

Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

# Etude des solides déformables globalement

## Résumé

Programme - Compétences		
B214	MODELISER	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Solide déformable globalement en petites déformations (modèle poutre droite) :</li> <li>- Hypothèses de comportement (isotropie, homogénéité) ;</li> <li>- Loi de déformation élastique linéaire.</li> </ul>
B218	MODELISER	Modélisation géométrique du déplacement des points d'un solide déformable <ul style="list-style-type: none"> <li>· Hypothèse de Navier Bernoulli ;</li> <li>· Hypothèse des petits déplacements : torseur des petits déplacements d'une section droite ;</li> <li>· Torseur des déformations.</li> </ul>
B222	MODELISER	Modélisation des actions intérieures à un solide (torseur de cohésion) <ul style="list-style-type: none"> <li>· Équations d'équilibre global et local ;</li> <li>· Modélisation du champ de contraintes locales ;</li> <li>· Champ des contraintes dans une section droite ;</li> <li>· Hypothèse de Barré-de Venant.</li> </ul>
C12	RESOUDRE	Hyperstatisme : choisir un modèle et une méthode de résolution et déterminer les actions mécaniques désirées
C13	RESOUDRE	Contraintes <ul style="list-style-type: none"> <li>· Relations entre contraintes et composantes du torseur de cohésion.</li> </ul>
C14	RESOUDRE	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Déplacements des points de la ligne moyenne d'une poutre :</li> <li>- Théorème de superposition,</li> <li>- Lois de comportement.</li> </ul>

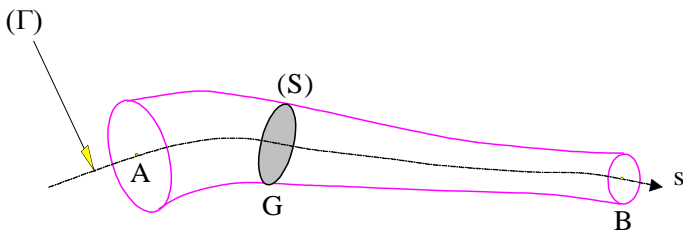
Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

## Poutres

### Hypothèses

- Géométrie**
- Longueur  $\gg$  dimensions transversales
  - Rayon de courbure de la ligne moyenne  $\gg$  dimensions section droite.
  - Gradient de variation de la section droite  $S$  faible

- Matériaux**
- Continus
  - Homogènes
  - Isotropes



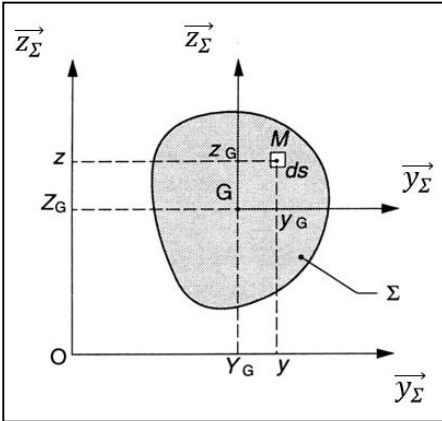
Base locale :  $B_\Sigma(\vec{x}_\Sigma, \vec{y}_\Sigma, \vec{z}_\Sigma)$  avec  $\vec{x}_\Sigma$  orientant la ligne moyenne

- Déformations**
- Les résultats de la théorie des poutres ne sont valables que dans le cas de petites déformations

- Saint Venant**
- L'état des sollicitations dans la section droite de centre  $G$ , dans une région suffisamment éloignée des points d'applications des charges extérieures appliquées à la poutre, ne dépend pas, pour les mêmes torseurs associés à ces charges, de la manière avec lesquelles elles sont appliquées.

- Navier-Bernoulli**
- Les sections planes  $\Sigma$ , normales à la ligne moyenne avant chargement, demeurent planes et normales à la ligne moyenne après chargement (déformation).

### Caractéristiques des sections



**Moments statiques ( $m^3$ )**

$$A(O, \vec{y}_\Sigma) = \int_\Sigma z dS$$

$$A(O, \vec{z}_\Sigma) = \int_\Sigma y dS$$

**Moments quadratiques ( $m^4$ )**

$$I(O, \vec{y}_\Sigma) = I_{O_{y_\Sigma}} = \int_\Sigma z^2 dS$$

$$I(O, \vec{z}_\Sigma) = I_{O_{z_\Sigma}} = \int_\Sigma y^2 dS$$

$$I(O) = I_O = \int_\Sigma (y^2 + z^2) dS = I(O, \vec{y}_\Sigma) + I(O, \vec{z}_\Sigma)$$

**Remarque :** Le centre du repère doit être le point où est calculé le moment statique ou quadratique

Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

### Centre de gravité

Méthode Intégrale

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{GM} dS = \vec{0}$$

$$Y_G = \frac{1}{S} \int_{\Sigma} y dS = \frac{1}{S} A(O, \vec{z}_{\Sigma})$$

$$Z_G = \frac{1}{S} \int_{\Sigma} z dS = \frac{1}{S} A(O, \vec{y}_{\Sigma})$$

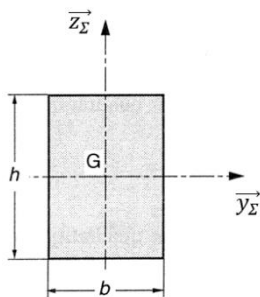
Méthode sous-sections

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_n$$

$$\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset \forall i \neq j$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{S_1 \overrightarrow{OG}_1 + S_2 \overrightarrow{OG}_2 + \dots + S_n \overrightarrow{OG}_n}{S_1 + S_2 + \dots + S_n}$$

### Sections usuelles à connaître



Rectangulaire

$$I(G, \vec{y}_{\Sigma}) = \frac{bh^3}{12}$$

$$I(G, \vec{z}_{\Sigma}) = \frac{hb^3}{12}$$

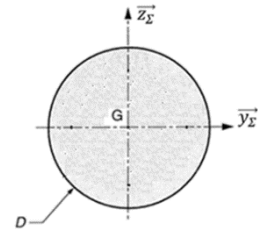
$$I(G) = \frac{hb(h^2 + b^2)}{12}$$

Circulaire

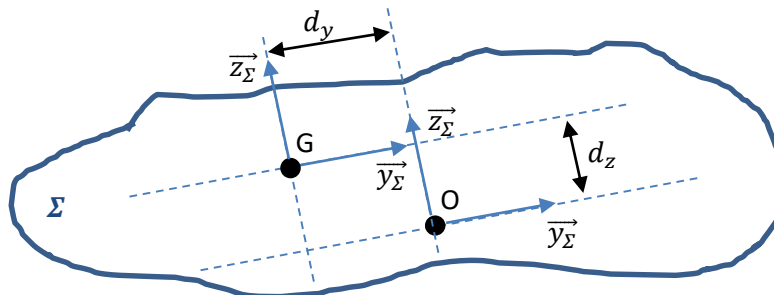
$$I(G, \vec{y}_{\Sigma}) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I(G, \vec{z}_{\Sigma}) = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$I(G) = \frac{\pi D^4}{32}$$



### Théorème de Huygens



$$I(O, \vec{y}_{\Sigma}) = I(G, \vec{y}_{\Sigma}) + S d_z^2 = I(G, \vec{y}_{\Sigma}) + S(\overrightarrow{GO} \cdot \vec{z}_{\Sigma})^2$$

$$I(O, \vec{z}_{\Sigma}) = I(G, \vec{z}_{\Sigma}) + S d_y^2 = I(G, \vec{z}_{\Sigma}) + S(\overrightarrow{GO} \cdot \vec{y}_{\Sigma})^2$$

**Application :** Connaissant les moments quadratiques  $I_{G_{i_y}}^i$  et  $I_{G_{i_z}}^i$  de sous-sections  $\Sigma_i$  de surface  $S^i$  en leurs centres de gravités  $G_i$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_n \quad ; \quad \Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset \forall i \neq j$$

$$I_{G_y} = \int_{\Sigma} z^2 dS = \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_i} z^2 dS = \sum_{i=1}^n I_{G_y}^i = \sum_{i=1}^n [I_{G_{i_y}}^i + S^i (\overrightarrow{GG}_i \cdot \vec{z})^2]$$

$$I_{G_z} = \int_{\Sigma} y^2 dS = \sum_{i=1}^n \int_{\Sigma_i} y^2 dS = \sum_{i=1}^n I_{G_z}^i = \sum_{i=1}^n [I_{G_{i_z}}^i + S^i (\overrightarrow{GG}_i \cdot \vec{y})^2]$$

**Conditions aux limites**

Type d'appui	Schéma	Conditions cinématiques
Encastrement		$x(A) = y(A) = 0$ $y'(A) = 0$
Pivot ou articulation		$x(A) = y(A) = 0$
Glissière		$y(A) = 0$ $y'(A) = 0$
Ponctuelle		$y(A) = 0$

**Exemple :**

$x(A) = y(A) = y'(A) = y(B) = 0$

**Torseur de cohésion – Torseur des efforts intérieurs**

**Définition**

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow S}\} = \{\mathcal{T}_{S \rightarrow S}\} = \{0\}$$
$$\{\mathcal{T}_{S \rightarrow S}\} = \{\mathcal{T}_{S \rightarrow I}\} + \{\mathcal{T}_{S \rightarrow II}\} = \{0\}$$

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{II \rightarrow I}\} = \{\mathcal{T}_{S \rightarrow II}\} = -\{\mathcal{T}_{S \rightarrow I}\}$$

Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

### Eléments de réduction

$$\{\mathcal{J}_C\} = \begin{pmatrix} N(s) & M_t(s) \\ T_y(s) & M_{f_y}(s) \\ T_z(s) & M_{f_z}(s) \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{B}_\Sigma \\ \\ G \end{matrix}$$

A exprimer dans la base locale  $\mathcal{B}_\Sigma$

Symbole	Nom
$N$	Effort normal (suivant $\vec{x}_\Sigma$ )
$T_y$	Effort tranchant suivant $\vec{y}_\Sigma$
$T_z$	Effort tranchant suivant $\vec{z}_\Sigma$
$M_t$	Moment de torsion
$M_{f_y}$	Moment fléchissant suivant $\vec{y}_\Sigma$
$M_{f_z}$	Moment fléchissant suivant $\vec{z}_\Sigma$

### Tronçons de poutres

On définit un tronçon de poutre comme une portion de poutre dans laquelle l'expression de chacun des éléments de réductions du torseur de cohésion est une fonction de l'abscisse curviligne dont la formule ne change pas. Chaque tronçon est numéroté à l'aide d'un chiffre.

On découpe une poutre en tronçons :

- aux points d'application d'efforts concentrés et de couples
- aux points où les conditions aux limites changent : application d'un effort linéique etc.
- aux lieux où la géométrie de la ligne moyenne de la poutre change, il y aura ici aussi discontinuité d'éléments de réduction du torseur de cohésion.
- aux lieux où la géométrie de la section change
- aux lieux où le matériau change

**Remarque :** En cas de variations de géométrie, penser à exprimer les torseurs de cohésion en fonction de l'abscisse curviligne  $s$ .

Quelle que soit la sollicitation étudiée, dès lors qu'il y a  $n$  tronçons dont les interfaces sont en  $x = x_i$ , la déformée étudiée  $f(x)$  s'exprimera d'une manière différente dans chaque tronçon  $f_i(x)$  tel que

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \forall x \in ]0, x_1[ \\ \dots \\ f_i(x) \forall x \in ]x_{i-1}, x_i[ \\ \dots \\ f_n(x) \forall x \in ]x_{n-1}, x_n[ \end{cases}$$

Il y aura alors continuité de la poutre, soit les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} f_2(x_1) = f_1(x_1) \\ \dots \\ f_i(x_{i-1}) = f_{i-1}(x_{i-1}) \\ \dots \\ f_n(x_{n-1}) = f_{n-1}(x_{n-1}) \end{cases} ; \begin{cases} f_2'(x_1) = f_1'(x_1) \\ \dots \\ f_i'(x_{i-1}) = f_{i-1}'(x_{i-1}) \\ \dots \\ f_n'(x_{n-1}) = f_{n-1}'(x_{n-1}) \end{cases}$$

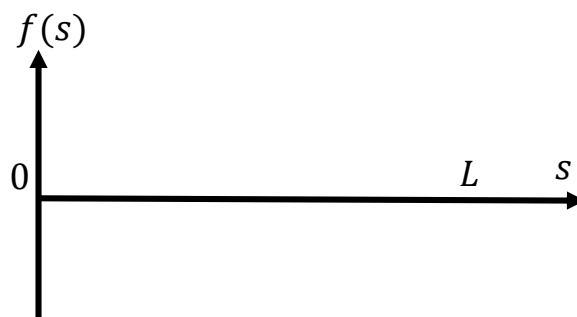
Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

### Méthode de détermination du torseur de cohésion

- Isoler la poutre
- Faire le bilan des actions extérieures
- Appliquer le PFS
  - si  $h=0$  : (optionnel) Déterminer les actions de liaison
  - Si  $h=1$  : Exprimer les actions de liaison en fonction de l'action « en trop »
- Représenter la poutre et ses actions extérieures graphiquement
- Identifier les différents tronçons de la poutre et les numéroter sur le schéma (1,2,3 ...)
- Pour chaque tronçon :
  - Etablir le schéma de la poutre complète en positionnant le point M à l'abscisse désirée et les actions extérieures sur l'intégralité de la poutre
  - Identifier les parties I et II
  - Choisir la partie isolée pour déterminer  $\{\mathcal{T}_C\}$
  - Faire apparaître les actions extérieures sur celle-ci
  - Déterminer le torseur de cohésion

### Diagrammes des sollicitations

Tracé des 6 sollicitations  $N(s), T_y(s), T_z(s), M_t(s), M_{f_y}(s), M_{f_z}(s)$  en fonction de l'abscisse curviligne, à la même échelle pour les efforts, et pour les moments, en faisant apparaître les valeurs caractéristiques



### Continuité des sollicitations

#### Point de continuité

$$\frac{d\vec{R}(s)}{ds} + f(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \vec{x}_2 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

En un point où une densité linéique d'effort est appliquée, il y a continuité de la résultante et du moment.

#### Point de discontinuité

$$\Delta \vec{R} = -\vec{F}$$

$$\Delta \vec{M} = -\vec{C}$$

En un point où un effort concentré est appliqué, il y a discontinuité de la résultante.

En un point où un couple est appliqué, il y a discontinuité du moment.

**Contraintes et déformations**

Contraintes

Déformations

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}}{dS}$$

$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa}$

$$\vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) = \sigma_{xx} \vec{x}_\Sigma + \sigma_{xy} \vec{y}_\Sigma + \sigma_{xz} \vec{z}_\Sigma$$

$$\sigma_{xx} = \vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) \cdot \vec{x}_\Sigma$$

$$\sigma_{xy} = \vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) \cdot \vec{y}_\Sigma$$

$$\sigma_{xz} = \vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) \cdot \vec{z}_\Sigma$$

$$\{T_C\} = \{T_{II \rightarrow I}\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_\Sigma \vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) dS \\ \int_\Sigma \vec{GM} \wedge \vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) dS \end{array} \right\}_G$$

$$\vec{GM} = y \vec{y}_\Sigma + z \vec{z}_\Sigma$$

$N = \int_\Sigma \sigma_{xx} dS$	$M_t = \int_\Sigma (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dS$
$T_y = \int_\Sigma \sigma_{xy} dS$	$M_{fy} = \int_\Sigma z \sigma_{xx} dS$
$T_z = \int_\Sigma \sigma_{xz} dS$	$M_{fz} = - \int_\Sigma y \sigma_{xx} dS$

Torseur des déplacements

$$\{\delta(x)\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_x \vec{x}_\Sigma + \theta_y \vec{y}_\Sigma + \theta_z \vec{z}_\Sigma \\ u \vec{x}_\Sigma + v \vec{y}_\Sigma + w \vec{z}_\Sigma \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\theta}(x) \\ \vec{U}(x) \end{array} \right\}_G$$

Torseur des petites déformations

$$\{\varepsilon(x)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma}(x) \\ \vec{\varepsilon}(x) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_x \vec{x}_\Sigma + \gamma_y \vec{y}_\Sigma + \gamma_z \vec{z}_\Sigma \\ \varepsilon_x \vec{x}_\Sigma + \varepsilon_y \vec{y}_\Sigma + \varepsilon_z \vec{z}_\Sigma \end{array} \right\}_G$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{\theta}(x)}{dx} \\ \frac{d\vec{U}(x)}{dx} + \vec{x}_\Sigma \wedge \vec{\theta}(x) \end{array} \right\}_G$$

$\vec{\gamma}(x)$  est la déformation angulaire

$\vec{\varepsilon}(x)$  est la déformation linéaire

**Principe de superposition**

Théorie de la RDM = Théorie linéaire  $\Rightarrow$  Règle de superposition

$$\left\{ \begin{array}{l} \{F_1\} \rightarrow \{\sigma_1\} \&\{D_1\} \\ \{F_2\} \rightarrow \{\sigma_2\} \&\{D_2\} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\lambda F_1\} + \{\mu F_2\} \rightarrow \{\lambda \sigma_1 + \mu \sigma_2\} \&\{\lambda D_1 + \mu D_2\}$$

Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

Contraintes



Déformations

**Lois de Hooke**

<b>Contrainte normale</b>		<b>Déformation longitudinale</b>
$\sigma_{xx}$	$= E$	$\epsilon_x$
<b>Contrainte tangentielle</b>		<b>Déformation transversale</b>
$\sigma_{xy}$	$= G$	$\epsilon_y$
$\sigma_{xz}$	$= G$	$\epsilon_z$

**E Module d'Young, Module d'élasticité en Pa (MPa)**

**G Module d'élasticité transversal**

Matériau	Module d'Young E (MPa)	Module de cisaillement G (MPa)
Acier	210 000	80 000
Aluminium	70 000	26 000

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\vec{\epsilon}(x) = \epsilon_x \vec{x}_\Sigma + \epsilon_y \vec{y}_\Sigma + \epsilon_z \vec{z}_\Sigma$$

$$\vec{C}(M, \vec{x}_\Sigma) = E \epsilon_x \vec{x}_\Sigma + G \epsilon_y \vec{y}_\Sigma + G \epsilon_z \vec{z}_\Sigma = \sigma_{xx} \vec{x}_\Sigma + \sigma_{xy} \vec{y}_\Sigma + \sigma_{xz} \vec{z}_\Sigma$$

## Dimensionnement

<p><b>Contraintes normales</b></p> $Rp_E = \frac{R_E}{\alpha}$ $\sigma_{max} < Rp_E$	<p><b>Contraintes tangentielles</b></p> $Rp_G = \frac{R_G}{\alpha}$ $R_G = \xi R_E$ $\tau_{max} < Rp_G$								
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 20%;">Matériau</th> <th style="width: 40%;">Limite élastique Re (MPa)</th> <th style="width: 40%;"><math>\xi</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Acier</td> <td style="text-align: center;">220</td> <td rowspan="2" style="text-align: center; vertical-align: middle;"><math>\in [0,5; 1]</math></td> </tr> <tr> <td>Aluminium</td> <td style="text-align: center;">40</td> </tr> </tbody> </table>		Matériau	Limite élastique Re (MPa)	$\xi$	Acier	220	$\in [0,5; 1]$	Aluminium	40
Matériau	Limite élastique Re (MPa)	$\xi$							
Acier	220	$\in [0,5; 1]$							
Aluminium	40								

**Sollicitations**

Traction Compression	Cisaillement	Torsion	Flexion	
$\begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B\Sigma}$ $G$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_{B\Sigma}$ $G$	$\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B\Sigma}$ $G$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{B\Sigma}$ $G$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0_z \end{Bmatrix}_{B\Sigma}$ $G$
$\sigma_{xx} = \frac{N}{S_0}$	$\sigma_{xy} = \frac{T_y}{S}$ $\sigma_{xz} = \frac{T_z}{S}$	$\tau = r \frac{M_t}{I_G} = rG\gamma_x$ $\gamma_x = \frac{d\alpha}{dx}$	$\sigma_{xx} = -y \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} + z \frac{M_{fy}}{I_{Gy}}$	
$\Delta L(x) = N \frac{x}{ES}$ $\Delta L = \frac{NL}{ES}$	$V_y = T_y \frac{L}{GS}$ $V_z = T_z \frac{L}{GS}$	$\Delta\theta = L \frac{M_t}{GI_G}$	$y''(x) = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}}$ $\theta_z(x) = y'(x)$	$z''(x) = -\frac{M_{fy}}{EI_{Gy}}$ $\theta_y(x) = -z'(x)$

**Sollicitations composées**

**Contraintes normales**

**Contraintes tangentielles**

Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

## Problèmes hyperstatiques

### Méthode de résolution des problèmes hyperstatiques de degré 1

- $h$  causes de l'hyperstatisme (condition géométrique associée)
- PFS et système statique
- Identifier l'inconnue statique de la liaison « en trop » (notons la  $Inc$ )
- Sollicitation et formule de déformation associée
- Relation géométrique imposée par la liaison « en trop »
- Inconnues statiques associées à la sollicitation en fonction de  $Inc$
- Éléments de réduction du torseur de cohésion associés à la sollicitation en fonction de  $Inc$
- Poser le problème isostatique associé (suppression du DDL bloqué « en trop ») avec l'inconnue  $Inc$  comme effort extérieur
- Equation de la déformée pour la sollicitation étudiée en fonction de  $Inc$
- Equation supplémentaire issue de la condition géométrique de la liaison « en trop »
- 6 équations statique + nouvelle équation  $\Rightarrow$  résolution
- Si nécessaire, détermination de l'équation de la déformée en fonction du chargement extérieur

Dernière mise à jour	Fiche résumé	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	

**Cas particuliers**

**Concentrations de contraintes**

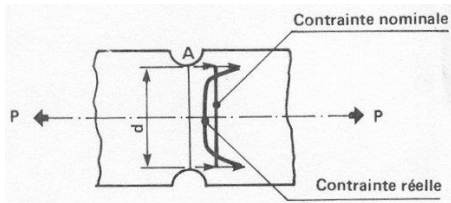
**Flambage**

Un accident de géométrie induit une contrainte locale  $\sigma_{max}$  supérieure à la contrainte nominale  $\sigma_{nom}$  issue de la théorie des poutres. Le facteur de concentration de contrainte  $K_t$  vaut :

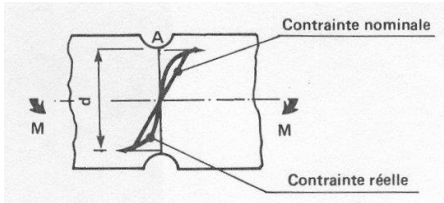
$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

Exemple de répartition de contrainte dans un arbre rainuré :

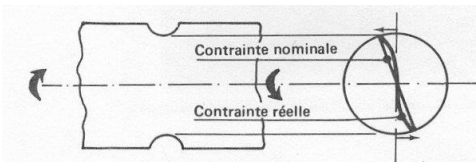
**TRACTION**



**FLEXION**



**TORSION**



Des abaques seront fournis

Instabilité en compression établie à partir d'un effort critique en compression.

