Compléments de calcul intégral (corrigé niveau 2).

Théorème de convergence dominée.

19. a. On peut commencer par remarquer que : ∀ n ≥ 0, ∀ x ∈ ℝ, $\left|\frac{\sin^n(x)}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{x^2+1} = \varphi(x)$,

et la fonction majorante étant intégrable sur ℝ, toutes les intégrales existent.

Puis on note : ∀ n ≥ 0, ∀ x ∈ ℝ, $u_n(x) = \left|\frac{\sin^n(x)}{x^2+1}\right|$.

Alors : ∀ n ≥ 0, $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{x^2+1}.dx\right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin^n(x)}{x^2+1}\right|.dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x).dx$.

On constate alors que :

- toutes les fonctions u_n sont continues, donc continues par morceaux sur ℝ,
- la suite (u_n) converge simplement sur ℝ vers la fonction u, nulle partout sauf pour les valeurs : $x_k = \frac{\pi}{2} + k.\pi$, avec : k ∈ ℤ, où elle vaut 1,
- cette fonction u est continue par morceaux sur ℝ,
- la fonction φ du début de la question majore toutes les fonctions u_n sur ℝ, et elle est continue et intégrable sur ℝ.

Donc le théorème de convergence dominée s'applique et : $\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\lim_{n\to+\infty} u_n(x)).dx = 0$.

Le théorème des gendarmes montre alors que la suite des intégrales proposées tend aussi vers 0.

b. On travaille de la même façon pour cette deuxième suite d'intégrales sur $\mathbb{R}^+$.

On utilise comme fonction majorante la fonction φ définie par : ∀ x ∈ ℝ, $\varphi(x) = e^{-x^2}$, et comme fonction limite la fonction u nulle sur $\mathbb{R}^+$ sur pour les valeurs : $x_k = \frac{\pi}{2} + k.\pi$, k ∈ℕ, où elle vaut : $u(x) = e^{-x_k^2}$.

En appliquant de même successivement le théorème de convergence dominée puis le théorème des gendarmes, on déduit à nouveau que la suite des intégrales tend vers 0.

20. a. Puisque la série est absolument convergente, la suite (a_n) est bornée et on peut noter M un majorant (non nul) de $(|a_n|)$.

Alors : ∀ x ∈ ℝ, ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{a_n}{n!}.x^n\right| \leq \frac{M}{n!}.|x|^n = b_n$.

Si :

- x = 0, la série définissant $S(x)$ est la série nulle, donc est convergente,
- x ≠ 0, alors : ∀ n ∈ ℕ, $b_n \neq 0$, et : ∀ n ∈ ℕ, $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \frac{|x|}{n+1}$, qui tend vers 0 quand n tend vers +∞.

La règle de d'Alembert montre alors la convergence de la série $S(x)$.

Conclusion : $S(x)$ converge pour tout réel x et : $\mathscr{D}_S$ = ℝ.

b. Commençons par remarquer que la fonction S est continue sur ℝ.

En effet : ∀ A > 0, la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n$, avec : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ, $v_n(x) = \frac{a_n}{n!}.x^n$, converge normalement sur [-A,+A] puisque : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ [-A,+A], $|v_n(x)| \leq \frac{M}{n!}.A^n$, et la série majorante, comme série exponentielle, est convergente.

On peut ensuite écrire :

∀ x ∈ $\mathbb{R}^+$, $S(x).e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}.x^n.e^{-x}$, puis noter : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ $\mathbb{R}^+$, $u_n(x) = \frac{a_n}{n!}.x^n.e^{-x}$.

Alors :

• toutes les fonctions u_n sont définies, continues sur $\mathbb{R}^+$, et intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

En effet : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty}|u_n| = \frac{|a_n|}{n!}.\int_0^{+\infty} x^n.e^{-x}.dx$, et un calcul classique par récurrence montre que :

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$*, $\int_0^{+\infty} x^n.e^{-x}.dx = [-x^n.e^{-x}]_0^{+\infty} + n.\int_0^{+\infty} x^{n-1}.e^{-x}.dx = n.\int_0^{+\infty} x^{n-1}.e^{-x}.dx = n!.\int_0^{+\infty} e^{-x}.dx = n!$.

• la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers sa somme qu'on notera σ,

• la fonction σ est définie et continue par morceaux (car continue) sur $\mathbb{R}^+$,

• la série $\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}|u_n|$ converge, car c'est la série $\sum |a_n|$ qui converge.

Le théorème de convergence dominée s'applique donc ici et :

• la fonction : $x \mapsto S(x).e^{-x}$, est intégrable sur [0,+∞),

• $\int_0^{+\infty} S(x).e^{-x}.dx = \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{a_n}{n!}.\int_0^{+\infty} x^n.e^{-x}.dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}.n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

21. On commence par remarquer que pour tout entier : n ≥ 1, la fonction sous l'intégrale est définie et continue sur le segment [0,n], donc toutes les intégrales envisagées existent.

Puis, en utilisant le changement de variable : $t = 1 - \frac{x}{n}$, on a :

$\forall$ n ≥ 1, $\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}.dx = -n.\int_1^0 \sqrt{1+t^n}.dt = n.\int_0^1 \sqrt{1+t^n}.dt$.

En notant alors : $\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$*, $\forall$ t $\in$ [0,1], $u_n(t) = \sqrt{1+t^n}$, on constate que :

• toutes les fonctions u_n sont définies, continues sur [0,1] donc intégrables sur ce segment,

• la suite (u_n) converge simplement sur [0,1] vers la fonction constante égale à 1,

• cette fonction constante est évidemment continue sur le segment,

• la fonction constante égale à 2 est continue donc intégrable sur le segment [0,2] et elle majore toutes les fonctions u_n.

Le théorème de convergence dominée s'applique et : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sqrt{1+t^n}.dt = \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+t^n}).dt = \int_0^1 dt = 1$.

On en conclut que : $\int_0^n \sqrt{1+\left(1-\frac{x}{n}\right)^n}.dx \underset{+\infty}{\sim} n$.

22. a. Posons : $\forall$ (x,t) $\in$ $\mathbb{R}^{+*2}$, $f(x,t) = \frac{\sin(t)}{e^{x.t}-1}$.

Alors : $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

De plus : $\forall$ x > 0, $\forall$ t > 0, $f(x,t) = \frac{\sin(t)}{(1+x.t+o_0(t)-1)} = \frac{\sin(t)}{x.t+o_0(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{x}$, donc : $t \mapsto f(x,t)$, est prolongeable par continuité en 0.

Puis : $\forall$ x > 0, $|t^2.f(x,t)| \leq \frac{t^2}{e^{x.t}-1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, par le théorème des croissances comparées et :

$f(x,t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

Finalement $F(x)$, pour tout : x > 0.

b. On peut intégrer par parties deux fois ou utiliser une exponentielle complexe :

$\int_0^{+\infty} e^{-n.x.t}.e^{i.t}.dt = \left[\frac{e^{(-n.x+i).t}}{-n.x+i}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{n.x-i} = \frac{n.x+i}{(n.x)^2+1}$, car : $\left|e^{(-n.x+i).t}\right| = e^{-n.x.t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

On en déduit que : $\int_0^{+\infty} e^{-n.x.t}.\sin(t).dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{-n.x.t}.e^{i.t}.dt\right) = \dfrac{1}{(n.x)^2+1}$.

c. On commence par écrire que :

$\forall$ x > 0, $\forall$ t > 0, $\dfrac{\sin(t)}{e^{x.t}-1} = e^{-x.t}.\sin(t).\dfrac{1}{1-e^{-x.t}} = e^{-x.t}.\sin(t).\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x.k.t} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(t).e^{-x.n.t}$, avec : $n = k+1$.

On pose alors : $\forall$ x > 0, $\forall$ n $\in$ ℕ*, $\forall$ t > 0, $u_n(t) = \sin(t).e^{-x.n.t}$, et :

- les fonctions u_n sont définies, continues sur ℝ+*, intégrables sur ℝ+* (question b).
- la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur ℝ+* vers $f(x,.)$,
- la fonction somme de la série est continue sur ℝ+*,
- la série $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}|u_n|$ converge puisque : $\forall$ x > 0, $\forall$ n $\in$ ℕ*, $\int_0^{+\infty}|u_n| = \int_0^{+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+n^2.x^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}.\dfrac{1}{n^2}$.

Donc on peut intervertir série et intégrale et : $\forall$ x > 0, $F(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{1+n^2.x^2}$.

Fonction intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque.

23. On va fixer : $y > 0$, et on va noter : $\forall$ (x,t) $\in$ ℝ+*×ℝ+*, $f(x,t) = \dfrac{e^{-x.t}-e^{-y.t}}{t}$.

Alors la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue sur]0,+∞).

De plus, pour tout : x > 0, on a :

- $f(x,t) = \dfrac{1}{t}.(1 - x.t - (1-y.t) + o_0(t)) = (y-x) + o_0(1) \xrightarrow[t\to 0]{} (y-x)$,

et : $t \mapsto f(x,t)$, est prolongeable par continuité en 0,

- $t^2.f(x,t) = t.e^{-x.t} - t.e^{-y.t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, car x et y sont strictement positifs, donc : $f(x,t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

Finalement : $t \mapsto f(x,t)$, est intégrable sur]0,+∞) et l'intégrale $F(x,y)$ converge.

De plus :

- $\forall$ t > 0, $x \mapsto f(x,t)$, est de classe C[1] sur ℝ+* et : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -e^{-x.t}$,
- $\forall$ t > 0, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue par morceaux sur ℝ+*,
- $\forall$ a > 0, $\forall$ (x,t) $\in$ [a,+∞)×ℝ+*, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-a.t} = \psi_a(t)$, et ψ_a est définie, continue par morceaux et

intégrable sur ℝ+* (puisque prolongeable par continuité en 0 et comme $o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$).

Donc : $x \mapsto F(x,y)$, est de classe C[1] sur ℝ+*, et : $\forall$ x > 0, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\int_0^{+\infty} e^{-x.t}.dt = \left[\dfrac{e^{-x.t}}{x}\right]_0^{+\infty} = -\dfrac{1}{x}$.

On en déduit que : $\exists$ C $\in$ ℝ, $\forall$ x > 0, $F(x,y) = \ln(x) + C$.

Comme de plus : $F(y,y) = 0$, on en déduit que : $\ln(y) + C = 0$, donc : $C = -\ln(y)$.

On en conclut que : $\forall$ (x,y) $\in$ ℝ+*², $F(x,y) = \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

24. a. On commence par noter : $\forall$ (x,t) $\in$ ℝ×[0,π], $f(x,t) = \ln(x+\cos(t))$.

Pour x réel fixé, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie sur]0,π[si et seulement si : x ≥ 1.

Si : x > 1, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est alors définie et continue sur [0,π] donc y est intégrable.

On pourrait montrer que la fonction : $t \mapsto \ln(1+\cos(t))$, est définie, continue et intégrable sur [0,π[, mais la question suggère de choisir : x > 1, ce qu'on fera dans la suite.

On constate alors que :

- $\forall$ x $\in$]1,+∞), $t \mapsto f(x,t)$, est définie et intégrable sur [0,π],
- f admet une dérivée partielle qui vaut : $\forall$ (x,t) $\in$]1,+∞)×[0,π], $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{x+\cos(t)}$,
- $\forall$ x $\in$]1,+∞), $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue sur [0,π],
- $\forall$ t $\in$ [0,π], $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue sur]1,+∞),
- pour tout segment : [a,b] ⊂]1,+∞), on a : $\forall$ (x,t) $\in$ [a,b]×[0,π], $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le \dfrac{1}{a-1} = \varphi_{a,b}(t)$, et $\varphi_{a,b}$ est

continue donc intégrable sur le segment [0,π].
On peut ainsi en déduire que F est définie et de classe C^1 sur]1,+∞), et que :

$\forall$ x $\in$]1,+∞), $F'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt = \int_0^{\pi} \frac{dt}{x+\cos(t)}$.

On peut alors effectuer le changement de variable monotone de classe C^1 : $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$, et :

$\forall$ x $\in$]1,+∞), $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2.dt}{x.(1+u^2)+(1-u^2)} = \int_0^{+\infty} \frac{2.dt}{(x-1).u^2+(x+1)} = \frac{2}{x-1}.\int_0^{+\infty} \frac{dt}{u^2+\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Finalement : $\forall$ x $\in$]1,+∞), $F'(x) = \dfrac{2}{x-1}.\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}.\left[\arctan\left(u.\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)\right]_0^{+\infty} = \dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}.\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}$.

b. Il est immédiat que : $\forall$ x > 1, $F(x) - \pi.\ln(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x+\cos(t)).dt - \int_0^{\pi} \ln(x).dt = \int_0^{\pi} \ln\left(1+\frac{\cos(t)}{x}\right).dt$.

c. On peut alors encadrer la fonction sous l'intégrale pour obtenir :

$\forall$ x > 1, $\pi.\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) \le F(x) - \pi.\ln(x) \le \pi.\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$,

et le théorème des gendarmes montre alors que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(F(x)-\pi.\ln(x)) = 0$.

Enfin la valeur de F' permet d'affirmer que :

$\exists$ C $\in$ ℝ, $\forall$ x $\in$]1,+∞), $F(x) = \pi.\arg ch(x) + C = \pi.\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$.

Et comme alors : $\forall$ x > 1, $F(x) - \pi.\ln(x) = \pi.\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C - \pi.\ln(x) = \pi.\ln(1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}) + C$,

on en déduit que : $C = -\pi.\ln(2)$, soit :

$\forall$ x $\in$]1,+∞), $F(x) = \pi.\arg ch(x) - \pi.\ln(2) = \pi.\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}\right)$.

25. On pose, pour x réel : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.ch(2.x.t).dt$

a. On commence par noter : $\forall$ (x,t) $\in$ ℝ×ℝ⁺, $g(x,t) = e^{-t^2}.ch(2.x.t)$.

On constate alors que :

- $\forall$ x $\in$ ℝ, $t \mapsto g(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car :

  $t^2.g(x,t) = t^2.e^{-t^2}.ch(2.x.t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}.\exp(-t^2+2.x.t+2.\ln(t))$, qui tend vers 0 en +∞,
- g admet une dérivée partielle sur ℝ×$\mathbb{R}^+$: $\forall$ (x,t) $\in$ ℝ×$\mathbb{R}^+$, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = 2.t.e^{-t^2}.sh(2.x.t)$,
- $\forall$ x $\in$ ℝ, t $\mapsto$ $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}^+$,

- $\forall$ t $\in \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, est définie et continue sur $\mathbb{R}$,
- $\forall$ [-a,+a] $\subset \mathbb{R}$, $\forall$ $(x,t) \in$ [-a,+a]$\times\mathbb{R}^+$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 2.t.e^{-t^2}.sh(2.a.t) = \psi_a(t)$, avec ψ_a continue (donc

continue par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (pour la même raison qu'au-dessus).

Donc f est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t).dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.2.t.sh(2.x.t).dt$.

b. On peut alors procéder à une intégration par parties, en écrivant :

$\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $\forall$ a ≥ 0, $\int_0^a e^{-t^2}.2.t.sh(2.x.t).dt = [-e^{-t^2}.sh(2.x.t)]_0^a + 2.x.\int_0^a e^{-t^2}.ch(2.x.t).dt$.

Si on fait tendre a vers $+\infty$, on en déduit que : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0 + 2.x.f(x)$, et f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' - 2.x.y = 0$.

c. Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $y(x) = C.e^{x^2}$, avec : C $\in \mathbb{R}$.

Comme de plus on a : $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, on conclut que : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{x^2}$.

d. On peut aussi écrire : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}.(\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.e^{2.x.t}.dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}.e^{-2.x.t}.dt)$, puisque les deux intégrales convergent, toujours pour les mêmes raisons qu'au-dessus.

Ensuite :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.e^{2.x.t}.dt = e^{x^2}.\int_0^{+\infty} \exp(-t^2 + 2.x.t - x^2).dt = e^{x^2}.\int_0^{+\infty} \exp(-(t-x)^2).dt = e^{x^2}.\int_{-x}^{+\infty} \exp(-u^2).du,$$

avec le changement de variable (croissant de classe C^1) : $u = t - x$.

De même : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.e^{-2.x.t}.dt = e^{x^2}.\int_0^{+\infty} \exp(-(-t-x)^2).dt = -e^{x^2}.\int_{-x}^{-\infty} \exp(-u^2).du = e^{x^2}.\int_{-\infty}^{-x} \exp(-u^2).du$,

avec cette fois le changement de variable (décroissant de classe C^1) : $u = -t - x$.

Finalement : $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}.(e^{x^2}.\int_{-x}^{+\infty} e^{-u^2}.du + e^{x^2}.\int_{-\infty}^{-x} e^{-u^2}.du) = \dfrac{e^{x^2}}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}.du = \dfrac{e^{x^2}}{2}.\sqrt{\pi} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}.e^{x^2}$,

soit bien le même résultat que précédemment.

26. a. On commence par noter : $\forall$ $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\pi]$, $f(x,t) = \ln(1 - 2.x.\cos(t) + x^2) = \ln((x - \cos(t))^2 + \sin^2(t))$.

On constate alors que la quantité dans le ln est toujours positive et qu'elle s'annule si et seulement si :
- $\sin(t) = 0$, c'est-à-dire : $t = 0$, ou : $t = \pi$, et :
- $\cos(t) = x$.

Donc dans le domaine indiqué, la quantité s'annule pour les couples (1, 0) et (-1,π).

Autrement dit, si : $x \neq \pm 1$, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie et continue sur le segment $[0,\pi]$, et donc F est définie au moins sur $\mathbb{R}$ - {$\pm$1}.

On peut remarquer que l'énoncé est ambigu car il ne demande pas explicitement d'examiner les cas où x vaut $\pm$1 qui conduisent à une intégrale généralisée, qui en fait est convergente dans les deux cas.

Autrement dit, F est également définie en $\pm$1.

b. Pour x non nul, distinct de $\pm$1, on a : $F(x) = \int_0^{\pi} [\ln(x^2) + \ln(\dfrac{1}{x^2} - 2.\dfrac{1}{x}.\cos(t) + 1)].dt = 2.\pi.\ln(|x|) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c. Soit x $\in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 1$.

Alors : $F(-x) = -\int_{\pi}^{0} \ln(1 + 2.x.\cos(\pi - u) + x^2).du = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2.x.\cos(u) + x^2).du = F(x)$,

avec le changement de variable : $t = \pi - u$.

F étant paire, et avec la question b, on peut se contenter de l'étudier sur [0,1[(mais pour le caractère C^1, on l'étudie sur]-1,+1[pour éviter tout problème en 0).

d. On remarque ensuite que :
- $\forall$ x $\in$ [0,1[, $t \mapsto f(x,t)$, est continue donc intégrable sur le segment $[0,\pi]$,
- f admet une dérivée partielle sur]-1,1[$\times[0,\pi]$: $\forall$ $(x,t) \in$]-1,1[$\times[0,\pi]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{2.x - 2.\cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}$,

- $\forall$ x $\in$]-1,1[, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) sur [0,π],
- $\forall$ t $\in$ [0,π], $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est définie, continue sur]-1,1[,
- $\forall$ [-a,a] $\subset$]-1,1[, $\forall$ (x,t) $\in$ [-a,a]×[0,π], $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \dfrac{2.a+2}{(a-1)^2} = \psi_a(t)$, et ψ_a est définie, continue (donc continue par morceaux) et donc intégrable sur le segment [0,π].

Donc F est de classe C^1 sur]-1,+1[, et : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $F'(x) = \int_0^\pi \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt = \int_0^\pi \dfrac{2.x - 2.\cos(t)}{x^2 - 2.x.\cos(t) + 1}.dt$.

e. Pour calculer $F'(x)$, on vérifie que les règles de Bioche ne donnent pas de résultat puis on utilise le changement de variable : $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

On obtient alors : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $F'(x) = 2.\int_0^{+\infty} \dfrac{u^2.(x+1)+(x-1)}{u^2.(x+1)^2+(x-1)^2}.\dfrac{2.du}{u^2+1}$.

On factorise alors par 2 et on décompose la fraction en éléments simples, ce qui donne (pour : x ≠ 0) :

$$\frac{u^2.(x+1)+(x-1)}{u^2.(x+1)^2+(x-1)^2}.\frac{1}{u^2+1} = \frac{1}{2.x}.\frac{1}{u^2+1} + \frac{x^2-1}{2.x}.\frac{1}{u^2.(x+1)^2+(x-1)^2}.$$

Donc : $\forall$ x $\in$]-1,+1[, x ≠ 0, $F'(x) = \dfrac{2}{x}.\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{u^2+1} + \dfrac{x^2-1}{2.x}.\int_0^{+\infty}\dfrac{du}{u^2.(x+1)^2+(x-1)^2}$, soit encore :

$$F'(x) = \frac{2}{x}.[\arctan(u)]_0^{+\infty} + \frac{x^2-1}{2.x}.\frac{1}{(x+1)^2}.\frac{(x+1)}{(x-1)}.\left[\arctan\left(u.\frac{(x+1)}{(x-1)}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{x} + \frac{1}{2.x}.\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Un calcul direct donne enfin : $F'(0) = \int_0^\pi -2.\cos(t).dt = 0$.

f. F est donc constante sur l'intervalle]-1,+1[et comme elle est nulle en 0, elle est nulle sur]-1,+1[.
Finalement :
- $\forall$ x $\in$]-1,+1[, $F(x) = 0$,
- $\forall$ x $\in$ (-∞,-1[$\cup$]1,+∞), $F(x) = 2.\pi.\ln(|x|)$.

27. a. Pour x réel fixé, la fonction de t sous l'intégrale est définie, continue et positive sur]0,$\dfrac{\pi}{2}$].

En 0, on a : $(\sin(t))^x = \exp(x.\ln(\sin(t))) = \exp(x.\ln(t)).\exp(x.\ln(\dfrac{\sin(t)}{t})) \underset{0}{\sim} t^x$.

Donc $I(x)$ est convergente si et seulement si : x > -1, et : D =]-1,+∞).

b. Notons : $\forall$ (x,t) $\in$]-1,+∞)×]0,$\dfrac{\pi}{2}$], $f(x,t) = (\sin(t))^x$.

- $\forall$ x $\in$]-1,+∞), $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur] 0,$\dfrac{\pi}{2}$],
- sur]-1,+∞)×]0,$\dfrac{\pi}{2}$], f admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x et :

  $\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ (x,t) $\in$]-1,+∞)×] 0,$\dfrac{\pi}{2}$], $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t) = (\ln(\sin(t)))^p.(\sin(t))^x$,
- $\forall$ x $\in$]-1,+∞), $\forall$ p $\in$ ℕ, $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, est définie, continue (donc continue par morceaux) sur]0,$\dfrac{\pi}{2}$],
- $\forall$ t $\in$]0,$\dfrac{\pi}{2}$], $\forall$ p $\in$ ℕ, $x \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$, est définie et continue sur]-1,+∞),

- $\forall$ [a,b] $\subset$]-1,+∞), $\forall$ p $\in$ ℕ, $\forall$ $(x,t)\in$ [a,b]×]0,$\frac{\pi}{2}$], $\left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \le (\ln(\sin(t)))^p.(\sin(t))^a = \psi_{a,b,p}(t)$,

et $\psi_{a,b,p}$ est définie, continue (donc par morceaux) et intégrable sur]0,$\frac{\pi}{2}$], car pour : $-1 < c < a$, on a :

$$t^{-c}.(\ln(\sin(t)))^p.(\sin(t))^a \underset{0}{\sim} t^{a-c}.(\ln(\sin(t)))^p = t^{a-c}.(\ln(t)+\ln(\frac{\sin(t)}{t}))^p \underset{0}{\sim} t^{a-c}.(\ln(t))^p,$$

et cette dernière quantité tend vers 0 en 0, du fait du théorème des croissances comparées ($a-c>0$).

Ce résultat montre alors que $\psi_{a,b,p}(t)$ est négligeable devant t^c en 0, fonction intégrable sur]0,$\frac{\pi}{2}$].

On en déduit bien que I est de classe C$^\infty$ sur D.

c. Immédiatement :

- $I(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0.dt = \frac{\pi}{2}$,
- $I(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1.dt = 1$,
- $I(2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2.t)}{2}.dt = \frac{\pi}{4}$,
- $I(3) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t)).(\sin(t)).dt = \left[-\left(\cos(t) - \frac{\cos^3(t)}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$,
- $I(4) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^4.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16}.[2.\cos(4.t) - 4.\cos(2.t) + 6].dt = \frac{3}{8}.\frac{\pi}{2}$.

d. On utilise une intégration par parties et les intégrales qui vont apparaître sont toutes convergentes.

On a donc : $\forall$ x > -1, $I(x+2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{x+2}.dt = [-\cos(t).\sin^{x+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (x+1).\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t).(\sin(t))^x.dt$,

soit : $I(x+2) = (x+1).\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t)).(\sin(t))^x.dt = (x+1).I(x) - (x+1).I(x+2)$,

et finalement : $(x+2).I(x+2) = (x+1).I(x)$.

e. Pour : n $\in$ ℕ*, on a : $(n+2).I(n+2) = (n+1).I(n)$, et donc : $(n+2).I(n+2).I(n+1) = (n+1).I(n).I(n+1)$.

Donc la suite $(n.I(n).I(n-1))$ est constante à la valeur : $1.I(1).I(0) = 1.1.\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Donc : $\forall$ n $\in$ ℕ*, $I(n).I(n-1) = \frac{\pi}{2.n}$.

f. On peut d'abord noter que I est décroissante et positive, puisque :

$\forall$ t $\in$]0,$\frac{\pi}{2}$], $\forall$ $-1 < x < y$, on a : $y.\ln(\sin(t)) \le x.\ln(\sin(t))$, d'où : $0 \le (\sin(t))^y \le (\sin(t))^x$,

et en intégrant : $0 \le I(y) \le I(x)$.

Donc : $\forall$ x > 1, $I(E(x)+1).I(E(x)+2) \le I(E(x)+1)^2 \le I(x)^2 \le I(E(x))^2 \le I(E(x)-1).I(E(x))$.

On en déduit que : $\frac{\pi}{2.(E(x)+2)} \le I(x)^2 \le \frac{\pi}{2.E(x)}$, et le théorème des gendarmes donne : $I(x) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2.x}}$.

Si maintenant on considère : $-1 < x < 0$, alors : $g(x) = I(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x.dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin(t))^x - t^x].dt$.

Or : $\forall$ t $\in$]0,$\frac{\pi}{2}$], $t - \frac{t^3}{6} \le \sin(t)$, et : $0 < 1 - \frac{t^2}{6} \le \frac{\sin(t)}{t} \le 1$, comme le montrent des études de fonctions.

Puis x étant négatif, on en déduit que :

$\forall$ t $\in$]0,$\frac{\pi}{2}$], $1 \le \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^x \le \left(1 - \frac{t^2}{6}\right)^x$, et : $0 \le (\sin(t))^x - t^x \le t^x.\left(\left(1-\frac{t^2}{6}\right)^x - 1\right)$.

Enfin, si on pose : $\forall$ t $\in$ $]0,\frac{\pi}{2}]$, $\theta(t)=\left(1-\frac{t^2}{6}\right)^x-1+\frac{x.t^2}{6}$, on a : $\theta'(t)=\frac{x.t}{3}.\left(1-\left(1-\frac{t^2}{6}\right)^{x-1}\right)\geq 0$.

Donc θ est croissante et étant nulle en 0, elle reste positive.

On a donc : $\left|I(x)-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^x.dt\right|\leq -\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^x.\frac{x.t^2}{6}.dt=-\frac{x}{6}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^{x+2}.dt=-\left[\frac{x}{6}.\frac{t^{x+3}}{x+3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{-x}{6.(x+3)}.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x+3}$,

et cette dernière quantité tend vers une limite finie quand x tend vers -1.

Donc : $\forall\ -1<x<0$, $I(x)=g(x)+\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^x.dt=\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+g(x)=\frac{1}{x+1}.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x+1}+g(x)$.

Soit finalement : $I(x)\underset{-1}{\sim}\frac{1}{x+1}$.

Fonction Γ.

28. a. A partir de la relation : $\forall$ x > 0, $\Gamma(x+1)=x.\Gamma(x)$, et du fait que Γ est continue sur son domaine de définition]0,+∞), on en déduit que : $\lim_{x\to 0}(x.\Gamma(x))=\lim_{x\to 0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1$, donc : $\Gamma(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

b. On va effectuer le changement de variable : $t=u^2$, qui est bien croissant de classe C^1 de]0,+∞) vers]0,+∞), et qui donne donc :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}.e^{-t}.dt=\int_0^{+\infty}\frac{1}{u}.e^{-u^2}.2.u.du=2.\int_0^{+\infty}e^{-u^2}.du=2.\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}.$$

Recherche d'équivalents.

29. a. On note : $\forall\ (x,t)\in\mathbb{R}^{+*}\times[0,\frac{\pi}{2}]$, $f(x,t)=\frac{\cos(t)}{t+x}$.

On constate que :

- $\forall$ x $\in\mathbb{R}^{+*}$, $t\mapsto f(x,t)$, est continue (donc continue par morceaux), intégrable sur le segment $[0,\frac{\pi}{2}]$,
- $\forall$ t $\in$ $[0,\frac{\pi}{2}]$, $x\mapsto f(x,t)$, est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- $\forall$ $[a,b]\subset\mathbb{R}^{+*}$, $\forall\ (x,t)\in[a,b]\times[0,\frac{\pi}{2}]$, $\left|\frac{\cos(t)}{t+x}\right|\leq\frac{1}{a}=\varphi_{a,b}(t)$, et $\varphi_{a,b}$ est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Donc F est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. Pour : x > 0, $G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{t+x}.dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{x}.dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-t}{x.(t+x)}.\cos(t).dt$, et : $|G(x)|\leq\frac{\pi}{2}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{x^2}=\frac{\pi^2}{4.x^2}$

On vient de montrer que : $G(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, en +∞.

Enfin : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{x}.dt=\frac{1}{x}.[\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{x}$, donc : $F(x)=\frac{1}{x}+G(x)=\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$, en +∞.

Soit : $F(x)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$.

c. Puis pour : x > 0, $H(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)}{t+x}.dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{t+x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos(t)-1)}{t+x}.dt$.

On constate alors que : $\forall$ x > 0, $\forall$ t $\in$ $]0,\frac{\pi}{2}]$, $\left|\frac{(\cos(t)-1)}{t+x}-\frac{(\cos(t)-1)}{t}\right|=\frac{x.(1-\cos(t))}{t.(t+x)}\leq\frac{x}{2}$, car :

$\forall$ t > 0, $0 \leq 1-\cos(t) \leq \dfrac{t^2}{2}$, comme le montre une simple étude de fonction.

Donc, les intégrales étant toutes convergentes, on a : $\forall$ x > 0, $\left| H(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(\cos(t)-1)}{t}.dt \right| \leq \dfrac{\pi}{2}.x$, et :

$\lim\limits_{x\to 0} H(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{(\cos(t)-1)}{t}.dt$, qui est une valeur finie, constante et indépendante de x.

Enfin : $\forall$ x > 0, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{dt}{t+x} = [\ln(x+t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln(x+\dfrac{\pi}{2}) - \ln(x)$.

On a donc : $\forall$ x > 0, $F(x) = \ln(x+\dfrac{\pi}{2}) - \ln(x) + H(x)$, et comme le premier et le troisième terme ont une limite finie lorsque x tend vers 0, on conclut que : $F(x) \underset{0}{\sim} -\ln(x)$.