D.L. 6

Le problème de Dirichlet est un problème aux limites bien connu en théorie du potentiel, en particulier lorsqu'on est en présence d'une symétrie de révolution.
Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étant donnée une succession continue de valeurs sur un contour fermé (en particulier sur le cercle trigonométrique), il s'agit de déterminer une fonction (par exemple un potentiel en physique) *harmonique* à l'intérieur du domaine délimité par ce contour et coïncidant avec les valeurs données sur le contour. Dans le cas particulier où l'on a des valeurs polynomiales sur le contour fermé, on obtient comme solution un *polynôme harmonique.*
Les applications physiques liées à ce type de problème aux limites sont nombreuses, par exemple en géophysique, en physique quantique et en cristallographie.

Rappels et notations

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique et de la norme associée $\|.\|_2$ définie par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|_2=\sqrt{x^2+y^2}$.
- Si $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $r>0$, la notation $D((x,y),r)$ (respectivement $\bar{D}((x,y),r)$) désigne le disque ouvert de centre (x,y) et de rayon r (respectivement le disque fermé de centre (x,y) et de rayon r). En particulier la notation $D(0,1)$ (respectivement $\bar{D}(0,1)$ et $C(0,1)$) désigne le disque ouvert de centre O de rayon 1 (respectivement le disque fermé de centre O de rayon 1 et le cercle de centre O et de rayon 1).

  On note Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans $\mathbb{R}$, $\partial_1 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (respectivement $\partial_2 f$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) est la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.

  Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, $\partial_{1,1}f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (respectivement $\partial_{2,2}f$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$) est la dérivée partielle d'ordre 2 de f par rapport à la première variable (respectivement par rapport à la seconde variable) dans la base canonique.
- Si $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω, on rappelle que *le laplacien de* u est l'application $\Delta u=\partial_{1,1}u+\partial_{2,2}u$.
- Une application $v:\Omega\to R$ est dite *harmonique* (sur Ω) si v est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω avec $\Delta v(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.
- On appelle *fonction polynomiale des deux variables x et y* sur $\mathbb{R}^2$ (ou plus simplement *polynôme de deux variables*, ou encore *polynôme* quand il n'y a pas de confusion possible) toute application de la forme
$$P:(x,y)\mapsto\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2\ /\ k+l\le m}\alpha_{k,l}\ x^k y^l$$
  où m est un entier naturel fixé et les $\alpha_{k,l}$ sont des coefficients réels.

  Le polynôme nul est celui dont tous les coefficients sont nuls ; son degré est par convention $-\infty$.
  De plus, pour tout polynôme P non nul défini comme ci-dessus, *le degré de* P est l'entier naturel $d(P)$ défini par
$$d(P)=\max\left\{n\in\mathbb{N}\ /\ \exists\,(k,l)\in\mathbb{N}^2\quad k+l=n\quad\text{et}\quad\alpha_{k,l}\neq 0\right\}.$$
  On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes à deux variables et, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}_m$ l'ensemble des polynômes à deux variables de degré inférieur ou égal à m. On admettra dans tout le problème que $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que $\mathcal{P}_m$ ($m\in\mathbb{N}$) en est un sous-espace vectoriel.
  Enfin, un polynôme est dit *harmonique* s'il définit en plus une application harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Objectifs

Dans la partie **I**, on donne quelques propriétés simples des polynômes et des polynômes harmoniques.
La partie **II** étudie certaines applications harmoniques ; les résultats obtenus seront utilisés dans la partie **III**.
La partie **III** s'intéresse au problème de Dirichlet sur le disque unité, puis la partie **IV** se focalise sur le problème de Dirichlet dans le cas où la condition au bord est polynomiale. On détermine pour finir la dimension de sous-espaces vectoriels de polynômes harmoniques.

I. Résultats préliminaires

I.A Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et P un polynôme de deux variables, tel que $P(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in\Omega$.

I.A.1a Montrer que pour tout $(x,y)\in\Omega$, l'ouvert Ω contient un sous-ensemble de la forme $I\times J$, où I et J sont des intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ contenant respectivement x et y. *L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.*

I.A.1b En déduire que P est le polynôme nul. *On pourra se ramener à étudier des fonctions polynomiales d'une variable.*

I.A.2 Ce résultat subsiste-t-il si l'ensemble Ω admet une infinité d'éléments mais n'est pas supposé ouvert ?

I.B.1 Soit $m\in\mathbb{N}$. Justifier que l'espace vectoriel $\mathcal{P}_m$, est de dimension finie et déterminer sa dimension.

I.B.2 Déterminer un polynôme harmonique de degré 1, puis de degré 2.

I.B.3a Montrer que l'ensemble des polynômes harmoniques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}$.

I.B.3b Pour tout $m\geq 2$, on note Δ_m la restriction de Δ à $\mathcal{P}_m$. Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}\Delta_m)\geq 2m+1$.

I.B.3c Que peut-on déduire pour la dimension de l'espace vectoriel des polynômes harmoniques ?

I.C Déterminer, dans chacun des cas suivants, un polynôme harmonique H qui vérifie $H(x,y)=f(x,y)$ pour tout $(x,y)\in C(0,1)$:

I.C.1 $f(x,y)=xy$ **I.C.2** $f(x,y)=x^4-y^4$.

II. Quelques exemples d'applications harmoniques

Soit Ω un sous-ensemble ouvert inclus dans $\mathbb{R}^2$. On définit, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et tout couple $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$,

$$\Omega_{x_0,y_0,\lambda}=\left\{\lambda(x,y)+(x_0,y_0)/\ (x,y)\in\Omega\right\}$$

II.A On prend pour Ω (uniquement dans cette question) l'intérieur du triangle équilatéral de sommets $(1,0)$, $(-1/2,\sqrt{3}/2)$ et $(-1/2,-\sqrt{3}/2)$. Faire un dessin sur lequel apparaissent Ω et $\Omega_{2,1,1/2}$.

II.B Soient $\lambda\in\mathbb{R}^*$ et $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ fixés.

II.B.1 Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application harmonique de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω. Montrer que les applications $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont également harmoniques sur Ω.

II.B.2 Par quelle(s) transformation(s) géométrique(s) l'ensemble $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est-il l'image de Ω ? Justifier que $\Omega_{x_0,y_0,\lambda}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

II.B.3 Soit $g:\Omega_{x_0,y_0,\lambda}\mapsto\mathbb{R}$ une application harmonique.
Montrer que l'application $(x,y)\mapsto g\left(\lambda(x,y)+(x_0,y_0)\right)$ est harmonique sur Ω.

II.C.1 Montrer que les applications

$$h_1:(x,y)\mapsto\ln(x^2+y^2)\quad\text{et}\quad h_2:(x,y)\mapsto\frac{x}{x^2+y^2}$$

sont harmoniques sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

II.C.2 En déduire que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, l'application $(x,y)\mapsto\dfrac{1-((x+\cos t)^2+(y+\sin t)^2)}{x^2+y^2}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

II.D Un exemple fondamental : pour $(x, y) \in D(0,1)$ fixé, on définit le nombre complexe $z = x+iy$ et on pose pour t réel (quand l'expression a un sens) :

$$N(x,y,t) = \frac{1-|z|^2}{|z-e^{it}|^2} = \frac{1-(x^2+y^2)}{(x-\cos t)^2+(y-\sin t)^2}$$

II.D.1 Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'application $N_t : (x,y) \mapsto N(x,y,t)$ est harmonique sur $D(0,1)$. *On pourra utiliser la question* **II.B.3**.

II.D.2 Dans la suite de cette partie, le couple (x, y) est fixé dans $D(0,1)$.
Montrer que $t \mapsto N(x,y,t)$ est définie et continue sur $[0, 2\pi]$.

II.D.3 Soit $t \in [0, 2\pi]$ fixé. Déterminer deux nombres complexes α et β, indépendants de t et de z, tels que

$$N(x,y,t) = -1 + \frac{\alpha}{1-ze^{-it}} + \frac{\beta}{1-\bar{z}e^{it}}$$

II.D.4 En déduire que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} N(x,y,t)\mathrm{d}t = 1$. *On pourra écrire* $\dfrac{1}{1-ze^{-it}}$ *sous la forme de la somme d'une série de fonctions.*

III. Problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$ une application continue. On appelle $\mathcal{D}_f$ l'ensemble des applications définies et continues sur $\bar{D}(0,1)$, harmoniques sur $D(0,1)$ et qui coïncident avec l'application f sur $C(0,1)$.
Le problème de Dirichlet sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$ associé à f consiste à rechercher les éléments de l'ensemble $\mathcal{D}_f$.
On définit en outre, en reprenant les notations de la partie **II**, l'application N_f sur $D(0,1)$ par

$$N_f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(x,y,t) f(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$$

et l'application u sur $\bar{D}(0,1)$ par

$$u(x,y) = \begin{cases} N_f(x,y) & \text{si } (x,y) \in D(0,1) \\ f(x,y) & \text{si } (x,y) \in C(0,1) \end{cases}$$

III.A Étude de l'application N_f.

III.A.1a Montrer que N_f admet une dérivée partielle $\partial_{1,1}N_f$ dordre 2 par rapport à x.
De même on peut montrer que N_f admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à toutes ses variables, continues sur $D(0,1)$ et s'obtenant par dérivation sous le signe $\int$. Ce résultat est admis pour la suite.
Exprimer, pour tout $(x, y) \in D(0,1)$, pour tout $(i, j) \in \{1,2\}^2$, $\partial_{i,j}N_f(x,y)$ en fonction de $\partial_{i,j}N(x,y,t)$.

III.A.1b En déduire que u est harmonique sur $D(0,1)$.

III.A.2 Dans cette question, on fixe $t_0 \in [0, 2\pi]$, $(x,y) \in D(0,1)$ et $\varepsilon > 0$. De plus, on note, pour tout réel $\delta > 0$:

$$I_0^\delta = \{t \in [0,2\pi] \;/\; \|(\cos t, \sin t) - (\cos t_0, \sin t_0)\|_2 \leq \delta\}$$

III.A.2a Montrer que I_0^δ est un intervalle ou bien la réunion de deux intervalles disjoints. *L'utilisation d'un dessin sera appréciée ; ce dessin ne constituera cependant pas une preuve.*

III.A.2b Montrer, en utilisant l'application f, l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que

$$\left|\int_{I_0^\delta} N(x,y,t)(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0))\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

III.A.2c Soit $\delta > 0$ quelconque. Montrer que, si $t \in [0,2\pi] \setminus I_0^\delta$ et $\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\| \leq \delta/2$, alors

$$|N(x,y,t)| \leq 4 \cdot \frac{1-(x^2+y^2)}{\delta^2}$$

III.A.2d Déduire de la question précédente que, pour $\delta > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ tel que,
si $\|(x,y) - (\cos t_0, \sin t_0)\| \leq \eta$, alors

$$\left|\int_{t\in[0,2\pi]\setminus I_0^\delta} N(x,y,t)\left(f(\cos t, \sin t) - f(\cos t_0, \sin t_0)\right)\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

III.A.3 Prouver que u est une application continue en tout point de $C(0,1)$. Qu'en conclut-on pour l'application u ?

III.B Dans cette sous-partie, on suppose que f est l'application nulle sur $C(0,1)$ et que u est un élément de $\mathcal{D}_f$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'application u_n sur $\bar{D}(0,1)$ par :

$$u_n(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{n}\left(x^2 + y^2\right)$$

III.B.1 Supposons que u_n admette un maximum local en $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in D(0,1)$.

III.B.1a En s'intéressant au comportement de la fonction $x \mapsto u_n(x, \tilde{y})$, montrer que, dans ce cas, $\partial_{1,1} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$.
De même, on peut montrer que $\partial_{2,2} u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$. Ainsi $\Delta u_n(\tilde{x}, \tilde{y}) \leq 0$. Ce résultat est admis pour la suite.

III.B.1b En déduire que u_n n'admet pas de maximum local sur $D(0,1)$.

III.B.2 En déduire que, pour tout $(x,y) \in D(0,1)$, $u_n(x,y) \leq 1/n$.

III.B.3 Montrer que u est identiquement nulle sur $D(0,1)$.

III.C Prouver que, pour toute application continue $f : C(0,1) \to \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{D}_f$ admet exactement un élément.

IV. Retour sur les polynômes harmoniques

IV.A Dans cette question, m est un entier supérieur ou égal à 2. On considère un polynôme $P \in \mathcal{P}_m$, et on note P_C la restriction de P au cercle $C(0,1)$.

IV.A.1 Montrer que l'application ϕ_{m-2} définie sur $\mathcal{P}_{m-2}$ par

$$\phi_{m-2}(Q) = \Delta \tilde{Q} \in \mathcal{P} \quad \text{où} \quad \tilde{Q}(x,y) = (1 - x^2 - y^2) Q(x,y)$$

est linéaire et injective et que $\mathrm{Im}(\phi_{m-2}) \subset \mathcal{P}_{m-2}$.

IV.A.2 En déduire qu'il existe un polynôme $T \in \mathcal{P}_{m-2}$ tel que $P + (1 - x^2 - y^2)T$ soit un polynôme harmonique.

IV.A.3 Montrer que l'unique élément de l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ est la restriction à $\bar{D}(0,1)$ d'un polynôme de degré inférieur ou égal à m.

IV.A.4 Expliciter l'ensemble $\mathcal{D}_{P_C}$ quand le polynôme P est défini par $P(x,y) = x^3$.

IV.B.1 Soit $P \in \mathcal{P}$. Montrer que P se décompose de manière unique sous la forme :

$$P(x,y) = H(x,y) + (1 - x^2 - y^2) Q(x,y)$$

où H est un polynôme harmonique et $Q \in \mathcal{P}$.

IV.B.2 Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{H}_m$ le sous-espace vectoriel des polynômes harmoniques de degré inférieur ou égal à m. Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$.

IV.B.3 Déterminer explicitement une base de $\mathcal{H}_3$.

IV.C Dans cette dernière sous-partie, on se place sur $\mathbb{R}^n$ pour un entier naturel $n \geq 3$ et on reprend les notations précédentes, en adaptant les outils au contexte de $\mathbb{R}^n$; en particulier on considère maintenant les applications polynomiales à n variables. On admet que le problème de Dirichlet sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, associé à une fonction f continue et définie sur la sphère unité $S_n(0,1)$, admet encore une unique solution.
Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

IV.C.1 Montrer que l'ensemble

$$\left\{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n \;/\; i_1 + \cdots + i_n = m\right\}$$

a pour cardinal $\dbinom{n+m-1}{m}$. En déduire la dimension de $\mathcal{P}_m$.

IV.C.2 Déterminer la dimension de $\mathcal{H}_m$ en fonction de m et de n.