T.D. 3 – Compléments sur les séries numériques

1. Étudier la nature des séries dont le terme général est donné ci-dessous, en discutant éventuellement suivant les valeurs des paramètres :

$$u_n = \arccos\left(\frac{n^3+1}{n^3+2}\right) \quad ; \quad u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3} \ (a \in \mathbb{R})$$

$$u_n = \left(\frac{4}{\pi}\arctan\frac{n}{n+1}\right)^{n^\alpha} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \quad ; \quad u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$$

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \quad ; \quad u_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+(-1)^n}\right)$$

$$u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{k}{n^{5\alpha}}\right) \ (\alpha > 0\ ;\ k \neq 0) \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln\left(n+(-1)^n\right)}$$

2. Calculer les sommes des séries dont le terme général est donné ci-dessous, en montrant leur convergence.

$$u_n = \left(n-(-1)^n\right)\cdot 3^{-n} \quad ; \quad u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \quad \left(f \in \mathcal{C}^0\left([0,1],\mathbb{R}^+\right)\right)$$

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^n k^2\right)^{-1} \quad ; \quad u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$u_n = \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} \quad ; \quad u_n = \frac{(-1)^n}{4^n(4n+1)} \quad \left(\textit{se ramener à } \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}\right)$$

3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs ou nuls, $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + \dfrac{a_n}{u_n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Montrer que les séries de termes généraux u_n et $v_n = n\,(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature.
En cas de convergence, comparer leurs sommes.

5. $\alpha > 0$ étant donné, étudier la suite (P_n) définie par : $\forall n \geq 2 \quad P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^n \left(1-\frac{1}{k^\alpha}\right)$.

6. © Soit $\sum x_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}^{+*}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sum v_n$ une série absolument convergente vérifiant

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + v_n\ .$$

Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $x_n \sim \dfrac{K}{n^\alpha}$.
(On pourra étudier la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, où $a_n = \ln(n^\alpha x_n)$.)
Étudier les exemples :

$$x_n = n^{-n} n! e^n \quad \text{et} \quad x_n = \frac{n.n!}{(a+1)\ldots(a+n)} \quad (a>0)\ .$$

7. © *Test de condensation de Cauchy* : soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante.
Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
Que donne le résultat précédent pour les séries de Riemann ?
Et pour les séries de Bertrand de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$?