Compléments de calcul intégral (corrigé niveau 1).

Théorème de convergence dominée.

1. a. Les fonctions définies par : ∀ n ≥ 1, ∀ x ∈ [0,1], $u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).\frac{1}{x^3}$, sont continues sur l'intervalle

   [1,+∞) et : ∀ n ≥ 1, ∀ x ≥ 1, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n.x^2} \leq \frac{1}{x^2} = \varphi(x)$.

   De plus la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur [1,+∞) vers la fonction nulle.

   Enfin la fonction φ est définie, continue et intégrable sur [1,+∞).
   Donc le théorème de convergence dominée s'applique et :
   - toutes les intégrales existent (du fait de la majoration des fonctions sur [1,+∞) par φ),
   - $\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).\frac{dx}{x^3} = \int_1^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_n(x).dx = \int_0^{+\infty} 0.dx = 0$.

   b. Les fonctions définies par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ [0,1], $u_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, sont continues sur le segment [0,1] donc les intégrales existent.

   Puis la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur [0,1] vers u, définie par :
   - $u(x) = 1$, si : x ∈ [0,1[,
   - $u(1) = \frac{1}{2}$.

   La fonction limite u est continue par morceaux sur [0,1].

   Enfin : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ [0,1], $|u_n(x)| \leq 1 = \varphi(x)$, et φ est continue donc intégrable sur le segment [0,1].

   Le théorème de convergence dominée s'applique et : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}.dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} u_n(x).dx = \int_0^1 u(x).dx = 1$.

   c. Les fonctions définies par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺, $u_n(x) = \frac{e^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2}$, sont définies et continues sur ℝ⁺.

   Puis la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers la fonction nulle notée u.

   La fonction nulle est continue par morceaux sur ℝ⁺.

   Enfin : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺, $|u_n(x)| \leq \frac{e}{1+x^2} = \varphi(x)$, et φ est continue et intégrable sur ℝ⁺.

   Le théorème de convergence dominée s'applique et :
   - toutes les intégrales existent (du fait de la majoration des fonctions sur ℝ⁺ par φ),
   - $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}}{1+x^2}.dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_n(x).dx = \int_0^{+\infty} u(x).dx = \frac{\pi}{2}$.

   d. Les fonctions définies par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺, $u_n(x) = \frac{1}{x^n + e^x}$, sont définies et continues sur ℝ⁺.

   Puis la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers la fonction u définie par :
   - $u(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, si : x ∈ [0,1[,
   - $u(1) = \frac{1}{1+e}$,
   - $u(x) = 0$, si : x ∈]1,+∞).

   La fonction u est continue par morceaux sur ℝ⁺.

   Enfin : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺, $|u_n(x)| \leq \varphi(x)$, où φ est définie par :
   - $\varphi(x) = 1$, si x ∈ [0,1[,
   - $\varphi(x) = e^{-x}$, si : x ∈ [1,+∞),

et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car elle l'est sur [1,+∞).
Le théorème de convergence dominée s'applique et :

- toutes les intégrales existent (du fait de la majoration des fonctions sur $\mathbb{R}^+$ par φ),
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^n+e^x}.dx=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x).dx=\int_0^{+\infty}u(x).dx=\int_0^1 e^{-x}.dx=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$.

e. Les fonctions définies par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ $\mathbb{R}^+$, $u_n(x)=\frac{x^n}{x^{2.n}+1}$, sont définies et continues sur $\mathbb{R}^+$.

Puis la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction u définie par :

- $u(x)=0$, si : x ∈ [0,1[,
- $u(1)=\frac{1}{2}$,
- $u(x)=0$, si : x ∈]1,+∞), car : $0\le u_n(x)\le\frac{x^n}{x^{2.n}}=\frac{1}{x^n}$.

La fonction u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin : ∀ n ≥ 2, ∀ x ∈ $\mathbb{R}^+$, $|u_n(x)|\le\varphi(x)$, où φ est définie par :

- $\varphi(x)=1$, si x ∈ [0,1[,
- $\varphi(x)=\frac{1}{x^2}$, si : x ∈ [1,+∞),

et φ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car elle l'est sur [1,+∞).
Le théorème de convergence dominée s'applique et :

- toutes les intégrales existent (du fait de la majoration des fonctions sur $\mathbb{R}^+$ par φ), pour : n ≥ 2,
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{x^{2.n}+1}.dx=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x).dx=\int_0^{+\infty}u(x).dx=0$.

f. Les fonctions définies par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ $\mathbb{R}^+$, $u_n(x)=e^{-x^2}.\sin^{2.n}(x)$, sont définies et continues sur $\mathbb{R}^+$.

Puis la suite de fonctions (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction u définie par :

- $u(x)=0$, si : x ∈ $\mathbb{R}^+$, $x\ne\frac{\pi}{2}$ (mod π),
- $u(x)=e^{-x^2}$, si : x ∈ $\mathbb{R}^+$, $x=\frac{\pi}{2}$ (mod π).

La fonction u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ car elle l'est sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$.
Enfin : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ $\mathbb{R}^+$, $|u_n(x)|\le e^{-x^2}=\varphi(x)$, et φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$, car négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en +∞.

Le théorème de convergence dominée s'applique et :

- toutes les intégrales existent (du fait de la majoration des fonctions sur $\mathbb{R}^+$ par φ),
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}.\sin^{2.n}(x).dx=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x).dx=\int_0^{+\infty}u(x).dx=0$, car l'intégrale de u est nulle sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}^+$, puisque u est nulle sur ces segments sauf en un nombre fini de points.

2. a. Tout d'abord : ∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ [0,1], t^n ∈ [0,1].
Donc comme composées, les fonctions définies u_n par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ [0,1], t ↦ $f(t^n)$, sont continues sur [0,1] et les intégrales existent.
b. Toutes les fonctions u_n sont continues sur [0,1],
La suite de fonctions (u_n) converge simplement sur [0,1] vers u définie par :

- $u(t)=f(0)$, si : t ∈ [0,1[,
- $u(1)=f(1)$.

La fonction limite u est continue par morceaux sur [0,1].
Enfin, f étant continue sur [0,1], elle y est bornée par une valeur M d'où :
∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ [0,1], $|u_n(x)|\le M=\varphi(x)$, et φ est continue donc intégrable sur le segment [0,1].

Le théorème de convergence dominée s'applique et : $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n).dt = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} u_n(t).dt = \int_0^1 u(t).dt = f(0)$.

3. Soit : n ≥ 1, et : ∀ x ∈]0,1], $u_n(x) = x^{\alpha-1}.\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$.

   La fonction u_n est définie et continue sur]0,1].

   De plus : $u_n(x) = x^{\alpha-1}.\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}}$, et : 1 – α < 1, donc u_n est intégrable sur]0,1].

   Ensuite, la suite de fonctions converge simplement sur]0,1] vers la fonction u définie par :
   ∀ x ∈]0,1], $u(x) = x^{\alpha-1}.e^{-x}$.

   La fonction limite u est continue par morceaux sur]0,1] et y est intégrable avec le même équivalent en 0 que pour u_n.

   Enfin : ∀ t ∈ [0,1[, $\ln(1-t) \le -t$, donc :

   ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈]0,1[, $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \le -\frac{x}{n}$, d'où : $n.\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) \le -x$, et exp étant croissante : $\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le e^{-x}$.

   On remarque que cette dernière inégalité est encore vérifiée pour : $x = 1$, et finalement :
   ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈]0,1], $u_n(x) \le u(x)$.

   Comme de plus u est continue, intégrable sur]0,1], le théorème de convergence dominée s'applique et :

   $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{\alpha-1}.\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 u_n(x).dx = \int_0^1 u(x).dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}.e^{-x}.dx$.

4. a. Les intégrales n'existent que pour : n ≥ 1.

   Pour : n = 0, l'intégrale vaut : $I_0 = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}.dx$, et : $0 \le \frac{e^{-x}}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$, ce qui prouve la divergence de I_0.

   Si on note : ∀ n ≥ 0, ∀ x ∈ ℝ⁺, $u_n(x) = \frac{e^{-x}}{x+n}$, alors u_n est continue sur ℝ⁺ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ en +∞ donc intégrable sur ℝ⁺.

   b. Puis : ∀ n ≥ 1, $n.I_n = \int_0^{+\infty}\frac{n.e^{-x}}{x+n}.dx$, et si on note : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺, $v_n(x) = n.u_n(x)$, alors :

   - la suite (v_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers v, définie par : ∀ x ∈ ℝ⁺, $v(x) = e^{-x}$,
   - la fonction v est continue sur ℝ⁺,
   - la fonction v majore toutes les fonctions v_n sur ℝ⁺ car : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺, $\left|\frac{n.e^{-x}}{x+n}\right| \le e^{-x}$, et v est continue (donc continue par morceaux) et intégrable sur ℝ⁺.

   On peut donc écrire : $\lim_{n\to+\infty} n.I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} v_n(x).dx = \int_0^{+\infty}(\lim_{n\to+\infty} v_n(x)).dx = \int_0^{+\infty} v(x).dx = 1$.

   Et on conclut que : $I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, ce qui montre au passage que (I_n) tend vers 0.

5. a. Pour n donné, la fonction sous l'intégrale est polynomiale sur le segment, donc l'intégrale I_n existe.

   b. Il suffit de poser, pour : n ≥ 1 :

   - $u_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$, pour : 0 ≤ t ≤ n,
   - $u_n(t) = 0$, pour : n ≤ t.

   La fonction u_n est définie deux fois en n, mais y prend la même valeur.

   On a bien alors : ∀ n ≥ 1, $I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t).dt$.

c. Soit alors : t ∈ ℝ, fixé.

Il existe un rang n_0 tel que : ∀ $n \geq n_0$, t < n (puisque la suite (n) tend vers +∞), et donc :

$$\forall\ n \geq n_0,\ u_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n.\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(n.\left(-\frac{t}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-t + o_{+\infty}(1)),$$

d'où on déduit que la suite $(u_n(t))$ converge vers e^{-t}.

La suite (u_n) converge donc simplement sur ℝ⁺ vers $u : t \mapsto e^{-t}$.

d. On part du résultat classique : ∀ x ∈]-1,+∞), $\ln(1+x) \leq x$, obtenu par exemple par l'étude d'une fonction et de ses variations.

Donc : ∀ t ∈ [0, n[, $-\frac{t}{n} \in$]-1,0], et : $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -\frac{t}{n}$, puis : $n.\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leq -t$, et par croissance de l'exponentielle sur ℝ : $|u_n(t)| = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} = u(t)$.

De plus : ∀ t ∈ [n,+∞), $|u_n(t)| = 0 \leq e^{-t} = u(t)$.

On peut alors utiliser le théorème de convergence dominée car :

- les fonctions u_n sont toutes continues sur ℝ⁺,
- la suite (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers u,
- u est continue par morceaux (et même continue) sur ℝ⁺,
- la fonction u est de plus intégrable sur ℝ⁺ et : ∀ n ∈ ℕ*, ∀ t ∈ ℝ⁺, $|u_n(t)| \leq u(t)$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t).dt = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t).dt = \int_0^{+\infty} u(t).dt = 1$

6. a. On note : ∀ n ≥ 1, ∀ x ≥ 0, $u_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.\frac{1}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$, qui sont continues sur ℝ⁺.

Alors : ∀ n ≥ 2, $|u_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$, et : ∀ x ≥ 0, $u_1(x) = \frac{1}{1+x}.\frac{1}{1+x} = \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$.

Donc toutes les fonctions $|u_n|$ sont majorées par φ sur ℝ⁺.

Les fonctions u_n sont donc intégrables sur ℝ⁺ et les intégrales I_n existent pour tout entier : n ≥ 1.

b. Soit : x ∈ ℝ⁺, fixé.

- si : 0 ≤ x < 1, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 1 = u(x)$, par opérations sur les limites,
- si : x = 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \frac{1}{2} = u(1)$, pour la même raison,
- si : x > 1, ∀ n ≥ 1, $(1+x^n)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}.\ln(1+x^n)\right)$, et : $\frac{1}{n}.\ln(1+x^n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{n} \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$,

  d'où on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0 = u(x)$.

La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement sur ℝ⁺ vers u, définie au-dessus.

De plus la fonction u est continue par morceaux sur ℝ⁺ et la majoration uniforme par φ de (u_n) obtenue dans la question a permet d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t).dt = \int_0^{+\infty} u(t).dt = \int_0^1 dt = 1$, (puisque la valeur en 1 n'a pas d'importance).

Interversion série-intégrale.

7. a. Notons S la fonction sous l'intégrale, soit : ∀ t ∈]0,+∞), $S(t) = \frac{t}{e^t - 1}$.

S est continue sur]0,+∞) et l'intégrale I est deux fois généralisée.

Comme $t^2.S(t)$ tend vers 0 en +∞, I converge en +∞ et : $\lim\limits_{t\to 0} S(t) = 1$, à l'aide d'équivalents, S est prolongeable par continuité en 0 et I converge en 0.

b. On peut écrire par exemple : ∀ t ∈ ℝ+*, $\frac{t}{e^t-1}=\frac{t}{e^t}.\frac{1}{1-e^{-t}}=t.e^{-t}.\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n.t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t.e^{-(n+1).t}$,

car on a pu développer en série géométrique puisque : ∀ t ∈ ℝ+*, $\left|e^{-t}\right|<1$.

c. On peut, pour : n ∈ ℕ, proposer le changement de variable : $u=(n+1).t$, bijectif croissant de ℝ+ dans lui-même et : $J_n=\frac{1}{(n+1)^2}.\int_0^{+\infty}u.e^{-u}.du=\frac{1}{(n+1)^2}.C$, avec : $C=\int_0^{+\infty}u.e^{-u}.du=[(-u-1).e^{-u}]_0^{+\infty}=1$.

d. On constate maintenant que :

- les fonctions u_n définies par : ∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ ℝ+*, $u_n(t)=t.e^{-(n+1).t}$, sont continues sur ℝ+*,
- la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge simplement sur ℝ+* vers S,
- S est définie, continue, intégrable sur ℝ+*,
- la série $\sum_{n\geq}\int_0^{+\infty}\left|u_n\right|$ converge puisque c'est la série $\sum_{n\geq 0}J_n$.

Donc : $I=\int_0^{+\infty}S(t).dt=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t).dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u_n(t).dt=\sum_{n=0}^{+\infty}J_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

8. On raisonne comme dans l'exercice précédent et pour cela, on note : ∀ t ∈]0,+∞), $S(t)=\frac{t^2}{e^t-1}$.

S est continue sur]0,+∞) et l'intégrale I est deux fois généralisée.
Comme $t^2.S(t)$ tend vers 0 en +∞, I converge en +∞ et : $\lim_{t\to 0}S(t)=0$, à l'aide d'équivalents, S est prolongeable par continuité en 0 et I converge en 0.

Puis on peut écrire par exemple : ∀ t ∈ ℝ+*, $\frac{t^2}{e^t-1}=\frac{t^2}{e^t}.\frac{1}{1-e^{-t}}=t^2.e^{-t}.\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n.t}=\sum_{n=0}^{+\infty}t^2.e^{-(n+1).t}$, car on a pu développer en série géométrique puisque : ∀ t ∈ ℝ+*, $\left|e^{-t}\right|<1$.

On pose ensuite : ∀ n ∈ ℕ, $J_n=\int_0^{+\infty}t^2.e^{-(n+1).t}.dt$, et le même changement de variable donne alors :

∀ n ∈ ℕ, $J_n=\frac{1}{(n+1)^3}.\int_0^{+\infty}u^2.e^{-u}.du=\frac{1}{(n+1)^3}.C$, avec : $C=\int_0^{+\infty}u^2.e^{-u}.du=[(-u^2-2.u-2).e^{-u}]_0^{+\infty}=2$.

Les mêmes arguments enfin permettent d'intervertir les symboles $\sum$ et $\int$ et :

$$\int_0^{+\infty}S(t).dt=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(t).dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}u_n(t).dt=\sum_{n=0}^{+\infty}J_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3}=2.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}.$$

9. a. La fonction f_n est définie, continue et positive sur]0,1[.

Notons ensuite g la fonction définie sur]0,1[par : ∀ x ∈]0,1[, $g(x)=\frac{x.\ln(x)}{x^2-1}$.

g est alors définie et continue sur]0,1[et prolongeable par continuité en 0 et en 1 car :

- $\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x.\ln(x)}{x^2-1}=0$ (théorème des croissances comparées) et :
- ∀ x ∈]0,1[, $g(x)=\frac{1}{x+1}.\frac{\ln(x)}{x-1}\xrightarrow[x\to 1]{}\frac{1}{2}.1=\frac{1}{2}$, à l'aide par exemple d'un développement limité.

Donc le prolongement de g à [0,1] est continu sur ce segment et donc y est borné (par M).
On peut alors écrire : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈]0,1[, $\left|f_n(x)\right|\leq M.x^{2.n}\leq M$, et f_n est intégrable sur]0,1[.

b. De la majoration précédente, on déduit que : ∀ n ∈ ℕ, $\left|J_n\right|=\int_0^1\left|f_n(x)\right|.dx\leq\int_0^1 M.x^{2.n}.dx\leq\frac{M}{2.n+1}$,

et on en déduit que la suite (J_n) tend vers 0.

b. Montrer que la suite (J_n) converge et déterminer sa limite.

c. On remarque que : ∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈]0,1[, $f_n(x) = -x^{2.n+1}.\ln(x).\sum_{k=0}^{+\infty}(x^2)^k = -\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2.k+2.n+1}.\ln(x)$.

Notons alors (pour n fixé) : ∀ k ∈ ℕ, ∀ x ∈]0,1[, $u_k(x) = -x^{2.k+2.n+1}.\ln(x)$, et on constate que :

- les fonctions u_k sont définies, continues par morceaux sur]0,1[,
- la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} u_k$ converge simplement sur]0,1[vers f_n,
- f_n est continue par morceaux sur]0,1[.

Enfin, les fonctions u_k sont intégrables sur]0,1[(par prolongement par continuité en 0 et en 1) et :

- ∀ k ∈ ℕ, $\int_0^1 |u_k(x)|.dx = \left[-\frac{x^{2.k+2.n+2}}{2.k+2.n+2}.\ln(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{2.k+2.n+1}}{2.k+2.n+2}.dx = 0 + \left[\frac{x^{2.k+2.n+2}}{(2.k+2.n+2)^2}\right]_0^1$,

soit : $\int_0^1 |u_k(x)|.dx = \frac{1}{(2.k+2.n+2)^2} = \frac{1}{4}.\frac{1}{(k+n+1)^2}$, et la série $\sum_{k\geq 0}\int_0^1 |u_k(x)|.dx$ converge.

Donc on peut intervertir série et intégrale et :

∀ n ∈ ℕ, $J_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 |u_k(x)|.dx = \frac{1}{4}.\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+n+1)^2} = \frac{1}{4}.\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

Fonction intégrale dépendant d'un paramètre sur un intervalle quelconque.

10. a. Pour tout réel : x > 0, la fonction sous l'intégrale est définie, continue sur]0,1[et admet des limites finies (nulles) en 0 et en 1.

Donc F(x) existe pour tout réel : x > 0.

Puis la fonction : $t \mapsto t.(1-t)$, est continue sur le segment [0,1], y est donc bornée (et positive).

De plus elle atteint son maximum en : $t = \frac{1}{2}$, où elle vaut $\frac{1}{4}$.

Donc : ∀ x > 0, $0 \leq f(x) \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{4}\right)^x.dt = \frac{1}{4^x}$.

On en déduit par encadrements que f tend vers 0 en +∞.

b. Pour : (α,β) ∈ ℝ$^{+*}$, on remarque tout d'abord que $F(x)$ existe, pour tout réel : x > 0.

En effet, on a : ∀ t ∈]0,1], $\left|\frac{t^{\alpha.x}.(1-t)^{\beta.x}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$, donc la fonction sous l'intégrale est intégrable sur]0,1].

Soit maintenant (x_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers +∞, et :

∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈]0,1], $u_n(t) = \frac{t^{\alpha.x_n}.(1-t)^{\beta.x_n}}{\sqrt{t}}$.

Alors :

- les fonctions u_n sont toutes définies, continues sur]0,1],
- la suite de fonctions converge simplement sur]0,1] vers la fonction nulle,
- la fonction nulle est continue sur]0,1],
- il existe une fonction φ continue et intégrable sur]0,1], telle que :

  ∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈]0,1], $\left|\frac{t^{\alpha.x_n}.(1-t)^{\beta.x_n}}{\sqrt{t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$.

Donc le théorème de convergence dominée s'applique et :

$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t).dt = \int_0^{+\infty}(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)).dt = \int_0^{+\infty} u(t).dt = 0$.

La caractérisation séquentielle des limites montre alors que : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

11. a. Pour tout x dans ℝ⁺, la fonction : $t \mapsto f(x,t) = \dfrac{1}{1+t^3+x^3}$, est définie, continue sur ℝ⁺ et est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ en +∞, donc l'intégrale définissant $F(x)$ converge, et finalement F est définie sur ℝ⁺.

b. Si on utilise le changement de variable proposé (qui est décroissant et C^1 sur ℝ⁺*), alors :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} = \int_{+\infty}^{0} \frac{-du}{u^2.\left(1+\left(\frac{1}{u}\right)^3\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{u.du}{1+u^3} = \int_0^{+\infty} \frac{t.dt}{1+t^3}.$$

Donc : $2.F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t).dt}{1+t^3} = \int_0^{+\infty} \frac{t.dt}{t^2-t+1} = \left[\frac{2}{\sqrt{3}}.\arctan\left(\frac{2.x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{4.\pi}{3.\sqrt{3}}$, et : $F(0) = \frac{2.\pi}{3.\sqrt{3}}$.

c. La décroissance de F sur ℝ⁺ est immédiate car :

$\forall (x,y) \in$ ℝ⁺², $(x \le y) \Rightarrow (\forall$ t ∈ ℝ⁺, $\frac{1}{1+t^3+x^3} \ge \frac{1}{1+t^3+y^3}$), et puisque les intégrales convergent, on en déduit que : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3+x^3} \ge \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3+y^3} = F(y)$.

Puis :

- ∀ x ∈ ℝ⁺, $t \mapsto f(x,t)$, est continue par morceaux sur ℝ⁺,
- ∀ t ∈ ℝ⁺, $x \mapsto f(x,t)$, est continue sur ℝ⁺,
- il existe une fonction majorante φ continue et intégrable sur ℝ⁺, telle que :

$\forall (x,t) \in$ ℝ⁺×ℝ⁺, $|f(x,t)| = \frac{1}{1+t^3+x^3} \le \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$.

Donc F est continue sur ℝ⁺.

d. Soit enfin (x_n) une suite de réels positifs qui converge vers +∞.

On note : ∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ ℝ⁺, $u_n(t) = \frac{1}{1+t^3+x_n^3}$.

Alors :

- toutes les fonctions u_n sont continues sur ℝ⁺,
- la suite (u_n) converge simplement sur ℝ⁺ vers la fonction nulle,
- la fonction nulle est continue sur ℝ⁺,
- il existe une fonction φ continue et intégrable sur ℝ⁺, telle que :

∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ ℝ⁺, $|u_n(t)| \le \frac{1}{1+t^3} = \varphi(t)$.

Donc le théorème de convergence dominée s'applique et : $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \int_0^{+\infty} (\lim_{n\to+\infty} u_n(t)).dt = 0$ ..

Enfin, la caractérisation séquentielle des limites montre que : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

12. a. Si on note : ∀ x ∈ ℝ, ∀ t ∈ ℝ⁺*, $f(x,t) = \frac{1}{1+t^2+t^x.e^{-t}}$, alors pour x réel fixé, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue et positive sur]0,+∞), et : $0 \le f(x,t) \le \frac{1}{1+t^2}$.

Donc pour tout réel x, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est intégrable sur ℝ⁺* et F est définie sur ℝ.

b. Soit (x_n) une suite de réels qui converge vers +∞, et : ∀ n ∈ ℕ, ∀ t ∈ ℝ⁺*, $u_n(t) = \frac{1}{1+t^2+t^{x_n}.e^{-t}}$.

Alors :

- toutes les fonctions u_n sont continues sur ℝ⁺*,
- la suite (u_n) converge simplement sur ℝ⁺*, car :

pour : 0 < t < 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n(t) = \dfrac{1}{1+t^2} = u(t)$, puisque : $t^{x_n} = \exp(x_n.\ln(t)) \xrightarrow[+\infty]{} 0$,

pour : t = 1, $\lim_{n\to+\infty} u_n(1) = \dfrac{1}{2+e^{-1}} = u(1)$,

pour : 1 < t, $\lim_{n\to+\infty} u_n(t) = 0 = u(t)$, puisque : $t^{x_n} = \exp(x_n.\ln(t)) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$,

- la fonction u est continue par morceaux sur ℝ⁺*,
- il existe une fonction φ continue et intégrable sur ℝ⁺*, telle que :

$\forall$ n ∈ ℕ, $\forall$ t ∈ ℝ⁺*, $|u_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \int_0^{+\infty} (\lim_{n\to+\infty} u_n(t)).dt = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}$.

On conclut, par caractérisation séquentielle de la limite, que : $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

13. a. Notons tout d'abord : $\forall$ (x,t) ∈ ℝ×]0,1[, $f(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}$.

Pour x fixé réel, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue sur]0,1[, et elle est positive pour : x > 0, négative sinon.

Puis, au voisinage de : t = 1, on peut écrire : $t = 1+h$, et :

$f(x,t) = \dfrac{t^x - 1}{\ln(t)} = \dfrac{(1+h)^x - 1}{\ln(1+h)} = \dfrac{x.h + o_0(h)}{x + o_0(h)} = x + o_{t\to1}(1)$, et la fonction tend vers x quand t tend vers 1.

Donc l'intégrale définissant $F(x)$ est toujours convergente en 1.

Enfin, :

- si : x > 0, $\dfrac{t^x - 1}{\ln(t)} \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{-1}{\ln(t)}$, et : $t^{\frac{1}{2}}.\left|\dfrac{-1}{\ln(t)}\right| = \dfrac{\sqrt{t}}{|\ln(t)|}$, tend vers 0 quant t tend vers 0, et la fonction sous

l'intégrale $F(x)$ converge en 0,

- si : x = 0, $F(x)$ est nul (intégrale convergente de la fonction nulle),
- si : x < 0, $\left|\dfrac{t^x - 1}{\ln(t)}\right| \underset{t\to0}{\sim} \dfrac{t^x}{|\ln(t)|} = \dfrac{1}{t^{-x}.|\ln(t)|}$, et la fonction obtenue est intégrable sur $]0,\dfrac{1}{2}]$ si et seulement

si : $-x < 1$, soit : $x > -1$.

En effet, si : $x = -1$, une primitive de la fonction ($\ln(\ln(t))$) montre qu'elle n'est pas intégrable sur l'intervalle, donc pas non plus pour : $x < -1$, par minoration de fonctions à valeurs positives, et pour :

$x > -1$, on peut trouver : $-1 < c < x$, tel que $t^c.\dfrac{1}{t^{-x}.|\ln(t)|}$ tend vers 0 quand t tend vers 0.

Finalement : $\mathscr{D}_F$ =]-1,+∞).

b. On sait maintenant que :

- $\forall$ x ∈]-1,+∞), $t \mapsto f(x,t)$, est continue par morceaux, intégrable sur]0,1[,

Puis :

- f admet sur]-1,+∞)×]0,1[une dérivée partielle qui vaut : $\forall$ (x,t) ∈]-1,+∞)×]0,1[, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^x$,
- $\forall$ x ∈]-1,+∞), $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue sur]0,1[,
- $\forall$ t ∈]0,1[, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue sur]-1,+∞),
- pour tout segment : [a,b] ⊂]-1,+∞), on a : $\forall$ (x,t) ∈ [a,b]×]0,1[, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = t^x \leq t^a = \psi_{a,b}(t)$,

et $\psi_{a,b}$ est continue et intégrable sur]0,1[puisque : $-1 < a$.

Donc F est de classe C^1 et : $\forall$ x > -1, $F'(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt=\int_0^1 t^x.dt=\frac{1}{x+1}$.

c. On en déduit que : $\forall$ C $\in$ ℝ, $\forall$ x > -1, $F(x)=\ln(x+1)+C$.

Comme enfin, on a : $F(0)=0$, on conclut que : $\forall$ x > -1, $F(x)=\ln(x+1)$.

14. a. Pour : x > 0, la fonction sous l'intégrale est toujours définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc sur [0,x] et $F(x)$ existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

On peut ensuite opérer le changement de variable : $u=x+t$, qui permet de traiter les questions a et b.

On peut aussi utiliser le changement de variable : $t=u.x$, suggéré qui donne :

$\forall$ x > 0, $F(x)=\int_0^1 \frac{\sin(u.x)}{1+u}.du$.

On note alors : $\forall$ $(x,u)\in \mathbb{R}^{+*}\times[0,1]$, $f(x,u)=\frac{\sin(u.x)}{1+u}$, et :

- $\forall$ u $\in$ [0,1], $x\mapsto f(x,u)$,est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$,
- $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, $u\mapsto f(x,u)$, est continue sur [0,1],
- $\forall$ $(x,u)\in \mathbb{R}^{+*}\times[0,1]$, $|f(x,u)|\le \frac{1}{1+u}\le 1=\varphi(u)$,

et la fonction φ est définie, continue donc intégrable sur le segment [0,1].

Donc F est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b. On sait que : $\forall$ t $\in$ $\mathbb{R}^+$, $|\sin(t)|\le t$, donc : $\forall$ x $\in$ $\mathbb{R}^{+*}$, $|F(x)|\le \int_0^1 \frac{u.x}{1+u}.du\le x.\int_0^1 1.du=x$, et : $\lim_{x\to 0}F(x)=0$.

D'autre part : $\forall$ x > 0, $F(x)=\left[\frac{-\cos(u.x)}{x}.\frac{1}{1+u}\right]_0^1-\frac{1}{x}.\int_0^1 \frac{\cos(u.x)}{(1+u)^2}.du=\frac{1}{x}.\left(1-\frac{\cos(x)}{2}-\int_0^1 \frac{\cos(u.x)}{(1+u)^2}.du\right)$.

Et comme : $\left|\int_0^1 \frac{\cos(u.x)}{(1+u)^2}.du\right|\le \int_0^1\left|\frac{\cos(u.x)}{(1+u)^2}\right|.du\le \int_0^1 1.du\le 1$, donc est borné, on conclut que : $\lim_{x\to+\infty}F(x)=0$.

15. a. Notons : $\forall$ $(x,t)\in \mathbb{R}\times[0,1]$, $f(x,t)=\frac{e^{-x^2.(1+t^2)}}{1+t^2}$.

Alors pour tout réel x fixé, $t\mapsto f(x,t)$, est définie, continue sur [0,1], et $F(x)$ existe.

De plus : $\forall$ x $\in$ ℝ, $F(-x)=F(x)$, et F est paire.

b. On constate ensuite que :

- $\forall$ x $\in$ ℝ, $t\mapsto f(x,t)$, est continue donc intégrable sur le segment [0,1],
- f admet sur ℝ×[0,1] une dérivée partielle qui vaut : $\forall$ $(x,t)\in \mathbb{R}\times[0,1]$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-2.x.e^{-x^2.(1+t^2)}$,
- $\forall$ x $\in$ ℝ, $t\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue sur [0,1],
- $\forall$ t $\in$ [0,1], $x\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$, est continue sur ℝ,
- pour tout segment : [-a,+a] $\subset$ ℝ, on a : $\forall$ $(x,t)\in$ [-a,+a]×[0,1], $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le 2.a=\varphi_a(t)$,

et φ_a est continue donc intégrable sur [0,1].

Donc F est de classe C^1 sur ℝ, et : $\forall$ x $\in$ ℝ, $F'(x)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).dt=-2.x.e^{-x^2}.\int_0^1 e^{-x^2.t^2}.dt$.

c. Puis, pour : x ≠ 0, on peut utiliser le changement de variable : $u=x.t$, et : $F'(x)=-2.e^{-x^2}.\int_0^x e^{-u^2}.du$.

De plus, pour : x = 0, l'égalité qu'on a obtenue à la ligne précédente est encore valable.

Or on reconnaît dans l'expression précédente, la dérivée de : x $\mapsto$ $-\left(\int_0^x e^{-u^2}.du\right)^2$.

Donc : ∃ K ∈ ℝ, ∀ x ∈ ℝ, $F(x) = K - \left(\int_0^x e^{-u^2}.du\right)^2$.

d. On évalue alors l'égalité pour : x = 0, et : $F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} = K - \left(\int_0^0 e^{-u^2}.du\right)^2 = K$.

e. Enfin : ∀ x ∈ ℝ, $0 \le F(x) = e^{-x^2}.\int_0^1 \frac{e^{-x^2.t^2}}{1+t^2}.dt \le e^{-x^2}.\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.e^{-x^2}$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

On en déduit que : ∀ x ∈ ℝ⁺, $0 \le \int_0^x e^{-u^2}.du = \sqrt{K - F(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4} - F(x)}$, et finalement :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}.du = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-u^2}.du = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

16. Notons tout d'abord : ∀ (x,t) ∈]0+∞)×]0,1], $f(x,t) = \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}}$.

Pour x fixé dans ℝ⁺*, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue et positive sur]0,1].

De plus : $\frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$, et comme : $1 - x < 1$, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est intégrable sur]0,1] par comparaison de fonctions à valeurs positives.

Donc ϕ est définie sur ℝ⁺* (l'équivalent précédent montre que $\phi(x)$ existe si et seulement si : $x > 0$).

De plus, f admet sur]0,+∞)×]0,1] des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x qui valent :

∀ n ∈ ℕ*, ∀ (x,t) ∈]0,+∞)×]0,1], $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = (\ln(t))^n.f(x,t) = (\ln(t))^n.\frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}}$.

Et on constate alors que :

- ∀ n ∈ ℕ*, ∀ x ∈]0,+∞), $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$, est continue sur]0,1],
- ∀ n ∈ ℕ*, ∀ t ∈]0,1], $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$, est continue sur]0,+∞),
- ∀ [a,b] ⊂]0,+∞), on a : ∀ (x,t) ∈ [a,b]×]0,1], $\left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \le t^{x-1}.(\ln(t))^n \le t^{a-1}.(\ln(t))^n = \psi_{a,b,n}(t)$,
- pour : $0 < c < a$, $t^{1-c}.\psi_{a,b,n}(t) = t^{a-c}.(\ln(t))^n \xrightarrow[0]{} 0$, avec le théorème des croissances comparées et le fait que : $a - c > 0$,

donc : $\psi_{a,b,n}(t) = o_0\left(\frac{1}{t^{1-c}}\right)$, et puisque : $1 - c < 1$, on en déduit que la fonction $\psi_{a,b,n}$ est définie, continue intégrable sur]0,1].

Donc la fonction ϕ est de classe C^n pour tout entier n sur]0,+∞), et :

∀ n ∈ ℕ, ∀ x ∈ ℝ⁺*, $\phi^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t).dt = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{\sqrt{1+t}}.(\ln(t))^n\,dt$.

17. a. Pour : x ∈ ℝ, on a : ∀ t ∈ ℝ, $\left|e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.i.\pi.x.t}\right| = e^{-\pi.\omega.t^2}$, et : $t^2.e^{-\pi.\omega.t^2} \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$, car : ω > 0.

Donc : $e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.i.\pi.x.t} = o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, ce qui garantit l'intégrabilité de la fonction sur ℝ et l'existence de $f(x)$, pour tout réel x.

b. On note ensuite : ∀ (x,t) ∈ ℝ², $h(x,t) = e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.i.\pi.x.t}$, et on constate de plus que :

- h admet une dérivée partielle par rapport à x sur ℝ² et : ∀ (x,t) ∈ ℝ², $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -2.i.\pi.t.h(x,t)$.
- ∀ x ∈ ℝ, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$, est continue par morceaux sur ℝ,

• $\forall$ t $\in$ ℝ, $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$, est continue sur ℝ,

• $\forall$ $(x,t) \in$ ℝ², $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = 2.\pi.|t|.|h(x,t)| = 2.\pi.|t|.e^{-\pi.\omega.t^2} = \psi(t)$,

et ψ est définie, continue et intégrable sur ℝ (comme $o_{\pm\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$).

Donc f est de classe C¹ sur ℝ, et : $\forall$ x $\in$ ℝ, $f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t).dt = -2.i.\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t.e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.\mathrm{i}.\pi.x.t}.dt$.

On réalise alors une intégration par parties (la partie intégrée a des limites finies nulles en ±∞) et :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $f'(x) = \left[\dfrac{i}{\omega}.e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.\mathrm{i}.\pi.x.t}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \dfrac{i}{\omega}.2.i.\pi.x.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi.\omega.t^2}.e^{-2.\mathrm{i}.\pi.x.t}.dt = 0 - \dfrac{2.\pi.x}{\omega}.f(x)$,

et f est solution de l'équation différentielle : $y' + \dfrac{2.\pi.x}{\omega}.y = 0$.

c. Les solutions de cette équation différentielle sont : $\forall$ x $\in$ ℝ, $y(x) = C.e^{-\frac{\pi.x^2}{\omega}}$, avec : $C \in$ ℝ.

On déterminer C avec : $f(0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi.\omega.t^2}.dt = \dfrac{1}{\sqrt{\pi.\omega}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}.du = \dfrac{1}{\sqrt{\omega}}$, et finalement :

$\forall$ x $\in$ ℝ, $y(x) = \dfrac{e^{-\frac{\pi.x^2}{\omega}}}{\sqrt{\omega}}$.

Fonction Γ.

18\. a. Notons : $\forall$ $(x,t) \in$ ℝ×ℝ⁺*, $f(x,t) = t^{x-1}.e^{-t}$.

Pour tout réel x, la fonction : $t \mapsto f(x,t)$, est définie, continue sur ℝ⁺* et l'intégrale $\Gamma(x)$ est généralisée en ses deux bornes.

• en +∞ : $t^2.f(x,t) = t^{x+1}.e^{-t}$, tend vers 0 et l'intégrale Γ(x) converge en +∞,

• en 0 : $f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$, et les fonctions étant positives, l'intégrale converge si et seulement si :

$1 - x < 1$, ou encore : $0 < x$.

Donc Γ est définie sur]0,+∞).

b. On constate tout d'abord que f admet des dérivées partielles à tout ordre par rapport à x et :

$\forall$ n $\in$ ℕ, $\forall$ $(x,t) \in$ ℝ×ℝ⁺*, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = t^{x-1}.e^{-t}.(\ln(t))^n$.

Puis soit : [a,b] ⊂ ℝ⁺*.

On constate que :

• $\forall$ x $\in$ ℝ⁺*, $t \mapsto f(x,t)$, est continue et intégrable sur ℝ⁺*,

• $\forall$ x $\in$ ℝ⁺*, $\forall$ n $\in$ ℕ, $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$, est continue sur ℝ⁺*,

• $\forall$ t $\in$ ℝ⁺*, $\forall$ n $\in$ ℕ, $x \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$, et continue sur ℝ⁺*,

• $\forall$ x $\in$ [a,b],

$\forall$ t $\in$]0,1], $(a \le x \le b) \Rightarrow ((b-1).\ln(t) \le (x-1).\ln(t) \le (a-1).\ln(t)) \Rightarrow (t^{x-1}.e^{-t} \le t^{a-1}.e^{-t})$,

et : $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \le t^{a-1}.e^{-t}.|\ln(t)|^n = \varphi_{a,b,n}(t)$,

$\forall$ t $\in$ [1,+∞), $(a \le x \le b) \Rightarrow ((a-1).\ln(t) \le (x-1).\ln(t) \le (b-1).\ln(t)) \Rightarrow (t^{x-1}.e^{-t} \le t^{b-1}.e^{-t})$,

et : $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| \le t^{b-1}.e^{-t}.|\ln(t)|^n = \varphi_{a,b,n}(t)$.

Pour tout entier n, on a donc une fonction majorante $\varphi_{a,b,n}$ de la dérivée partielle n$^{\text{ème}}$ de f, définie par morceaux, (deux fois mais avec la même valeur en : t = 1).
Ces fonctions sont continues (elles se recollent bien en : t = 1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
De plus on constate que :
∀ n ∈ ℕ,

• en +∞, $t^2.\varphi_{a,b,n}(t) = t^{b+2}.e^{-t}.\dfrac{|\ln(t)|^n}{t}$, qui tend vers 0 en +∞ (théorème des croissances comparées),

• en 0, on choisit : $1-a<c<1$, et : $\varphi_{a,b,n}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^{a-1}.|\ln(t)|^n = \dfrac{1}{t^{1-a}}.|\ln(t)|^n = \dfrac{1}{t^c}.\left[t^{c-(1-a)}.|\ln(t)|^n\right] = o_0\left(\dfrac{1}{t^c}\right)$,

car l'exposant dans le crochet est : $c-(1-a)>0$, et ce crochet tend bien vers 0 en 0,

donc ces fonctions $\varphi_{a,b,n}$ sont toutes intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc Γ est de classe C$^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, et : ∀ x ∈ $\mathbb{R}^{+*}$, $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty}\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t).dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.(\ln(t))^n.dt$.

c. On raisonne, pour : x > 0, avec une intégrale sur [α,β] et : $\int_\alpha^\beta t^x.e^{-t}.dt = [-t^x.e^{-t}]_\alpha^\beta + x.\int_\alpha^\beta t^{x-1}.e^{-t}.dt$.

Si alors on fait tendre α vers 0 et β vers +∞, on obtient : $\Gamma(x+1) = 0 + x.\Gamma(x) = x.\Gamma(x)$.

Puisque de plus : $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}.dt = 1$, il est immédiat par récurrence que : ∀ n ∈ ℕ, $\Gamma(n+1) = n!$.

d. On connaît la dérivée seconde de Γ qui vaut : ∀ x > 0, $\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}.e^{-t}.(\ln(t))^2.dt > 0$.

Donc Γ est bien convexe, puisqu'à dérivée seconde positive sur son intervalle de définition.
De plus on a bien la stricte positivité de Γ'' puisque la fonction sous l'intégrale est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, positive et non nulle en au moins un point (en : t = 2).
Γ' est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Mais de plus : $\Gamma(2) = 1! = 1 = \Gamma(1)$, donc le théorème de Rolle garantit que Γ' s'annule en une valeur x_0 entre 1 et 2.
Finalement Γ' est strictement négative sur]0, x_0 [(où Γ y est strictement décroissante) et strictement positive sur] x_0 ,+∞) (où Γ est strictement croissante).
On termine avec :

• $\Gamma(x) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\Gamma(1)}{x} = \dfrac{1}{x}$, car Γ est continue en 1, et Γ tend vers +∞ en 0,

• Γ est croissante sur [2,+∞) donc a une limite finie ou infinie en +∞, et comme la suite ($\Gamma(n)$) tend vers +∞, on en déduit que la fonction Γ tend vers +∞ en +∞.

Enfin, on peut proposer le graphe de la fonction Γ :