Compléments de calcul intégral.

Exercices 2017-2018

Niveau 1.

Théorème de convergence dominée.

1. Préciser les entiers n pour lesquels les intégrales suivantes existent, puis déterminer la limite des suites d'intégrales ainsi définies.

a. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).\frac{dx}{x^3}$, b. $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2}.dx$, c. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}.dx$,

d. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x}.dx$ e. $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2.n}+1}.dx$, f. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.\sin^{2.n}(x).dx$,

2. Soit f une fonction continue de [0,1] dans ℝ ou ℂ.

a. Justifier l'existence pour tout entier : n ∈ ℕ, de : $\int_0^1 f(t^n).dt$.

b. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n).dt$.

3. On pose : ∀ α > 0, ∀ n ∈ ℕ*, $I_n = \int_0^1 x^{\alpha-1}.\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.dx$.

a. Justifier l'existence de ces intégrales pour tout entier : n ≥ 1.

b. Montrer que : ∀ u ∈ [0,n], $\left(1-\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$ (on pourra utiliser avec précaution un logarithme).

c. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^{\alpha-1}.\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}.e^{-x}.dx$.

4. On pose : ∀ n ∈ ℕ, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x+n}.dx$.

a. Justifier l'existence de I_n, pour tout entier : n ∈ ℕ*.

b. Etudier : $\lim_{n\to+\infty} n.I_n$, et en déduire un équivalent de I_n en +∞.

5. On pose, pour : n ∈ ℕ*, $I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.dt$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout entier : n ∈ ℕ*.

b. Montrer qu'on peut, pour tout entier : n ≥ 1, définir une fonction u_n sur ℝ⁺, telle que : $I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t).dt$.

c. Montrer que (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers une fonction u que l'on précisera.

d. Justifier que u majore toutes les fonctions u_n et en déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

e. Soit f une fonction continue par morceaux sur ℝ⁺*, telle que : $x \mapsto f(x).e^{-x}$, est intégrable sur ℝ⁺*.

Justifier l'existence de : $I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.f(t).dt$, pour : n ≥ 1, puis déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

6. On pose : ∀ n ∈ ℕ*, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}.\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}.dx$.

a. Justifier l'existence de I_n pour tout entier : n ≥ 1.

b . Déterminer si elle existe $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Interversion série-intégrale.

7. On pose : $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}.dt$.

   a. Justifier l'existence de I.

   b. Montrer : ∀ t ∈ ℝ$^{+*}$, $\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t.e^{-(n+1).t}$.

   c. On pose, pour : n ∈ ℕ, $J_n = \int_0^{+\infty} t.e^{-(n+1).t}.dt$.

   A l'aide d'un changement de variable, montrer que : ∃ C ∈ ℝ, ∀ n ∈ ℕ, $J_n = \frac{C}{(n+1)^2}$.

   Préciser la valeur de C.

   d. En admettant que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire la valeur de I .

8. Montrer que : $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1}.dt = 2.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

9. Pour : n ∈ ℕ, et : x ∈]0,1[, on pose : $f_n(x) = \frac{x^{2.x+1}.\ln(x)}{x^2 - 1}$.

   a. Montrer que f_n est intégrable sur]0,1[(on posera : $J_n = \int_0^1 f_n(x).dx$).

   b. Montrer que la suite (J_n) converge et déterminer sa limite.

   c. Montrer que : ∀ n ∈ ℕ, $J_n = \frac{1}{4}.\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Fonction intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque.

10. a. On définit la fonction f sur ℝ$^{+*}$ par : ∀ x > 0, $f(x) = \int_0^1 t^x.(1-t)^x.dt$.

    Justifier l'existence de $f(x)$, pour tout réel : x > 0.

    Montrer que : t ↦ $t.(1-t)$, est bornée sur [0,1] et donner un majorant de cette fonction sur [0,1].

    En déduire que f tend vers 0 quand x tend vers +∞.

    b. Pour : (α,β) ∈ ℝ$^{+*}$, on définit la fonction F sur ℝ$^{+*}$, par :

    ∀ x > 0, $F(x) = \int_0^1 \frac{t^{\alpha.x}.(1-t)^{\beta.x}}{\sqrt{t}}.dt$.

    Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers +∞.

    A l'aide d'une suite de fonctions (de t), montrer que : $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$.

    En déduire que F tend vers 0 en +∞.

11. Soit F : x ↦ $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^3 + x^3}$.

    a. Montrer que F est définie sur ℝ$^+$.

    b. A l'aide du changement de variable : $u = \frac{1}{t}$, calculer $F(0)$.

    c. Montrer que F est continue et décroissante.

    d. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

12. Soit F donnée par : $\forall$ x $\in$ ℝ, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^x.e^{-t}}$.

a. Donner l'ensemble de définition de F.

b. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

13. Pour : x > 0, on pose : $F(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{x+t}.dt$.

a. Montrer que F est définie et continue sur]0,+∞).
On pourra utiliser le changement de variable : $t = u.x$, ou toute autre méthode.

b. Préciser $\lim_{x\to 0} F(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

14. On pose : $\forall$ x $\in$ ℝ, $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}.dt$.

a. Justifier que : $\mathscr{D}_F$ =]-1,+∞).

b. Montrer que F est de classe C^1 et calculer $F'(x)$, pour : $x > -1$.

c. En déduire $F(x)$, pour tout : $x > -1$.

15. Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2.(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$.

a. Montrer que F est définie sur ℝ et est paire.

b. Montrer que F est de classe C^1 et calculer F'.

c. En déduire que : $\exists$ K $\in$ ℝ, $\forall$ x $\in$ ℝ, $F(x) = K - \left(\int_0^x e^{-u^2}.du\right)^2$.

d. Préciser la valeur de K.

e. Montrer que : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$, et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{u}^2}.\mathrm{du}$.

16. Montrer que la fonction ϕ donnée par : $\forall$ x $\in$]0,+∞), $\phi(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}}.dt$, est de classe C^∞ sur]0,+∞).

17. Pour : ω > 0, et : x $\in$ ℝ, on pose : $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.i.\pi.x.t}.dt$.

a. Justifier l'existence de $f(x)$.

b. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre donc f est solution.

c. En déduire la valeur de $f(x)$ (on rappelle que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \sqrt{\pi}$).

Fonction Γ.

18. On note, pour x réel : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$.

a. Montrer que Γ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Préciser pour tout n entier, $\Gamma^{(n)}$.

c. Montrer que : $\forall$ x > 0, $\Gamma(x+1) = \Gamma(x)$.
En déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout n.

d. Montrer que la fonction Γ'' est positive et à l'aide du théorème de Rolle, en déduire le tableau de variations de Γ.

<u>Niveau 2.</u>

Théorème de convergence dominée.

19. Justifier l'existence des intégrales suivantes pour tout entier n, puis déterminer la limite des suites d'intégrales ainsi définies.

a. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2+1}.dx$, b. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}.\sin^n(x).dx$.

20. A l'aide notamment d'un changement de variable, montrer que : $\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}.dx \underset{+\infty}{\sim} n$.

Interversion série-intégrale.

21. Soient $\sum a_n$ une série complexe absolument convergente, et pour x réel : $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}.x^n$.

a. Montrer que : $\mathscr{D}_S = \mathbb{R}$.

b. Montrer que : $\int_0^{+\infty} S(x).e^{-x}.dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

22. a. Montrer l'existence de : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{x.t}-1}.dt$, pour : x > 0.

b. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-n.x.t}.\sin(t).dt$, pour : n ≥ 1, et : x > 0.

c. Etablir l'égalité : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2.x^2}$.

Fonction intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque.

23. Justifier l'existence puis calculer, pour : x > 0, et : y > 0, la quantité : $F(x,y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x.t}-e^{-y.t}}{t}.dt$.

24. On note : $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(x+\cos(t)).dt$.

a. Montrer que F est définie, de classe C^1 sur]1,+∞), et calculer F' .

b. Exprimer $F(x) - \pi.\ln(x)$ en fonction d'une intégrale.

c. Etudier la limite en +∞ de la fonction précédente et en déduire F .

25. On pose, pour x réel : $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.ch(2.x.t).dt.$

a. Montrer que f est définie, de classe C^1 sur ℝ.

b. Déterminer une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f .

c. Intégrer l'équation précédente, et en déduire la valeur de $f(x)$, pour tout x.

d. Retrouver ce résultat par un calcul direct de $f(x)$ en intégrant sur ℝ.

26. Soit F la fonction définie par : $F(x) = \int_0^{\pi} \ln(1-2.x.\cos(t)+x^2).dt$.

a. Montrer que cette fonction est définie pour : $x \neq \pm 1$.

b. Etablir un lien entre $F(x)$ et $F\left(\frac{1}{x}\right)$ pour x non nul.

c. Montrer que la fonction F est paire.

d. Montrer que F est de classe C^1 sur]-1,+1[, puis préciser F'

e. Calculer effectivement $F'(x)$ pour : x ∈]-1,+1[.

f. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout : $x \neq \pm 1$.

27. Presque comme Wallis : on considère la fonction suivante I définie par : ∀ x ∈ ℝ, $I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^x.dt$.

a. Déterminer le domaine de définition D de cette fonction.

b. Montrer que I est de classe C^∞ sur D.

c. Calculer $I(0)$, $I(1)$, $I(2)$, $I(3)$, $I(4)$.
d. Trouver une relation simple entre $I(x+2)$ et $I(x)$.
e. Pour : n ∈ ℕ*, que vaut $I(n).I(n-1)$?
f. Déterminer des équivalents simples de I aux extrémités de D.

Fonction Γ.

28. On reprend la fonction Γ définie par : ∀ x > 0, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.dt$.
a. Donner un équivalent de Γ en 0.
b. Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Recherche d'équivalents.

29. On note : ∀ x ∈ ℝ⁺*, $F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}.dt$.
a. Montrer que F est définie et continue sur ℝ⁺*.
b. Transformer, pour : x > 0, $G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}.dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{x}.dt$.
Montrer que : $G(x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, et en déduire un équivalent de F(x) en +∞.
c. Transformer, pour : x > 0, $H(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{t+x}.dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t+x}$.
Etudier $\lim_{x\to 0} H(x)$, et en déduire un équivalent de $F(x)$ en 0.

__Niveau 3.__
Théorème de convergence dominée, interversion série-intégrale.

30. Justifier l'existence des intégrales suivantes pour tout entier n, puis déterminer la limite de la suite d'intégrales ainsi définies : $\int_0^{+\infty} \frac{n.e^{-x^2}\sin(x)}{1+n^2.x^2}.dx$.

31. Soit : α ∈ ℝ⁺*.
On note : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1-\alpha.\frac{k}{n}\right)^n$, et f_n la fonction définie de [1,+∞) dans ℝ, par :
$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\alpha.\frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n & si \quad 1 \le x < n+1 \\ 0 & si \quad x \ge n+1 \end{cases}.$$
Etudier la limite simple de (f_n), établir un lien entre (u_n) et (f_n) et en déduire : $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

32. Pour : n ∈ ℕ, on pose : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2.\cos^n(x).dx$.
a. Transformer l'expression de u_n pour : n ∈ ℕ*, à l'aide du changement de variable : $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$.
b. Justifier l'inégalité : ∀ x ∈ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\int_0^x u.du \le \int_0^x \tan(u).du$, et en déduire un équivalent de u_n en +∞.

33. a. Justifier l'existence de : $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^x}$.
b. Montrer que : ∀ x ∈]0,1], $x^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n.x^n.(\ln(x))^n}{n!}$.

c. En déduire que : $I = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^p}$.

34. Montrer que : ∀ (a,b,ω) ∈ ℝ⁺*×ℝ⁺*×ℝ, $\int_0^{+\infty} \frac{x.e^{-a.x}}{1-e^{-b.x}}.\sin(\omega.x).dx = 2.\omega.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a+b.n}{((a+b.n)^2+\omega^2)^2}$.

Fonction intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque.

35. Soient a et b deux réels strictement positifs.

a. Justifier l'existence pour tout : x ∈ ℝ, de : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-a.t} - e^{-b.t}}{t}.\cos(x.t).dt$.

b. Justifier que F est de classe C^1 sur ℝ et calculer $F'(x)$.

c. En déduire $F(x)$.

36. On pose, pour x réel : $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}.e^{-x.t}.dt$.

a. Montrer que la fonction g est définie, continue sur [0,+∞) et de classe C^2 sur]0,+∞).

b. Pour : $z = a + i.b \in \mathbb{C}$, avec : a < 0, et : b ∈ ℝ, on pose : $I_z = \int_0^{+\infty} e^{z.t}.dt$

Justifier l'existence de I_z et calculer cette intégrale.

Préciser $\mathrm{Re}(I_z)$ et $\mathrm{Im}(I_z)$.

c. En déduire la valeur de $g''(x)$, pour : x > 0.

Exprimer la fonction g à l'aide de fonctions élémentaires.

d. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$.

37. On pose : ∀ x ∈ ℝ, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x.t^2}}{1+t^2}.dt$, et on rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Montrer que F est définie sur ℝ⁺*, de classe C^1 sur ℝ⁺*, et préciser F'.

b. Montrer que F est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, et résoudre cette équation.

c. En déduire que : ∀ x > 0, $F(x) = (\frac{\pi}{2} - \sqrt{\pi}.\int_0^{\sqrt{x}} e^{-u^2}.du).e^x$.

38. On pose : ∀ x ∈ ℝ, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}.e^{i.t.x}}{\sqrt{t}}.dt$.

a. Montrer que F est définie et de classe C^1 sur ℝ.

b. A l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre F et F', et en déduire F.

39. Fonction J_0 de Bessel : on note : ∀ x ∈ ℝ, $J_0(x) = \frac{1}{\pi}.\int_0^{\pi} \cos(x.\sin(t)).dt$.

a. Montrer que la fonction J_0 est définie sur ℝ, et de classe C^∞ sur ℝ.

b. Préciser J_0' et montrer que J_0 est strictement décroissante sur]0,π[.

c. Montrer que J_0 s'annule une et une seule fois sur]0,π[.

Pour l'étude de la valeur en π, commencer par ramener l'intégrale sur [0,π/2], puis effectuer un changement de variable pour obtenir deux intégrales sur [0,1/2].

d. Montrer que J_0 est solution sur ℝ de l'équation différentielle : $x.y'' + y' + x.y = 0$.

40. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x.t}}{1+t^2}.dt$, et : $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}.dt$.

a. Montrer que f et g sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle : $y''+y = \frac{1}{x}$.

b. Montrer que f et g sont continues en 0.

c. En déduire que : $g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$.

41. On reprend la fonction Γ définie par : $\forall$ x > 0, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}dt$.

a. Montrer que : $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$, $x^\alpha = o_{+\infty}(\Gamma(x))$.

b. Montrer que : $\forall$ x > 1, $\forall\ \lambda \in$ [-1,+1], $\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}.e^{-t}}{1-\lambda.e^{-t}}.dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n.\Gamma(x)}{(n+1)^x}$.

Transformée de Fourier, de Laplace.

42. Pour f continue par morceaux, intégrable sur $\mathbb{R}$, on note pour x réel : $(\mathscr{F} f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-i.x.t}.dt$.

a. Montrer que $(\mathscr{F} f)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b. Soit Π_T la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[-\frac{T}{2},+\frac{T}{2}\right]$.

Calculer sa transformée de Fourier.

c. Même question pour la fonction f_α définie par : $f_a(t) = e^{-a.|t|}$, où : a $\in \mathbb{R}^{+*}$.

d. On suppose ici que f est continue sur $\mathbb{R}$ et on note f_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall$ t $\in \mathbb{R}$, $f_1(t) = t.f(t)$.

En supposant que f_1 est intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que $(\mathscr{F} f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.

e. Suggérer des hypothèses puis démontrer sous ces hypothèses que $(\mathscr{F} f)$ est de classe C^p, C^∞ sur $\mathbb{R}$.

43. Soit E l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour : $f \in$ E, on pose : $\forall$ x > 0, $(\mathscr{L} f)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-x.t}.f(t).dt$.

a. Montrer que : $\forall\ f \in$ E, $\mathscr{L} f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Donner la limite de $\mathscr{L} f$ en +∞, pour : $f \in$ E.

c. Vérifier que $g : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$, se prolonge par continuité en 0 et que ce prolongement est dans E.

d. Calculer $(\mathscr{L} g)'$ et en déduire $\mathscr{L} g$.