D.S. 1 *(4 heures)*

Problème A : localisation de racines

On considère dans ce problème un entier $p \geq 2$ et un polynôme à coefficients réels de degré p et de coefficient dominant $a_p = 1$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On confondra polynôme et fonction polynomiale.

On se propose de localiser dans le plan complexe les racines du polynôme P, afin de savoir dans quelle zone rechercher d'éventuelles valeurs approchées de ces racines.

On désigne à cet effet par M le nombre réel positif ou nul suivant :

$$M = \max_{0 \leq k \leq p-1} |a_k| = \max\left(|a_0|, \ldots, |a_{p-1}|\right).$$

1) *Étude d'une fonction auxiliaire f*

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(r) = r^{p+1} - (M+1)\, r^p + M.$$

a) Déterminer l'unique zéro strictement positif r_0 de sa dérivée f'. Comparer les positions de r_0 et 1 en fonction des positions de M et $\frac{1}{p}$.

b) On suppose $M \leq \frac{1}{p}$. Étudier les variations de f et en déduire le signe de $f(r)$ pour $r > 1$.

c) On suppose $M > \frac{1}{p}$. Étudier les variations de f et en déduire le signe de $f(r)$ pour $r \geq M+1$.

2) *Localisation des racines du polynôme P*

a) Démontrer que toute racine (réelle ou complexe) z de P telle que $|z| \neq 1$ vérifie l'inégalité :

$$|z|^p \leq M \cdot \frac{|z|^p - 1}{|z| - 1}.$$

En supposant $|z| > 1$, montrer qu'on a l'inégalité $f(|z|) \leq 0$.

b) Établir, si $M \leq \frac{1}{p}$, que les racines de P sont de module inférieur ou égal à 1.

c) Établir, si $M > \frac{1}{p}$, que les racines de P sont de module strictement inférieur à $M+1$.

3) *Premier exemple*

On suppose dans cette question que P est le polynôme défini par :

$$P(X) = X^p - \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} X^k = X^p - \frac{1}{p}\left(X^{p-1} + \cdots + X + 1\right).$$

Montrer que ses racines sont de module inférieur ou égal à 1.

Montrer que 1 est racine simple de P. Qu'en déduit-on par rapport au **2)b)** ?

4) *Second exemple*

On suppose dans cette question que P est le polynôme défini par :

$$P(X) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k = X^p - \left(X^{p-1} + \cdots + X + 1\right).$$

a) Montrer que ses racines sont de module strictement inférieur à 2.

b) Établir, si z est racine de P, que z est racine du polynôme $X^{p+1} - 2X^p + 1$.

c) En étudiant sur $\mathbb{R}^+$ la fonction $g : r \mapsto r^{p+1} - 2r^p + 1$, montrer que le polynôme P admet une racine réelle x_p telle que $\dfrac{2p}{p+1} \leq x_p \leq 2$. Qu'en déduit-on par rapport au **2)c)** ?

d) On pose $\varepsilon_p = 2 - x_p$. Établir la relation $\varepsilon_p = (2 - \varepsilon_p)^{-p}$. Montrer que $p\varepsilon_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donner un équivalent de ε_p lorsque p tend vers l'infini. En déduire le développement asymptotique suivant :

$$x_p \underset{p\to\infty}{=} 2 - \frac{1}{2^p} + o\left(\frac{1}{2^p}\right).$$

5) Montrer enfin que toutes les racines de P sont de module compris strictement entre $\dfrac{1}{2}$ et 2.

Problème B : irrationalité de π

Soient n un entier naturel non nul et P une application polynomiale définie sur $\mathbb{R}$, à coefficients réels et de degré égal à $2n$.
$P^{(j)}$ désignant la dérivée d'ordre j de P, on considère les applications F et G suivantes, définies sur $\mathbb{R}$:

$$x \quad \mapsto \quad F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x) = P(x) - P''(x) + P^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n P^{(2n)}(x)$$
$$x \quad \mapsto \quad G(x) = F'(x)\sin x - F(x)\cos x$$

1) Pour tout réel x, calculer $G'(x)$. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} P(x)\sin x \mathrm{d}x = F(0) + F(\pi)$.

2) On suppose que π est un nombre rationnel. On pose $\pi = \dfrac{a}{b}$, $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$. On suppose, dans cette question, que l'application polynomiale P de degré $2n$ est la suivante :

$$x \mapsto P(x) = \frac{1}{n!} \cdot x^n (a - bx)^n.$$

a) Montrer que : $\forall j \in \mathbb{N},\ 0 \leq j < n,\ P^{(j)}(0) = 0$.
Pour j entier, $0 \leq j \leq n$, préciser le coefficient de x^{n+j} de $P(x)$. Calculer $P^{(n+j)}(0)$.
En déduire que $F(0)$ est un entier relatif.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad P(\pi - x) = P(x)$; en déduire que $F(\pi)$ est un entier relatif.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n \sin x \mathrm{d}x$$

est une suite d'entiers strictement positifs.

d) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

e) En déduire que π n'est pas un nombre rationnel.

Problème C : dénombrement de surjections

1) *Étude des endomorphismes T_a* : l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ définie par $e_j = X^j$, $j \in [\![0, n]\!]$; pour tout réel a et tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit le polynôme T_aP par

$$T_aP(X) = P(X + a) \quad \textit{(il s'agit de la composée et non du produit de } P \textit{ par } X + a\textit{).}$$

a) Vérifier que l'application définie par $T_a : P \mapsto T_aP$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
Écrire sa matrice M_a dans la base $\mathcal{B}$ *(on pourra numéroter les lignes et les colonnes de 0 à n).*

b) Étant donnés des nombres réels a, b, déterminer l'endomorphisme composé $T_a \circ T_b$.

c) Dans le cas particulier $a = 1$, expliciter la matrice M_1 ainsi que son inverse M_1^{-1}.

2) *Dénombrement de surjections* : étant donnés deux nombres entiers naturels p, n, on désigne par $s(p, n)$ le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments *(on remarquera que $s(p, 0) = 0$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $s(0, n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$; on posera $s(0, 0) = 1$).* On supposera $p > 0$ pour la suite de cette question.

a) Déterminer en fonction de p l'expression de $s(p, 1)$, $s(p, 2)$, $s(p, p)$ et $s(p, n)$ lorsque $n > p$.

b) Établir la formule suivante :

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot s(p, k) \quad \textit{(où } \binom{n}{k} \textit{ est le coefficient du binôme).}$$

On pourra classer les applications en fonction du cardinal de leur image.

c) En déduire l'expression de la matrice-ligne

$$\begin{bmatrix} s(p, 0) & s(p, 1) & \ldots & s(p, n) \end{bmatrix} \times M_1$$

puis donner l'expression de $s(p, n)$ en fonction de p et de n.

3) *Valeur des nombres $s(p, n)$ pour $p \leq n + 2$* : on pose, pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$f_n(x) = (e^x - 1)^n.$$

a) Exprimer $f_n(x)$ sous forme de somme en utilisant la formule du binôme de Newton.

b) En déduire que $f_n^{(p)}(0) = s(p, n)$ pour tout nombre entier $p \geq 0$.

c) Écrire le développement limité à l'ordre 3 de $e^x - 1$ en 0 et en déduire le développement limité à l'ordre $n + 2$ de $f_n(x)$ en 0.

d) Donner alors la valeur des nombres $s(p, n)$ pour $0 \leq p \leq n + 2$.

Problème D : génération de $SL_2(\mathbb{Z})$

On note $SL_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on note $\mathcal{E}$ l'ensemble de quatre matrices :

$$\mathcal{E} = \left\{A, A^{-1}, B, B^{-1}\right\}.$$

L'objectif du problème est de montrer que $SL_2(\mathbb{Z})$ ***est égal à l'ensemble*** G ***des produits finis d'éléments de*** $\mathcal{E}$.

1) Montrer que $(SL_2(\mathbb{Z}), \times)$ est un groupe, non commutatif.

2) Soient b, c, d dans $\mathbb{Z}$ tels que $P = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

a) Pour k dans $\mathbb{Z}$, calculer B^k, B^kA, PB^kA.

b) Montrer qu'il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que $PB^kA \in \{-I, I\}$.

c) En déduire que $P \in G$.

3) Soient a, b, d dans $\mathbb{Z}$ tels que $Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $Q \in G$.

4) *Division euclidienne dans* $\mathbb{Z}$

Étant donnés deux entiers relatifs a et c, tels que $a \neq 0$, montrer qu'il existe un couple (q, r) d'entiers relatifs tels que

$$c = aq + r \quad \text{et} \quad |r| < |a|.$$

Un tel couple est-il unique ?

5) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

Montrer que l'on peut construire une famille d'entiers relatifs k_0, $k_1, \ldots$, k_{p-1} tels que les matrices $M_0, \ldots$, M_p définies par

$$M_0 = M \quad \text{et} \quad \forall n \in [\![0, p-1]\!] \quad M_{n+1} = M_n B^{k_n} A$$

s'écrivent

$$\forall n \in [\![0, p]\!] \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \forall n \in [\![0, p-1]\!] \quad |a_{n+1}| < |a_n| \quad \text{et} \quad a_p = 0.$$

6) En déduire que $SL_2(\mathbb{Z}) = G$.

7) *Exemple* : écrire $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 11 & 9 \end{pmatrix}$ comme produit d'éléments de $\mathcal{E}$.