour la convergence de $\sum u_n$?

La fonction somme S de la série $\sum u_n$ est-elle continue ?

3) Montrer que S est dérivable en tout point $x \neq 0$.

4) N étant un entier ≥ 1, on pose $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(x)$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \geq 0$ (dépendant de N) tel que, pour $0 < |x| < \alpha$, on ait

$$\frac{S(x)}{x} \geq \frac{S_N(x)}{x} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}.$$

b) En déduire la limite en 0 de $\dfrac{S(x)}{x}$.

c) S est-elle dérivable en 0 ?

Problème A : plusieurs expressions de la constante d'Euler

1) Retrouver rapidement l'existence de

$$\gamma = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} - \ln p\right)$$

et montrer que γ peut également s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$

2) Soit $x \in [0,1]$; établir :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0,x] \quad \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^k t^k + \frac{(-1)^{p+1}t^{p+1}}{1+t}.$$

En déduire :

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}.$$

3) Montrer que γ peut encore s'écrire :

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{kn^k}\right).$$

La fin du problème s'attache à intervertir les deux sommations ci-dessus.

4) Pour $x \in [1, +\infty[$, on note $E(x)$ la partie entière de x et l'on pose

$$\forall k \geq 2 \quad f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k} \sum_{n=1}^{E(x)} \frac{1}{n^k}.$$

a) Montrer que la fonction $\zeta : \alpha \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est définie et décroissante sur $]1, +\infty[$.

Montrer que, pour x fixé dans $[1, +\infty[$, la suite $(|f_k(x)|)_{k \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant.

b) En déduire que la série de fonctions $\sum_{k \geq 2} f_k$ est uniformément convergente sur $[1, +\infty[$.

5) Montrer que :

$$\gamma = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} f_k(x).$$

En déduire enfin que :

$$\gamma = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \zeta(k).$$

Problème B

1) <u>*Étude préliminaire d'une fonction*</u> : soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{1 + e^x}.$$

Étudier les variations de f. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\alpha > 1 \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \alpha - 1.$$

Dans la suite du problème, on étudie la suite de fonctions (u_n) *définie sur* $[0, 1]$ *par :*

$$\forall x \in [0, 1] \quad u_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1}(x) = \left[1 - x + \frac{x}{2} \cdot u_n(x)\right] \cdot u_n(x)$$

et l'on note h *la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par :*

$$\forall t \in [0, 1] \quad h(t) = t \cdot \left(1 - \frac{t}{2}\right).$$

2) Montrer par récurrence que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_n(x) \leq 1,$$

puis que :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n'(x) \leq 0.$$

3) a) Établir :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1 - x)^n \leq u_n(x) \leq \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n.$$

b) En déduire la convergence simple sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions (u_n) vers une limite que l'on précisera. Y a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$? Et sur $[\varepsilon, 1]$, pour $\varepsilon \in]0, 1[$?

c) Montrer que, pour tout x fixé dans $[0, 1]$, la suite numérique de terme général $u_n(x)$ est décroissante.

4) **a)** Montrer que :

$$\forall (a,b) \in [0,1]^2 \quad |h(a) - h(b)| \leq |a-b|.$$

b) En déduire :

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \big|[u_k(x) - u_{k+1}(x)] - [u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)]\big| \leq x \cdot \big|u_k(x) - u_{k+1}(x)\big|$$

puis

$$\forall x \in [0,1[\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad 0 \leq u_k(x) - u_{k+1}(x) \leq \frac{u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)}{1-x}.$$

5) Dans cette question, on fixe n dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1[$.

a) En utilisant l'encadrement précédent et le sens de variation de h, montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad x \leq \int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{x}{1-x}.$$

b) En déduire :

$$nx \leq \int_{u_n(x)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{h(t)} \leq \frac{nx}{1-x}.$$

En calculant cette dernière intégrale, établir :

$$\frac{2}{1+e^{nx/(1-x)}} \leq u_n(x) \leq \frac{2}{1+e^{nx}}.$$

6) Soit (v_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0,1] \quad v_n(x) = x.u_n(x).$$

On se propose de montrer que (v_n) converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.

Pour ce faire, on note M_n le maximum de v_n sur $[0,1]$ et l'on reprend les notations du **1)**.

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geq \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha},$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha} \leq M_n \leq \frac{2(\alpha-1)}{n}.$$

b) En déduire un équivalent simple de M_n puis conclure.

Il n'est jamais problème qui n'ait un cadeau pour toi entre ses mains.
Tu cherches des problèmes parce que tu as besoin de leurs cadeaux.

Richard Bach