Annexe 1 : Relations de comparaison

Sauf précision, les suites et fonctions considérées ici sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Le cas des suites

Définition – Relations de négligeabilité et de domination

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \neq 0$.

• On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) (ou que (v_n) est **prépondérante** devant (u_n)) si

$$\frac{u_n}{v_n} \to 0,$$

ce quotient étant bien défini pour $n \geqslant N$.

Ceci équivaut à chacune des propriétés suivantes (que l'on peut prendre comme définition dans le cas plus général où v_n peut s'annuler pour des valeurs de n arbitrairement grandes) :

- Il existe une suite (ε_n) qui converge vers 0 telle que, pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n = \varepsilon_n v_n.$$

- $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \geqslant N;\ \forall\, n \geqslant n_0, \quad |u_n| \leqslant \varepsilon |v_n|.$

On écrit alors $u_n = o(v_n)$ (se lit « u_n est un petit o de v_n »).

• On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) (ou que (v_n) **domine** (u_n)) si la suite

$$\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geqslant N}$$

est bornée.

Ceci équivaut à l'existence d'un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n| \leqslant M\,|v_n|.$$

On peut prendre cette propriété comme définition dans le cas plus général où v_n peut s'annuler pour des valeurs de n arbitrairement grandes.

On écrit alors $u_n = O(v_n)$ (se lit « u_n est un grand O de v_n »).

Exemple – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^2}$. Alors $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Remarques

• Si (u_n) est négligeable devant (v_n), alors elle est dominée par (v_n).

• $u_n = o(1)$ signifie que (u_n) converge vers 0, $u_n = O(1)$ signifie que (u_n) est bornée.

Propriété

Une suite bornée est négligeable devant une suite (v_n) vérifiant $|v_n| \to +\infty$.
En particulier, une suite convergente est négligeable devant une suite (v_n) vérifiant $|v_n| \to +\infty$.

▶ Opérations sur les « o » et les « O »

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites d'éléments de $\mathbb{K}$.

- **Transitivité :** $\left\{\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right. \Rightarrow u_n = o(w_n)$.
- **Produit par un scalaire :** Si $u_n = o(v_n)$, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $u_n = o(\lambda v_n)$.
- **Somme :** $\left\{\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right. \Rightarrow u_n + v_n = o(w_n)$.
- **Produit :** $\left\{\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(t_n) \end{array}\right. \Rightarrow u_n v_n = o(w_n t_n)$.
- **Puissance :** Si $k > 0$ et si (u_n) et (v_n) sont à termes réels strictement positifs, alors

$$u_n = o(v_n) \quad \Rightarrow \quad u_n^k = o(v_n^k).$$

Tous ces résultats sont vrais en remplaçant « o » par « O ».

▶ Croissances comparées classiques

- Si $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha < \beta$, alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Si $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $|a| < |b|$, alors $a^n = o(b^n)$.
- Si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$.
- Si $a \in \mathbb{C}$ vérifie $|a| > 1$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$, $\quad n^\alpha = o(a^n), \quad a^n = o(n!)$.
- Si $a \in \mathbb{C}$ vérifie $|a| < 1$ et si $\alpha \in \mathbb{C}$, $a^n = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.
- $n! = o(n^n)$.

Définition – Relation d'équivalence

Soient (u_n) et (v_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \neq 0$.
On dit que (u_n) est **équivalente** à (v_n) si

$$\frac{u_n}{v_n} \to 1,$$

ce quotient étant bien défini pour $n \geqslant N$.
Ceci équivaut à l'existence d'une suite (ε_n) qui converge vers 0 telle que, pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n.$$

On peut prendre cette propriété comme définition dans le cas plus général où v_n peut s'annuler pour des valeurs de n arbitrairement grandes.

On écrit alors $u_n \sim v_n$ (se lit « u_n est équivalent à v_n »).

Remarques

- $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n) \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors pour tout n assez grand, $u_n \neq 0$ et

$$\frac{v_n}{u_n} \to 1.$$

On en déduit que $u_n \sim v_n \Leftrightarrow v_n \sim u_n$. On peut donc dire que (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

Exemples

- Tout polynôme en n est équivalent à son terme de plus haut degré.
- Toute fraction rationnelle en n est équivalente au quotient des termes de plus haut degré.

Propriété – Signe de deux suites équivalentes

Si (u_n) et (v_n) sont à termes réels, si $u_n \sim v_n$ et si les termes de l'une des deux suites sont strictement positifs à partir d'un certain rang, alors il en est de même pour l'autre (de même pour un signe strictement négatif).

Propriété

Si $\ell \neq 0$, alors $u_n \to \ell$ si et seulement si $u_n \sim \ell$.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites équivalentes, alors :

- (u_n) et (v_n) sont de même nature (convergente ou divergente).
- Si $u_n \to \ell \in \mathbb{K}$, alors $v_n \to \ell$.
- Si (u_n) et (v_n) sont à termes réels, et si $u_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$) alors $v_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$).

Attention ! En revanche, $\lim u_n = \lim v_n \not\Rightarrow u_n \sim v_n$. Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ et $v_n = n^2$, alors $u_n \to +\infty$, $v_n \to +\infty$ mais u_n n'est pas équivalent à v_n.

▶ Équivalents classiques

- Si $u_n \to 0$, alors :

$$\begin{array}{ll}
\ln(1+u_n) \sim u_n & e^{u_n} - 1 \sim u_n \\[2ex]
(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, u_n \quad (\alpha \in \mathbb{R}) & \sin(u_n) \sim u_n \\[2ex]
\cos(u_n) - 1 \sim -\dfrac{u_n^2}{2} & \tan(u_n) \sim u_n.
\end{array}$$

- Si $P(x) = a_p x^p + \cdots + a_q x^q$, (avec $p \geqslant q$, $a_p \neq 0$, $a_q \neq 0$), alors :
  - si $u_n \to 0$, $P(u_n) \sim a_q u_n^q$;
  - si $u_n \to +\infty$ (ou $-\infty$), $P(u_n) \sim a_p u_n^p$.

▶ **Opérations sur les équivalents**

• **Transitivité :** $\left\{\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{array}\right. \Rightarrow u_n \sim w_n.$

• **Produit :** $\left\{\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ v_n \sim t_n \end{array}\right. \Rightarrow u_n v_n \sim w_n t_n.$

• **Inverse :** $u_n \sim v_n \Rightarrow \dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}.$

• **Quotient :** $\left\{\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ v_n \sim t_n \end{array}\right. \Rightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{w_n}{t_n}.$

• **Valeur absolue ou module :** $u_n \sim v_n \Rightarrow |u_n| \sim |v_n|.$

• **Puissance :** Si $k \in \mathbb{R}$ et si (u_n) et (v_n) sont à termes réels strictement positifs, alors

$$u_n \sim v_n \Rightarrow (u_n)^k \sim (v_n)^k.$$

Remarque – La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

▶ **Opérations à ne pas faire en général sur les équivalents**

• **La somme** : on peut multiplier et diviser les équivalents, mais pas les sommer.

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \sim w_n \\ v_n \sim t_n \end{array}\right. \not\Rightarrow u_n + v_n \sim w_n + t_n. \quad \text{Par exemple, on a } \left\{\begin{array}{l} n^2 + n \sim n^2 \\ -n^2 \sim -n^2 \end{array}\right., \text{ mais } n \not\sim 0.$$

• **La composition** : en général, on ne peut pas composer un équivalent par une fonction.

$$u_n \sim v_n \not\Rightarrow f(u_n) \sim f(v_n). \quad \text{Par exemple, on a } n^2 + n \sim n^2, \text{ mais } e^{n^2+n} \not\sim e^{n^2}.$$

En dehors du cas de l'élévation à une puissance, il existe toutefois un cas où la composition est possible, mais à démontrer à chaque usage, car il ne figure pas au programme :

Propriété (Hors-programme)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs telles que $u_n \sim v_n$ et

$$u_n \to \left\{\begin{array}{l} \ell \quad (\text{avec } \ell > 0 \text{ et } \ell \neq 1) \\ \text{ou} \\ +\infty \end{array}\right.$$

Alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Contre-exemple si $u_n \to 1$: considérer $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{1}{2n}$.

II. Le cas des fonctions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et a adhérent à I, avec éventuellement $a = \pm\infty$.

Définition – Relations de comparaison pour les fonctions

Soient f et g deux applications définies sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$, on ait $g(x) \neq 0$.

• On dit que f est **négligeable** devant g (ou que g est **prépondérante** devant g) en a si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 0,$$

ce quotient étant bien défini pour $x \in I \setminus \{a\}$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$.

On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ (se lit « $f(x)$ est un petit o de $g(x)$ lorsque x tend vers a »).

• On dit que f est **dominée** par g (ou que g **domine** f) s'il existe $\delta \in]0, \eta]$ tel que la fonction $\dfrac{f}{g}$ soit bornée sur $\{x \in I \setminus \{a\};\ |x - a| \leqslant \delta\}$.

On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ (se lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ lorsque x tend vers a »).

• On dit que f est **équivalente** à g en a si

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} 1,$$

On écrit alors $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ (se lit « $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ lorsque x tend vers a »).

On établira aisément les propriétés et opérations possibles et impossibles sur les relations de comparaison.