Algèbre linéaire (corrigé niveau 2).

Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, familles libres et génératrices, dimension.

59. Tout d'abord : $F_0 = Vect(\sin)$, et la fonction sinus n'étant pas nulle, on a : $\dim(F_0) = 1$, et $\sin$ constitue une base de F_0.
Puis : $F_1 = Vect(f_0, f_1)$.
Or : $\forall\ (\lambda_0, \lambda_1) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda_0.f_0 + \lambda_1.f_1 = 0) \Rightarrow (\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lambda_0.\sin(x) + \lambda_1.\sin(x+1) = 0)$.
En particulier, pour : $x = 0$, on obtient : $\lambda_1.\sin(1) = 0$, d'où : $\lambda_1 = 0$, puisque : $\sin(1) \neq 0$.
Et sinus n'étant pas la fonction nulle, on en déduit : $\lambda_0 = 0$.
Donc (f_0, f_1) constitue une base de F_1, et : $\dim(F_1) = 2$.
Soit maintenant : $n \geq 2$.
On constate que : $\forall\ 0 \leq k \leq n$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+k) = \cos(k).\sin(x) + \sin(k).\cos(x)$, et :
$f_k \in Vect(\sin, \cos)$.
D'où : $F_1 = Vect(f_0, f_1) \subset Vect(f_0, ..., f_n) = F_n \subset Vect(\sin, \cos)$, par stabilité par combinaison linéaire.
Et donc : $\dim(F_1) = 2 \leq \dim(F_n) \leq \dim(Vect(\sin, \cos)) \leq 2$.
On en déduit que toutes les inégalités sont des égalités : $\dim(F_1) = \dim(F_n) = \dim(Vect(\sin, \cos)) = 2$,
et que : $F_1 = F_n = Vect(\sin, \cos)$.
En prime, $(\sin, \cos)$ est une base de $Vect(\sin, \cos)$ (puisque génératrice et de cardinal 2), ce qu'on pouvait bien sûr montrer à la main, et de plus c'est aussi une base de F_n.

60. L'idée est de voir quelles relations existent entre ces fonctions.
On peut tout d'abord constater que :
$\forall\ x \in\ ]-1,1[$, $f_1(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = f_3(x) - f_4(x) = (f_3 - f_4)(x)$, soit : $f_1 = f_3 - f_4$.
Donc : $F = Vect(f_1, f_2, f_3, f_4) \subset Vect(f_2, f_3, f_4)$.
De même : $\forall\ x \in\ ]-1,+1[$, $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (f_3 + f_4)(x)$, soit : $f_2 = f_3 + f_4$, et :
$F \subset Vect(f_3, f_4)$.
Mais comme par ailleurs on a évidemment : $Vect(f_3, f_4) \subset Vect(f_1, f_2, f_3, f_4) = F$, finalement :
$F = Vect(f_3, f_4)$.
Enfin, la famille (f_3, f_4) est libre car :
$\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $(\alpha.f_3 + \beta.f_4 = 0) \Rightarrow (\forall\ x \in\ ]-1,+1[,\ \alpha.f_3(x) + \beta.f_4(x) = 0)$.
On en déduit que : $\alpha = 0$, avec : $x = 0$, puis : $\beta = 0$, car : $f_4 \neq 0$.
Donc la famille (f_3, f_4) est une base de F qui est donc de dimension 2.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes.

61. Notons : $G = Vect(\sin, \cos)$, $H = \{ f \in E,\ f(0) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f(\pi) \}$.
Montrons alors que : $\forall\ f \in E$, $\exists!\ (\alpha, \beta, h) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times H$, $f = \alpha.\sin + \beta.\cos + h$ h.
Soit donc : $f \in E$.
Si une telle décomposition existe, alors :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha.\sin(x) + \beta.\cos(x) + h(x)$, et :
$f(0) = \alpha.0 + \beta.1 + h(0) = \beta + h(0)$,
$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \alpha.1 + \beta.0 + h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \alpha + h(0)$,

$f(\pi) = \alpha.0 + \beta.(-1) + h(\pi) = -\beta + h(0)$.

Donc : $h(0) = \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2}$, puis : $\alpha = f(\frac{\pi}{2}) - \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2}$, et : $\beta = f(0) - \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2} = \dfrac{f(0)-f(\pi)}{2}$.

Réciproquement, si on pose : $g = \left[f(\frac{\pi}{2}) - \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2} \right].\sin + \left[\dfrac{f(0)-f(\pi)}{2} \right].\cos$, et : $h = f - g$, alors :

- $g \in G$,
- $h(0) = f(0) - \dfrac{f(0)-f(\pi)}{2} = \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2}$,

  $h(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) - \left[f(\frac{\pi}{2}) - \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2} \right] = \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2}$, et :

  $h(\pi) = f(\pi) + \dfrac{f(0)-f(\pi)}{2} = \dfrac{f(0)+f(\pi)}{2}$,

  soit : $h(0) = h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = h(\pi)$, donc : $h \in H$.
- $g + h = f$, par construction.

Conclusion : tout élément de E se décompose de façon unique comme somme d'un élément de G et d'un élément de H et ces deux sous-espaces vectoriels sont bien supplémentaires dans E.

62. On peut remarquer que : $G = (X-a)^2.\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire l'ensemble des multiples de $(X-a)^2$.
Or $(X-a)^2$ est dans F et G donc ces deux espaces ne sont pas supplémentaires.
En revanche, $\mathbb{R}_1[X]$ et G sont supplémentaires, puisque l'unique décomposition d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ suivant ces deux espaces est garanti par le théorème sur la division euclidienne par $(X-a)^2$.

Applications linéaires, projecteurs.

63. a. Notons tout d'abord que u est bien un endomorphisme de E, puis :
$\forall\ f \in E$, $(f \in \ker(u)) \Leftrightarrow (f'' = 0) \Leftrightarrow (\exists\ (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall\ x \in \mathbb{R},\ f(x) = a.x + b) \Leftrightarrow (f \in Vect(f_0, f_1))$,
avec : $f_0 : x \mapsto 1$, et $f_1 : x \mapsto x$.
Donc l'équivalence précédente garantit que : $\ker(u) = Vect(f_0, f_1)$, soit l'espace des fonctions affines.
Montrons que : $\mathrm{Im}(u) = E$.
Puisque : $\mathrm{Im}(u) \subset E$, il suffit de montrer l'inclusion inverse et pour cela soit : $f \in E$.
En notant φ une primitive de f sur $\mathbb{R}$, puis F une primitive de φ sur $\mathbb{R}$, alors : $\varphi' = f$, puis :
$F'' = \varphi' = f$, et : $f = u(F)$, soit donc : $f \in \mathrm{Im}(u)$.
Conclusion : $\mathrm{Im}(u) = E$.
b. Les deux sous-espaces ne sont alors pas supplémentaires dans E puisque :
$\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \ker(u) \neq \{0\}$.

64. a. Le problème revient essentiellement à montrer que : $\forall$ t $\in$ [0,1], $4.(t - t^2) \in [0,1]$.
La fonction $\varphi : t \mapsto 4.(t-t^2)$, est continue sur [0,1], croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, elle est nulle en 0 et en 1 et vaut 1 en $\frac{1}{2}$: on a bien ainsi le résultat annoncé.
Pour : $f \in E$, la fonction $T(f)$ est alors définie et continue sur [0,1] comme primitive d'une fonction µ continue sur [0,1].
De plus, la linéarité de l'intégrale sur un segment garantit que T est linéaire.
Donc T est bien un endomorphisme de E.
b. Soit : $f \in E$, telle que : $T(f) = 0$.
Alors puisque la fonction sous l'intégrale est une fonction continue de t, $T(f)$ est dérivable (et même de classe C^1) sur [0,1] et : $\forall\ x \in [0,1]$, $T(f)'(x) = f(4.(x - x^2)) = 0$.

Or la fonction φ de la question a est surjective de [0,1] dans [0,1], donc :
$\forall\ y \in [0,1],\ \exists\ x \in [0,1],\ y = 4.(x - x^2)$, et donc : $f(y) = f(4.(x - x^2)) = 0$, et : $f = 0$.
T est donc injectif.
T en revanche n'est pas surjectif car toute image par T est de classe C^1 sur [0,1], donc une fonction qui n'est que continue sur [0,1] (comme : $x \mapsto \left|x - \frac{1}{2}\right|$) ne peut avoir d'antécédent par T.

65. a. Puisque la linéarité de Δ est immédiate, il suffit de démontrer que :
$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Or c'est immédiat, car : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) \in \mathbb{R}[X]$, et : $\deg(\Delta(P)) \le \deg(P(X+1) - P(X)) \le n$.
Donc on peut définir Δ_n, endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par :
$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta_n(P) = \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
b. On peut remarquer par ailleurs, que : $\forall\ P \in \mathbb{R}[X]$, $(P \ne 0) \Rightarrow (\deg(\Delta(P)) < \deg(P))$.
En effet, si on note : $P = a_k.X^k + \ldots + a_0$, avec : $k \ge 0$, $a_k \ne 0$, alors :
$\Delta(P) = a_k.(X+1)^k + \ldots + a_0 - [a_k.X^k + \ldots + a_0] = k.a_k.X^{k-1} + \ldots$,
polynôme de degré strictement inférieur à k.
Autrement dit : $\forall\ 0 \le k \le n$, $\Delta_n(\mathbb{R}_k[X]) \subset \mathbb{R}_{k-1}[X]$.
Donc par récurrence : $\forall\ 0 \le k \le n$, $\Delta_n^k(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-k}[X]$, soit, pour : $k = n$: $\Delta_n^n(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_0[X]$.
Et comme tout polynôme constant a une image nulle par Δ, on en déduit que : $\Delta_n^{n+1}(\mathbb{R}_n[X]) = \{0\}$.
Autrement dit : $\Delta_n^{n+1} = 0$.
c. Notons alors T l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}[X]$ par : $\forall\ P \in \mathbb{R}[X]$, $T(P) = P(X+1)$, et T_n l'endomorphisme induit par T dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Alors : $\Delta_n = T_n - id_{R_n[X]}$, qu'on notera : $T_n - id_n$.
Puis : $(T_n - id_n)^{n+1} = \Delta_n^{n+1} = 0$, et comme T_n et id_n commutent, on a :
$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k}.(-1)^{n+1-k}.T^k = 0$, ce qui se traduit par :
$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k}.(-1)^{n+1-k}.T^k(P) = 0$, ou encore immédiatement :
$\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \sum_{k=0}^{n+1} a_k.P(X+k) = 0$, avec : $\forall\ 0 \le k \le n+1,\ a_k = (-1)^{n+1-k}.\binom{n}{k}$,
puisque : $\forall\ P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall\ 0 \le k \le n+1,\ T^k(P) = P(X+k)$.

66. • Considérons x non nul dans E.
Puisque x et $f(x)$ sont liés, il existe deux scalaires α et β, non tous les deux nuls, tels que :
$\alpha.x + \beta.f(x) = 0$.
Il n'est pas possible alors d'avoir : $\beta = 0$, sinon on aurait : $\alpha.x = 0$, donc : $\alpha = 0$.
On peut en déduire que : $f(x) = -\frac{\beta}{\alpha}.x$, autrement dit : $\forall\ x \in E,\ x \ne 0,\ \exists\ \lambda_x \in \mathbf{K},\ f(x) = \lambda_x.x$.
Considérons maintenant deux vecteurs x et y non nuls et formant une famille libre dans E.
Alors : $\exists\ (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_{x+y}) \in \mathbf{K}^3$, $f(x) = \lambda_x.x$, $f(y) = \lambda_y.y$, $f(x+y) = \lambda_{x+y}.(x+y)$.
Mais alors : $\lambda_{x+y}.x + \lambda_{x+y}.y = f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x.x + \lambda_y.y$, et la famille (x,y) étant libre, on en déduit que : $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
Si maintenant x et y sont liés et non nuls, alors l'un est proportionnel à l'autre, par exemple :
$\exists\ \alpha \in \mathbf{K}^*$, $y = \alpha.x$, puis : $f(x) = \lambda_x.x$, $f(y) = \lambda_y.y = \lambda_y.(\alpha.x) = \alpha.\lambda_y.y = f(\alpha.x) = \alpha.f(x) = \alpha.\lambda_x.x$.
Et comme α et x sont non nuls, on en déduit encore : $\lambda_x = \lambda_y$.

Conclusion : il existe un scalaire λ tel que : $\forall\ x \in$ E, $x \neq 0$, $f(x) = \lambda.x$, et comme cette égalité est encore valable pour : $x = 0$, f est finalement bien une homothétie.

• Si E est de dimension finie, on peut adapter la démonstration en reprenant la première partie pour les vecteurs $(e_1,...,e_n)$ d'une base de E, et pour lesquels on a donc : $\lambda_1 = ... = \lambda_n = \lambda$ (valeur fixe).

Mais si on a : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $f(e_i) = \lambda.e_i$, alors par combinaison linéaire c'est encore vrai pour tout vecteur de E et f est bien une homothétie.

67. E est évidemment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et il est immédiat que l'ensemble F des suites complexes (α_n) qui vérifient la relation de récurrence : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 6.\alpha_n$, est un sous-espace vectoriel de E.
L'équation caractéristique associée est : $r^2 - r - 6 = 0$, dont les racines sont -2 et 3.
Donc F est un espace de dimension finie égale à 2, dont une base est formée des deux suites géométriques $((-2)^n)$ et (3^n).
Pour montrer que p est un projecteur de E, il suffit de montrer que : $\forall\ u \in \mathbb{C}^n$, $p(p(u)) = p(u)$.
Or si pour u donnée, on note : $v = p(u)$, alors l'image de v est la suite w telle que :

- $w_0 = v_0$,
- $w_1 = v_1$,
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = w_{n+1} + 6.w_n$,

et on constate par récurrence double que : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n$.
Donc : $w = v$, soit : $p(p(u)) = p(u)$
p est donc bien un projecteur de E, sur l'espace F, et le noyau de p est simplement le sous-espace vectoriel des suites complexes dont les deux premiers termes sont nuls.

68. a. Les relations proposées donnent dans l'ordre :
$\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Im}(h)$, et donc l'égalité des trois images.
En effet : $\forall\ y \in \mathrm{Im}(h)$, $\exists\ x \in$ E, $y = h(x) = fog(x) = f(g(x))$, et : $y \in \mathrm{Im}(f)$,
de même pour les autres relations.
Puis : $\ker(h) \supset \ker(g) \supset \ker(f) \supset \ker(h)$, et à nouveau l'égalité des trois noyaux.
En effet, on a de même : $\forall\ x \in$ E, $(g(x) = 0) \Rightarrow (f(g(x)) = 0) \Rightarrow (h(x) = 0)$.
b. O y va : $f^2 = (goh)of = gog = g^2 = (hof)og = hoh = h^2$.
Puis : $f^5 = g^2oh^2of = go(goh)o(hof)gofog = goh = f$.
c. On constate que : $\forall\ x \in$ E, si : $x = y + z$, avec : $y \in \mathrm{Im}(f)$, $z \in \ker(f)$, alors : $\exists\ a \in$ E, $y = f(a)$.
Puis : $f^4(y) = f^4(x) - f^4(z) = f^4(x) = f^5(a) = f(a) = y$, et : $z = x - y = x - f^4(x)$.
On vérifie alors que le seul couple (y, z) ainsi trouvé convient, car :

- $y = f^4(x) \in \mathrm{Im}(f)$,
- $f(z) = f(x - f^4(x)) = f(x) - f^5(x) = 0$, $z \in \ker(f)$),
- $y + z = x$.

Bref, les deux espaces sont bien supplémentaires dans E.

69. a. Il est immédiat que : $\forall\ x \in \ker(f)$, $x \in \ker(gof)$, et donc : $\ker(f) \subset \ker(gof)$.
Puis, si : $x \in \ker(gof)$, alors : $gof(x) = 0$, et : $f(x) = fog(f(x)) = f(0) = 0$, d'où : $x \in \ker(f)$.
Donc on a aussi : $\ker(gof) \subset \ker(f)$, d'où l'égalité des deux noyaux.
De même, on a évidemment : $\mathrm{Im}(gof) \subset \mathrm{Im}(g)$, et :
$\forall\ y \in \mathrm{Im}(g)$, $\exists\ x \in E$, $y = g(x) = g(fog(x)) = gof(g(x)) \in \mathrm{Im}(gof)$,
d'où l'égalité des deux images.
b. Pour : $x \in E$, si : $x = y + z$, avec : $y \in \mathrm{Im}(g)$, $z \in \ker(f)$, alors :
$\exists\ a \in E$, $y = g(a)$, et : $f(x) = f(g(a)) + f(z)$.
Donc : $f(x) = a + 0$, et : $y = g(a) = g(f(x))$, puis : $z = x - gof(x)$.
Réciproquement, ce seul couple trouvé convient car :

- $y \in \mathrm{Im}(g)$,
- $f(z) = f(x) - f(gof(x)) = f(x) - (fog)(f(x)) = f(x) - f(x) = 0$, soit : $z \in \ker(f)$,
- $y + z = x$.

On a donc bien la supplémentarité des deux sous-espaces vectoriels dans E.

c. Si E est de dimension finie, on peut évidemment en conclure que : $g = f^{-1}$, par exemple parce qu'alors f est surjectif ($\forall\ y \in$ E, $y = fog(y) = f(g(y))$), donc bijectif par la théorème du rang.
Plus généralement, le résultat est vrai si (et seulement si) f est bijectif.
Attention, en dimension infinie, le résultat est faux comme le montre le contrexemple :
E = ℝ[X], $\forall\ P \in$ E, $f(P) = P'$, et : $g(P) = Q$, avec : $\forall\ x \in$ ℝ, $Q(x) = \int_0^x P(t).dt$.
Il est clair que : $fog = id_E$, et que f n'est pas bijectif.

d. On a immédiatement : $(gof)o(gof) = go(fog)of = goid_E of = gof$,
donc gof est un projecteur de E, sur $\mathrm{Im}(g)$ dans la direction $\ker(f)$.

70. a. Soit : $y \in \mathrm{Im}(f+g)$.
Alors : $\exists\ x \in$ E, $y = f(x) + g(x)$, et : $y \in \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
On en déduit que :
$rg(f+g) = \dim(\mathrm{Im}(f+g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)) \leq \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = rg(f) + rg(g)$.

b. On peur écrire : $f = (f+g) + (-g)$, donc en utilisant la question a pour les deux endomorphismes qu'on vient de faire apparaître, on en déduit que : $rg(f) = rg((f+g)+(-g)) \leq rg(f+g) + rg(-g)$.
De plus : $\mathrm{Im}(-g) = \mathrm{Im}(g)$, car : $\forall\ y \in \mathrm{Im}(-g)$, $\exists\ x \in$ E, $y = -g(x) = g(-x) \in \mathrm{Im}(g)$.
L'autre inclusion étant aussi simple à établir, on a bien l'égalité, d'où :
$rg(-g) = \dim(\mathrm{Im}(-g)) = \dim(\mathrm{Im}(g)) = rg(g)$.
Donc : $rg(f) \leq rg(f+g) + rg(g)$, et on conclut que : $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$.
Mais f et g jouent des rôles symétriques, donc on a aussi : $(rg(g) - rg(f)) \leq rg(f+g)$.
Enfin la valeur absolue qui apparaît est l'une des deux différences que l'on vient d'évoquer, donc on en déduit la deuxième inégalité demandée.

71. a. • On a tout d'abord :
$\ker(u) \subset \ker(vou)$, car : $\forall\ x \in \ker(u)$, $vou(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, et :
$\ker(vou_{|E'}) \subset \ker(vou)$, car : $\forall\ x \in \ker(vou_{|E'})$, $x \in$ E', et : $(vou_{|E'})(x) = 0 = vou(x)$.
Donc : $\ker(u) + \ker(vou_{|E'}) \subset \ker(vou)$.
• Soit maintenant : $x \in \ker(vou)$.
Alors : $\exists\ x_0 \in \ker(u)$, $\exists\ x' \in E'$, $x = x_0 + x'$, et : $vou(x) = 0 = vou(x_0) + vou(x') = vou(x')$.
Et comme : $x' \in E'$, on a : $0 = vou(x') = vou_{|E'}(x')$, et : $x' \in \ker(vou_{|E'})$.
Donc : $x \in \ker(u) + \ker(vou_{|E'})$, et on en déduit que : $\ker(vou) \subset \ker(u) + \ker(vou_{|E'})$.
Finalement on a : $\ker(u) + \ker(vou_{|E'}) = \ker(vou)$.
• Enfin, soit : $x \in \ker(u) \cap \ker(vou_{|E'})$.
Alors : $u(x) = 0$, et : $x \in E'$, donc x est nul puisque les deux espaces sont en somme directe.
Conclusion : $\ker(vou) = \ker(u) \oplus \ker(vou_{|E'})$.

b. Soit : $\alpha_1.u(e'_1) + \ldots + \alpha_k.u(e'_k) = 0$, avec : $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in$ **K**^{k}.
Alors : $u(\alpha_1.e'_1 + \ldots + \alpha_k.e'_k) = 0$, et : $(\alpha_1.e'_1 + \ldots + \alpha_k.e'_k) \in \ker(u) \cap E'$.
Donc : $\alpha_1.e'_1 + \ldots + \alpha_k.e'_k = 0$, puis : $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, du fait de la liberté de la famille $(e'_1, \ldots, e'_k)$.
La famille $(u(e'_1), \ldots, u(e'_k))$ est ainsi une famille libre d'éléments de $\ker(v)$ car :
$\forall\ 1 \leq i \leq k$, $v(u(e'_i)) = vou(e'_i) = 0$.
On en déduit que : $\dim(\ker(v)) \geq card(u(e'_1), \ldots, u(e'_k)) = k = \dim(\ker(vou_{|E'}))$.

c. En revenant à la somme directe de la question a, on en déduit que :
$\dim(\ker(vou)) = \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(vou_{|E'})) \leq \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v))$.

72. a. Soit : $x \in$ E.
Si on peut décomposer x en : $x = y + z$, avec : $y \in \mathrm{Im}(f)$, et : $z \in \ker(g)$, alors :
$\exists\ a \in$ E, $y = f(a)$, et : $fog(x) = fog(y) + fog(z) = fog(f(a)) + f(0) = f(a) = y$, et : $z = x - y$.
Réciproquement, ce seul couple possible convient car :
- $y = fog(x) \notin \mathrm{Im}(f)$,
- $g(z) = g(x) - g(fog(x)) = g(x) - g(x) = 0$, et : $z \in \ker(g)$,
- $y + z = x$.

Donc $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont bien supplémentaires dans E.
b. On a évidemment : $f(\mathrm{Im}(g)) \subset \mathrm{Im}(f)$, comme on le vérifie immédiatement.
Puis : $\forall\ y \in \mathrm{Im}(f)$, $\exists\ x \in$ E, $y = f(x)$.
Ecrivons alors x sous la forme : $x = g(x) + z$, avec : $z \in \ker(f)$,
comme le garantit le résultat symétrique du résultat précédent.
Alors : $y = f(x) = f(g(a)) + f(z) = f(g(a)) = f(b)$, avec : $b = g(a) \in \mathrm{Im}(g)$, soit : $y \in f(\mathrm{Im}(g))$.
D'où l'égalité voulue.

73. a. Raisonnons par double inclusion :
- $\forall\ x \in u^{-1}(u(F))$, $u(x) \in u(F)$, donc : $\exists\ x' \in F$, $u(x) = u(x')$, et : $x - x' = a \in \ker(u)$, soit : $x = x' + a$, avec : $x' \in F$, $a \in \ker(u)$.
- $\forall\ x \in (F + \ker(u))$, $u(x) \in u(F)$, et par définition : $x \in u^{-1}(u(F))$).

b. • De même : $u(u^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im}(u)$.
En effet : $\forall\ y \in u(u^{-1}(F))$, $\exists\ x \in u^{-1}(F)$, $y = u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, et puisque : $x \in u^{-1}(F)$, $y = u(x) \in F$, et on a donc : $y \in F \cap \mathrm{Im}(u)$.
• Si maintenant : $y \in F \cap \mathrm{Im}(u)$, alors : $\exists\ x \in$ E, $y = u(x)$, et : $y = u(x) \in F$, autrement dit : $x \in u^{-1}(F)$, et finalement : $y \in u(u^{-1}(F))$.
c. On a l'égalité proposée si et seulement si : $F + \ker(u) = F \cap \mathrm{Im}(u)$.
On doit donc avoir :
- $\ker(u) \subset F$, d'une part puisque : $\ker(u) \subset F + \ker(u) = F \cap \mathrm{Im}(u) \subset F$, et d'autre part :
- $F \subset F + \ker(u) = F \cap \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Réciproquement, supposons qu'on ait : $\ker(u) \subset F \subset \mathrm{Im}(u)$.
Alors : $F + \ker(u) = F = F \cap \mathrm{Im}(u)$, et l'égalité voulue est bien vérifiée.

74. Puisque l'intégrale est une constante, il est clair que ϕ est un endomorphisme de F, par linéarité de l'intégrale sur [0,1].
De plus : $\forall\ f \in$ E, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = f(x) - \int_0^1 f(t).dt$, et :
$$\phi^2(f)(x) = \phi(f)(x) - \int_0^1 \phi(f)(t).dt = f(x) - \int_0^1 f(t).dt - \int_0^1 \left(f(t) - \int_0^1 f\right).dt = f(x) - 2.\int_0^1 f(t).dt + 1.\int_0^1 f.$$
Donc : $\phi^2(f)(x) = f(x) - \int_0^1 f(t).dt = \phi(f)(x)$,
et ϕ est bien une projection vectorielle.
Puis : $\forall\ f \in$ E, ($\phi(f) = 0$) $\Rightarrow$ ($\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 f$), et f est constante.
Réciproquement, toute fonction constante est bien 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et si : $f = a \in \mathbb{R}$, alors :
$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\phi(f)(x) = a - \int_0^1 a.dt = a - a = 0$, donc : $f \in \ker(\phi)$.
Donc $\ker(\phi)$ est l'ensemble des fonctions constantes.
Montrons pour terminer que $\mathrm{Im}(\phi)$ est l'ensemble des fonctions d'intégrale nulle (et 1-périodiques).
Pour cela :

• $\forall\ f \in$ E, $\int_0^1 \phi(f)(x).dx = \int_0^1 (f(x) - \int_0^1 f).dx = \int_0^1 f(x).dx - 1.\int_0^1 f = 0$.

• $\forall\ g \in$ E, telle que : $\int_0^1 g = 0$, on a : $\phi(g) = g - \int_0^1 g = g$, et : $g \in \mathrm{Im}(\phi)$.

Donc $\mathrm{Im}(\phi)$ est l'ensemble des fonctions de E d'intégrale nulle sur [0,1].

Matrices.

75. a. Puisque : $f^2 = 0$, on a : $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.

Comme de plus : $rg(f) + \dim(\ker(f)) = 4$, on peut en déduire que $rg(f)$ vaut 0,1 ou 2.

• Dans le cas où : $rg(f) = 0$, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $mat(f, \mathscr{B})$ = 0.

• Dans le cas où : $rg(f) = 1$, si on considère un vecteur de base de $\mathrm{Im}(f)$, noté e_2, un antécédent de ce vecteur noté e_1 et qu'on complète e_2, en une base (e_2, e_3, e_4) de $\ker(f)$ (qui est de dimension : $4-1=3$), alors la famille ainsi obtenue est une base de E car :

elle comporte 4 vecteurs et :

$\alpha_1.e_1 + ... + \alpha_4.e_4 = 0$, entraîne : $\alpha_1.f(e_1) + ... + \alpha_4.f(e_4) = 0$, soit : $\alpha_1.e_1 = 0$, ou : $\alpha_1 = 0$, puis la liberté de la famille (e_2, e_3, e_4) entraîne la nullité des autres coefficients.

Dans cette base, la matrice de f est : $mat(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

• Dans le cas où : $rg(f) = 2$, et en reprenant la même démarche à partir de : $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$, on montre qu'on peut trouver une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle on a : $mat(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Si on construit maintenant une base $(e_1, ..., e_r)$ de $\mathrm{Im}(f)$, qu'on appelle $(e_{n-r+1}, ..., e_n)$ des antécédents de ces vecteurs, autrement dit tels que : $\forall\ 1 \le i \le r$ r, $f(e_{n-r+i}) = e_i$, et qu'on complète la famille libre $(e_1, ..., e_r)$ en une base $(e_1, ..., e_{n-r})$ de $\ker(f)$, alors la famille ainsi obtenue est une base de E.

En effet, elle comporte bien n vecteurs et :

$\alpha_1.e_1 + ... + \alpha_n.e_n = 0$, entraîne (image par f) : $\alpha_1.0 + ... + \alpha_{n-r}.0 + \alpha_{n-r+1}.e_1 + ... + \alpha_n.e_r = 0$, et on en déduit que les $n-r$ derniers coefficients sont nuls.

Puis en revenant à l'égalité de départ, tous les autres coefficients sont nuls.

Enfin, dans la base $\mathscr{B}$ de E ainsi obtenue, on a : $mat(f, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0_{r,r} & 0_{n-2.r,r} & I_r \\ 0_{n-2.r,r} & 0_{n-2.r,n-2.r} & 0_{n-2.r,r} \\ 0_{r,r} & 0_{n-2.r,r} & 0_{r,r} \end{pmatrix}$.

76. a. Raisonnons par double implication :

{⇒] si : $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$, alors : $rg(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\ker(u))$, et le théorème du rang donne : $n = 2.rg(u)$.

Puis : $\forall\ x \in$ E, $u^2(x) = u(u(x)) = 0$, puisque : $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$, donc : $u(x) \in \ker(u)$.

[⇐] si : $u^2 = 0$, alors : $\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$, et le théorème du rang montre que : $\dim(\ker(u)) = n - rg(u) = rg(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Donc $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont égaux.

b. Là encore, par double implication :

[⇐] si la matrice de uu dans une base $\mathscr{B}$ de E vaut la matrice proposée, alors un produit par blocs montre que : $mat(u, \mathscr{B})^2 = 0$, et : $u^2 = 0$.

De plus $rg(mat(u,\mathscr{B}))=rg((0\ A))=rg(A)=\dfrac{n}{2}$, et on a : $n=2.rg(A)=2.rg(u)$.

Avec l'équivalence précédente, on en déduit que : $\ker(u)=\mathrm{Im}(u)$.

[$\Rightarrow$] si : $\ker(u)=\mathrm{Im}(u)$, alors n est pair puisque : $n=\dim(\ker(u))+\dim(\mathrm{Im}(u))=2.rg(u)$.

En notant : $n=2.p$, puis $(e_1...,e_p)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$, on peut appeler $(e_{p+1}...,e_n)$ une famille telle que : $\forall\ 1\le i\le p$, $u(e_{p+i})=e_i$.

La famille $(e_1...,e_n)$ ainsi obtenue comporte n vecteurs et elle est libre car :

$\alpha_1.e_1+...+\alpha_n.e_n=0$, entraîne (image par u) : $\alpha_1.0+...+\alpha_p.0+\alpha_{p+1}.e_1+...+\alpha_n.e_p=0$,
donc les p derniers coefficients sont nuls, puis en revenant à l'égalité de départ, on en déduit la nullité des autres coefficients.

Dans cette base $\mathscr{B}$ de E, on a : $mat(u,\mathscr{B})=\begin{pmatrix}0 & I_p\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, qui correspond bien à ce que l'on voulait.

77. Pour : $P\in$ E$_n$, alors : $\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}.P(x)\right)=-2.x.e^{-x^2}.P(x)+e^{-x^2}.P'(x)$, et : $Q(x)=-2.x.P(x)+P'(x)$.

On constate alors que si P est de degré k, alors P' est de degré au plus $k-1$ et $2.X.P$ de degré $k+1$.
Donc $u_n(P)$ est de degré $k+1$.

On en déduit que :

- u_n est une application de E$_n$ dans E$_{n+1}$ et sa linéarité est immédiate,
- si P est non nul, $u_n(P)$ est non nul puisque de degré supérieur à celui de P.

On en déduit que : $\ker(u_n)=\{0\}$.

Puis : $\dim(\mathrm{Im}(u_n))=\dim(E_n)=n$, avec le théorème du rang.

Le plus simple alors est de déterminer ensuite la matrice de u_n dans les bases $\mathscr{B}_n$ et $\mathscr{B}_{n+1}$, et pour cela :

- $u_n(1)=-2.X$,
- $\forall\ 1\le k\le n-1$, $u_n(X^k)=-2.X^{k+1}+k.X^{k-1}$.

D'où : $mat(u_n,\mathscr{B}_n,\mathscr{B}_{n+1})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2\end{pmatrix}$, matrice de taille $(n+1)\times n$.

L'image est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n$[X] engendré par les polynômes $(2.X^{+1}-k.X^{k-1})$, pour : $1\le k\le n-1$, et et le polynôme $-2.X$.

78. Pour cela, on note u l'application de $\mathbb{R}_n$[X] dans lui-même qui à un polynôme P associe le polynôme Q défini par : $Q=\sum_{i=0}^{n}P^{(i)}\left(\dfrac{X}{2^i}\right)$.

u est alors linéaire et c'est donc un endomorphisme de E.
De plus, si : $\deg(P)=k\ge 0$, alors :

$\forall\ 0\le i\le k$, $\deg\left(P^{(i)}\left(\dfrac{X}{2^i}\right)\right)=k-i$, et : $\forall$ k < i ≤ n, $P^{(i)}\left(\dfrac{X}{2^i}\right)=0$.

Donc l'image de P est une somme de polynômes de degrés distincts (et du polynôme nul) : c'est donc un polynôme non nul et u est donc injectif.

u est donc un automorphisme de $\mathbb{R}_n$[X], et : $\forall\ Q\in\mathbb{R}_n$[X], $\exists\,!\ P\in\mathbb{R}_n$[X], $Q=\sum_{i=0}^{n}P^{(i)}\left(\dfrac{X}{2^i}\right)$.

Pour : $n=3$, et : $Q=X^3$, on pose : $P=a.X^3+b.X^2+c.X+d$, et :

$$\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) = P(X) + P'\left(\frac{X}{2}\right) + P''\left(\frac{X}{4}\right) + P'''\left(\frac{X}{8}\right),$$

soit : $\sum_{i=0}^{n} P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right) = a.X^3 + \left(b + \frac{3}{4}.a\right).X^2 + \left(c + b + \frac{3}{2}.a\right).X + (d + c + 2.b + 6.a)$.

En résolvant le système, on obtient : $a = 1$, $b = -\frac{4}{3}$, $c = -\frac{3}{4}$, $d = -\frac{15}{4}$, soit : $P = X^3 - \frac{3}{4}.X^2 - \frac{3}{4}.X - \frac{15}{4}$.

79. Pour : $n = 1$, la matrice A est nulle et donc n'est pas inversible.
Pour : $n \geq 2$, $A = U - I_n$, où U est la matrice ne comportant que des 1.
Alors : $A^2 = U^2 - 2.U + I_n$, puisque les matrices commutent, et : $A^2 = n.U - 2.U + I_n$, soit :
$A^2 = (n-2).U + I_n = (n-2).(A + I_n) + I_n = (n-2).A + (n-1).I_n$.
Donc : $A^2 - (n-2).A = (n-1).I_n$, et : $A.(A - (n-2).I_n) = (n-1).I_n$.

A est donc inversible et : $A^{-1} = \frac{1}{n-1}.(A - (n-2).I_n) = \frac{1}{n-1}.U - I_n = \frac{1}{n-1}.\begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}$.

80. a. En notant u l'endomorphisme canoniquement associé à A, et $(e_1 ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$,
alors : $u(e_1) = e_2$, …, $u(e_{n-1}) = e_n$, et : $u(e_n) = e_1$.
Par récurrence, on en déduit que :
$\forall\ 1 \leq k \leq n-1$, $\forall\ 1 \leq i \leq n-k$, $u^k(e_i) = e_{i+k}$, et : $\forall\ n-k+1 \leq i \leq n$, $u^k(e_i) = e_{i+k-n}$.
En particulier : $u^n = id_{R^n}$.
Ensuite : $\forall\ k \in \mathbb{N}$, avec : $r = k \pmod n$, où : $1 \leq r \leq n-1$, $A^k = A^r$.
b. On obtient alors :
$\forall\ k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = (A + I_n)^k$, et comme les deux matrices commutent, la formule du binôme s'applique.
Soit : $M^k = (A + I_n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.A^i$, que l'on peut réduire, si : $k > n$.

En particulier : $M^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}.A^i = \begin{pmatrix} 2.\binom{n}{0} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \binom{n}{1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{n}{1} & 2.\binom{n}{0} \end{pmatrix}$.

Calcul de déterminants.

81. Sur chaque ligne de $\det(A')$, on peut factoriser par $(-1)^i$ et sur chaque colonne par $(-1)^j$.
Donc : $\det(A') = (-1)^{\sum_{i=1}^{n} i}.(-1)^{\sum_{j=1}^{n} j}.\det(A) = \det(A)$.

82. Dans $\det(A)$, on remplace chaque ligne L_i par : $L'_i = L_i + L_n$, pour : $1 \leq i \leq n-1$.
Chaque terme de la nouvelle ligne L'_i est alors égal à 0, 2 ou -2, pour : $1 \leq i \leq n-1$, et dans chacune de ces lignes, on peut factoriser par 2, les termes restants étant des entiers.
Autrement dit : $\det(A) = 2^{n-1}.\det(A')$, où A' est une matrice constituée d'entiers égaux à 0, 1 ou -1.
Or il est immédiat par récurrence sur n que le déterminant d'une matrice de taille n uniquement constituée

de 0, 1 ou -1 est un entier relatif.
Donc on conclut alors que $\det(A)$ est bien un élément de ℤ, divisible par 2^{n-1}.

83. Raisonnons comme proposé par récurrence.
Si A est une matrice 1×1 vérifiant les hypothèses de l'énoncé, alors : $|\det(A)| = |a_{1,1}| = a_{1,1} \leq 1$.
Supposons maintenant le résultat vrai pour toute matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$, et vérifiant les hypothèses proposées, et soit A une matrice de taille $n\times n$, telle que :
$\forall\ 1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq a_{i,j}$, et : $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \leq 1$.
Développons alors $\det(A)$ suivant par exemple sa dernière ligne.
On obtient : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}.\Delta_{n,j}$, puis : $|\det(A)| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{n,j}|.|\Delta_{n,j}| = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}.|D_{n,j}|$,
où $D_{n,j}$ est le déterminant d'une matrice $A_{n,j}$ extraite de A, de taille $(n-1)\times(n-1)$, dont les coefficients sont positifs et tels que :
$\forall\ 1 \leq i \leq n-1$, $\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} a_{i,k} \leq \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \leq 1$.
Autrement dit, toutes les matrices $A_{n,j}$ précédentes vérifient la même propriété que A, et :
$\forall\ 1 \leq j \leq n$, $|D_{n,j}| = |\det(A_{n,j})| \leq 1$, puis :
$|\det(A)| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}.|D_{n,j}| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \leq 1$, soit le résultat voulu, ce qui termine la récurrence.

84. a. Ce premier résultat s'obtient bien sûr par récurrence sur k.
Il est immédiat pour : $k = 0$, et si on le suppose vrai pour une valeur k entière donnée, alors :
$$A.B^{k+1} = (A.B^k).B = (B^k.(A + k.I_n)).B = B^k.A.B + k.B^{k+1} = B^k.(B.A + I_n) + k.B^{k+1}$$
$$= B^{k+1}.A + (k+1).B^{k+1},$$
c'est-à-dire ce que l'on voulait obtenir, ce qui termine la récurrence.
b. On en déduit que :
$\forall$ k ∈ ℕ*, $\det(A.B^k) = \det(B^k.A + k.B^k) = \det(B^k).\det(A + k.I_n)$, soit :
$\det(B^k).(\det(A) - \det(A + k.I_n)) = 0$.
Supposons maintenant que : $\det(B) \neq 0$.
Alors : $\forall\ k \in$ ℕ*, $\det(A + k.I_n) = \det(A)$.
Or l'application $f : x \mapsto \det(A + x.I_n)$, est polynomiale en x de degré n, ce qui peut se montrer par récurrence, en utilisant deux étapes :
• toute matrice de taille $n\times n$ dont les coefficients sont des fonctions affines de x a un déterminant qui est un polynôme en x de degré au plus n, à l'aide d'un développement par rapport à une ligne,
• c'est un polynôme de degré effectivement n et de coefficient dominant égal à 1 en développant par rapport à la dernière colonne par exemple.
En effet, cela conduit à une somme de n produits :
- ceux formés d'un terme constant et d'un déterminant qui est un polynôme de degré au plus n d'après la première étape,
- celui correspondant au produit de $(a_{n,n} + x)$ et du déterminant extrait de taille $(n-1)\times(n-1)$ qui est par hypothèse de récurrence un polynôme de degré $(n-1)$ et de coefficient dominant égal à 1.
Donc : $x \mapsto \det(A + x.I_n) - \det(A)$, est également un polynôme de degré n et ne peut s'annuler en une infinité de valeurs (ici les valeurs entières : $k \in$ ℕ*).
Conclusion : on a bien : $\det(B) = 0$.
c. Enfin, on a évidemment : $tr(B) = tr(A.B - B.A) = tr(A.B) - tr(B.A) = 0$.

85. a. Ecrivons la matrice proposée : $M(a,b) - x.J = \begin{pmatrix} c-x & b-x & \cdots & b-x \\ a-x & c-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-x \\ a-x & \cdots & a-x & c-x \end{pmatrix}$.

Pour son déterminant, on peut remplacer chaque colonne C_k par $C_k - C_1$, et ceci, pour : $2 \leq k \leq n$.
Le déterminant obtenu a tous ses termes constants sauf ceux de la première colonne qui sont des fonctions affines de x.
Si maintenant on le développe suivant cette première colonne, on obtient une somme de n termes, chacun étant un produit d'un terme constant (un cofacteur formé à partir des colonnes $C_2,...,C_n$) et d'une fonction affine de x.
Donc $\varphi(x)$ se présent bien comme une fonction affine de x, soit un polynôme en x de degré au plus 1, ce qui peut s'écrire : $\exists\ (\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^2,\ \forall\ x \in \mathbf{K},\ \varphi(x) = \alpha.x + \beta$.
Or : $\varphi(a) = (c-a)^n$, et : $\varphi(b) = (c-b)^n$, car dans les deux cas, les déterminants sont triangulaires.
Dans le cas où : $a \neq b$, on peut alors résoudre le système :

$\alpha.a + \beta = (c-a)^n$,

$\alpha.b + \beta = (c-b)^n$,

qui a pour solution : $\alpha = \dfrac{(c-a)^n - (c-b)^n}{a-b}$, et : $\beta = \dfrac{b.(c-a)^n - a.(c-b)^n}{b-a}$.

Enfin : $\det(M(a,b)) = \varphi(0) = \beta = \dfrac{b.(c-a)^n - a.(c-b)^n}{b-a}$.

b. Pour cette question, on peut procéder par récurrence ou utiliser la formule théorique du déterminant.
Par exemple, on peut montrer que si A est une matrice $n \times n$ dont les coefficients sont des fonctions affines de x, alors $\det(A)$ est un polynôme de degré au plus n en x, ce qui s'obtient sans problème avec une récurrence et un développement suivant une ligne ou une colonne.
La matrice $M(a,x)$ étant alors une matrice du type décrit juste au-dessus, $\psi(x)$ apparaît bien comme un polynôme en x, donc une fonction continue en x.

Donc : $\det(M(a,a)) = \psi(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \psi(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ \neq}} \dfrac{x.(c-a)^n - a.(c-x)^n}{x-a}$.

Distinguons alors deux cas :
- si : $a = c\ (= b)$, alors : $\det(M(a,a)) = 0$, si : $n \geq 2$, et : $\det(M(a,a)) = a$, si : $n = 1$.
- si : $a \neq c$, on utilise alors par exemple un développement limité à l'ordre 1, en posant : $x = a + h$.

On peut alors écrire : $x.(c-a)^n - a.(c-x)^n = a.(c-a)^n + h.(c-a)^n - a.(c-a)^n.\left(1 - \dfrac{h}{c-a}\right)^n$,

soit : $x.(c-a)^n - a.(c-x)^n = h.(c-a)^n + n.a.(c-a)^{n-1}.h + o(h)$,

et finalement : $\det(M(a,a)) = (c-a)^n + n.a.(c-a)^{n-1} = (c-a)^{n-1}.(c + (n-1).a)$.

c. On peut aussi écrire : $\det(M(a,a)) = \begin{vmatrix} c & a & \cdots & a \\ a & c & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c+(n-1).a & a & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & c & \ddots & & \vdots \\ \vdots & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a \\ c+(n-1).a & a & \cdots & a & c \end{vmatrix}$, en additionnant toutes les colonnes à la première.

Puis on factorise la première colonne et on remplace chaque ligne L_i par $L_i - L_1$, pour : $2 \leq i \leq n$.

Cela donne : $\det(M(a,a)) = (c+(n-1).a).\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & \cdots & a \\ \vdots & c-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c-a \end{vmatrix} = (c+(n-1).a).(c-a)^{n-1}$.

86. a. Comme suggéré, la n-linéarité du déterminant, appliquée à la dernière colonne, permet d'écrire :

$$\forall\ n \geq 2,\ D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} + n.D_{n-1} = (n-1)! + n.D_{n-1}.$$

b. On en déduit que : $\forall\ n \geq 2,\ \dfrac{D_n}{n!} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!}$, d'où immédiatement par récurrence :

$\forall\ n \geq 2,\ \dfrac{D_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \frac{D_1}{1!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + 2 = 1 + H_n$, et finalement : $D_n = (1+H_n).n!$.

Déterminants tridiagonaux.

87. En effectuant le développement habituel d'un tel déterminant, on constate que ($A_n(x)$) vérifie la relation de récurrence : $\forall\ n \geq 3,\ \det(A_n(x)) = (1+x^2).\det(A_{n-1}(x)) - x^2.\det(A_{n-2}(x))$.

En notant : $D_n = \det(A_n(x))$, on étudie alors l'équation caractéristique associée à la suite (D_n) qui est : $r^2 - (1+x^2).r + x^2 = 0$, et dont les racines sont 1 et x^2.

• Si x est distinct de ± 1, alors : $\exists\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ n \geq 1,\ D_n = \alpha + \beta.x^{2.n}$.

Or : $D_1 = 1 + x^2 = \alpha + \beta.x^2$, et : $D_2 = 1 + x^2 + x^4 = \alpha + \beta.x^4$, d'où :

$\alpha = \dfrac{1}{1-x^2}$, $\beta = \dfrac{x^2}{x^2-1}$, et : $\forall\ n \geq 1,\ D_n = \dfrac{1-x^{2.(n+1)}}{1-x^2}$.

• Si x vaut ± 1, alors : $\exists\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ n \geq 1,\ D_n = \alpha + \beta.n$,

et on détermine à nouveau α et β avec D_1 et D_2.

Pour cela : $D_1 = 2 = \alpha + \beta$, $D_2 = 3 = \alpha + 2.\beta$, d'où : $\alpha = \beta = 1$, et : $\forall\ n \geq 1,\ D_n = n+1$.

Déterminant de Vandermonde.

88. a. On raisonne sur chaque colonne, en allant de la 2ème à la dernière.

f_1 se présente sous la forme : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x + a_1$, et si on remplace C_2 par $C_2 - a_1.C_1$, la colonne C_2 devient la deuxième colonne du Vandermonde.

Puis f_2 est de la forme : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2 + a_2.x + b_2$, et on peut remplacer la colonne C_3 par $C_3 - a_2.C_2 - b_2.C_1$, cette colonne C_3 devenant la colonne numéro 3 du Vandermonde.

En répétant cette opération sur toutes les colonnes, on aboutit à l'égalité voulue (une démonstration propre passerait par une récurrence).

b. Pour cela, on commence par écrire :

$$\forall\ k \in \mathbb{N}^*,\ \cos(k.x) = \mathrm{Re}(e^{i.k.x}) = \mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}.\cos^{k-j}(x).i^j.\sin^j(x)\right),$$

et dans cette somme on ne retient que les j pairs (pour garder la partie réelle), soit :

$$\cos(k.x) = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{k}{2.p}.\cos^{k-2.p}(x).(-1)^p.\sin^{2.p}(x) = \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor} \binom{k}{2.p}.\cos^{k-2.p}(x).(-1)^p.(1-\cos^2(x))^p,$$

ce qui montre bien que $\cos(k.x)$ est un polynôme en $\cos(x)$, de degré au plus k.

Cherchons maintenant le coefficient de $\cos^k(x)$ dans cette somme.

Il vaut : $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2.p}.(-1)^p.(-1)^p = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2.p} = 2^{k-1}$, qu'on peut retrouver en calculant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$.

Donc $\cos(k.x)$ est bien un polynôme en $\cos(x)$ de degré k et de coefficient dominant égal à 2^{k-1}.

Le déterminant Δ_n est donc du type précédent, si on commence par factoriser 2^{k-1} dans chaque colonne C_k, et on fait apparaître ainsi des polynômes normalisés en $\cos(x)$ de degré $k-1$ pour chaque colonne.

Donc : $\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos(n.a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos(n.a_{n+1}) \end{vmatrix} = 2^0.2^1...2^{n-1}. \begin{vmatrix} 1 & \cos(a_1) & \cdots & \cos^n(a_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(a_{n+1}) & \cdots & \cos^n(a_{n+1}) \end{vmatrix}$, et

finalement : $\Delta_{n+1} = 2^{\frac{n.(n-1)}{2}}.\prod_{1\le i\ne j\le n}(\cos(a_j)-\cos(a_i))$.

Déterminants, applications linéaires et matrices.

89. a. Pour calculer $\det(f)$, il suffit de trouver la matrice de f dans une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On peut choisir la base canonique, mais aussi une base plus adaptée, par exemple obtenue comme réunion d'une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (matrices symétriques) et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (matrices antisymétriques) qui sont deux sous-espaces supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Chaque vecteur de la première base (qui compte : $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n.(n+1)}{2}$, éléments) est invariant par f et chaque vecteur de la deuxième (qui en compte : $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n.(n-1)}{2}$) est changé en son opposé.

La matrice de f dans cette base est donc diagonale, elle compte $\frac{n.(n+1)}{2}$ éléments diagonaux égaux à 1, et $\frac{n.(n-1)}{2}$ égaux à -1.

Donc le déterminant de f vaut : $\det(f) = (-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}$.

b. Puisque f vérifie : $f^2 = id_{\mathcal{M}(\mathbb{R})}$, on a donc : $\det(f^2) = 1 = (\det(f))^2$, donc on pouvait prévoir qu'on aurait : $\det(f) = \pm 1$.

Plus simplement, puisque l'application transposée est bijective, on savait que $\det(f)$ serait non nul.

90. a. On peut montrer par récurrence que f est un polynôme en x de degré au plus n, avec la proposition :
toute matrice de taille $n \times n$ dont les coefficients sont des fonctions affines de x a un déterminant qui est un polynôme en x de degré au plus n.
Pour montrer que c'est un polynôme de degré effectivement n et de coefficient dominant égal à 1, on peut le faire là encore par récurrence, en développant par rapport à la dernière colonne par exemple.
En effet, cela conduit à une somme de n produits :

- ceux formés d'un terme constant et d'un déterminant qui est un polynôme de degré au plus n,
- celui correspondant au produit de $(a_{n,n}+x)$ et du déterminant extrait de taille $(n-1)\times(n-1)$ qui est

par hypothèse de récurrence un polynôme de degré $(n-1)$ et de coefficient dominant égal à 1.

b. Examinons les sommes par ligne de la matrice $(A + x.I_n)$, et pour cela, on rappelle que le coefficient générique de cette matrice est $(a_{i,i} + x.\delta_{i,i})$:

$$\forall\ 1 \leq i \leq n,\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{i,j} + x.\delta_{i,j} \right| = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{i,j} \right| < \left| a_{i,i} \right| = a_{i,i} \leq a_{i,i} + x = \left| a_{i,i} + x.\delta_{i,i} \right|,\ \text{car : } x \geq 0.$$

c. f a une limite égale à +∞ en +∞, comme polynôme.
Puis si $f(0)$ était négatif, alors par continuité, f s'annulerait entre 0 et +∞.
Or comme matrice à diagonale strictement dominante, $(A + x.I_n)$ est toujours inversible et son déterminant ne s'annule donc pas.
Conclusion : $\det(A) = f(0) > 0$.

91. a. On transforme l'égalité de départ en : $P.B = A.P$, puis : $P_1.B - A.P_1 = i.(A.P_2 - P_2.B)$.
Quitte à travailler coefficients par coefficients, on en déduit que les deux membres de l'égalité sont nuls et donc : $P_1.B = A.P_1$, et : $A.P_2 = P_2.B$.

b. Les coefficients de la matrice $(P_1 + x.P_2)$ sont affines en x.
On peut alors montrer par récurrence que l'application proposée est polynomiale en x.

c. La fonction polynomiale précédente n'est pas la fonction nulle puisqu'elle est non nulle pour : $v = i$ (la matrice $(P_1 + i.P_2)$ est inversible) donc elle admet un nombre fini de racines, et :
$\exists\ a \in \mathbb{R},\ \det(P_1 + a.P_2) \neq 0$.

d. Notons alors : $Q = P_1 + a.P_2$.
Cette matrice Q est réelle et inversible d'après la question c.
De plus : $P_1.B = A.P_1$, et : $A.P_2 = P_2.B$., donc : $(P_1 + a.P_2).B = A.(P_1 + a.P_2)$, soit : $Q.B = A.Q$, et finalement : $B = Q^{-1}.A.Q$.

e. On vient de montrer que si deux matrices réelles sont semblables par l'intermédiaire d'une matrice complexe, alors elles le sont aussi par l'intermédiaire d'une matrice réelle.