

Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

# Etude des solides déformables globalement

## DM2

### *Etude d'un anneau élastique*

Programme - Compétences		
B214	MODELISER	- Loi de déformation élastique linéaire.
B218	MODELISER	Modélisation géométrique du déplacement des points d'un solide déformable · Hypothèse des petits déplacements
B222	MODELISER	Modélisation des actions intérieures à un solide (torseur de cohésion) · Équations d'équilibre global et local ;
C13	RESOUDRE	Contraintes · Relations entre contraintes et composantes du torseur de cohésion.
C14	RESOUDRE	· Déplacements des points de la ligne moyenne d'une poutre : - Lois de comportement.

Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

## Etude d'un anneau élastique

On donne ci-dessous un extrait de norme concernant les anneaux élastiques.

ANNEAUX ÉLASTIQUES POUR ARBRES NF E 22-163																
La forme des anneaux est étudiée afin d'obtenir une pression de serrage uniforme.									* c : espace libre nécessaire au montage							
MONTAGE RECOMMANDÉ : Voir figure ci-contre.			<b>EXEMPLE DE DÉSIGNATION :</b> Anneau élastique pour arbre, d × e, NFE 22-163													
d	e	c	f	g	Tol. g	k	Fa*	d	e	c	f	g	Tol. g	k	Fa*	
3	0,4	6,8	0,5	2,8	0 - 0,04	0,3	0,47	28	1,5	38,4	1,6	26,6	0	2,1	32,1	
4	0,4	8,4	0,5	3,8	0	0,3	0,60	30	1,5	41	1,6	28,6	-0,21	2,1	32,1	
5	0,6	10,7	0,7	4,8	-0,048	0,3	1	32	1,5	43,4	1,6	30,3		2,55	31,2	
6	0,7	12,2	0,8	5,7		0,45	1,45	35	1,5	47,2	1,6	33	0	3	30,8	
7	0,8	13,2	0,9	6,7	0	0,45	2,6	40	1,75	53	1,85	37,5	-0,25	3,75	51	
8	0,8	15,2	0,9	7,6	-0,058	0,6	3	45	1,75	59,4	1,85	42,5		3,75	49	
9	1	15,4	1,1	8,6		0,6	3,5	50	2	64,8	2,15	47		4,5	73,3	
10	1	17,6	1,1	9,6		0,6	4	55	2	70,4	2,15	52		4,5	71,4	
12	1	19,6	1,1	11,5		0,75	5	60	2	75,8	2,15	57		4,5	69,2	
14	1	22	1,1	13,4	0	0,9	6,4	65	2,5	81,6	2,65	62	0	4,5	135,6	
15	1	23,2	1,1	14,3	-0,11	1,05	6,9	70	2,5	87,2	2,65	67	-0,30	4,5	134,2	
17	1	25,6	1,1	16,2		1,2	8	75	2,5	92,8	2,65	72		4,5	130	
20	1,2	29	1,3	19	0 - 0,13	1,5	17,1	80	2,5	98,2	2,65	76,5		5,25	128,4	
22	1,2	31,4	1,3	21	0	1,5	16,9	85	3	104	3,15	81,5	0	5,25	215,4	
25	1,2	34,8	1,3	23,9	-0,21	1,65	16,2	90	3	109	3,15	86,5	-0,35	5,25	217	

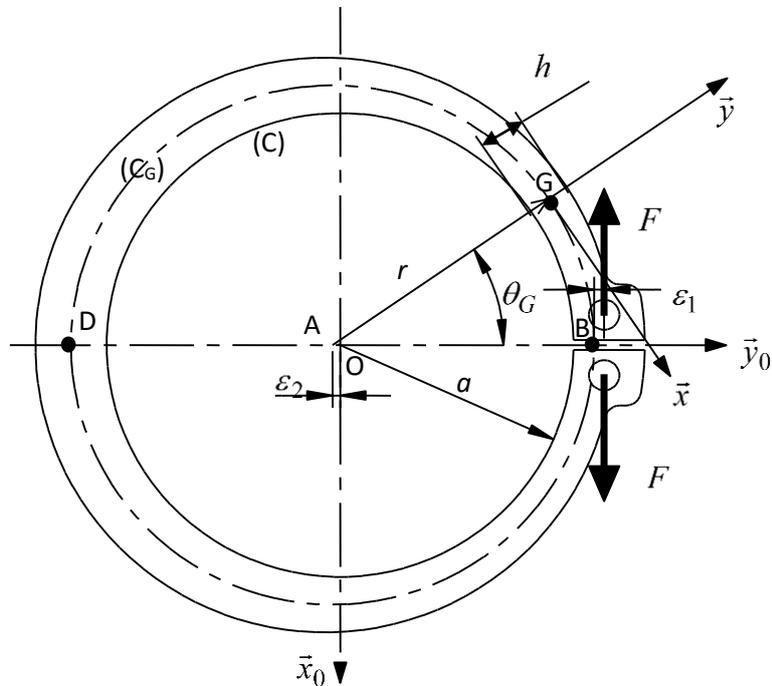
### Hypothèses :

- L'intérieur du circlips est un cercle ( $C$ ) de centre  $O$  et de rayon  $a$ . Quand il n'est pas déformé, ce cercle a un diamètre  $a_0 = 46mm$ .
- On considère (même si ce n'est pas exact) que l'ensemble des positions du centre  $G$  des sections est un cercle ( $C_G$ ) de centre  $A$  et de rayon  $r$ .
- Pour simplifier les calculs, on néglige la distance  $\varepsilon_2$  entre les points  $O$  et  $A$ .
- Pour simplifier les calculs, on néglige la distance  $\varepsilon_1$ , c'est à dire que l'on considère que la ligne d'action de la force  $F$  est tangente au cercle ( $C_G$ ) au point  $B$ .
- On considère que le circlips est une poutre de ligne moyenne ( $C_G$ ).
- La section du circlips est rectangulaire, de hauteur  $h$  (variable), d'épaisseur  $e = 2 mm$ .
- Le module 'Young du matériau vaut :  $E = 200000 MPa$

Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

### ***Torseur de cohésion – Sollicitations internes***

L'étude qui suit porte sur un anneau élastique pour arbre de diamètre 50mm, soumis à une force d'ouverture  $F$ .



$s$  va de 0 à  $2\pi r$  lorsque  $\theta_G$  va de  $2\pi$  à 0

**Question 1:** Déterminer le torseur de cohésion en fonction de  $\theta_G$ .

**Question 2:** Identifier les différentes sollicitations dans le circlip.

**Question 3:** Tracer les diagrammes des sollicitations en fonction de  $\theta_G$ .

Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

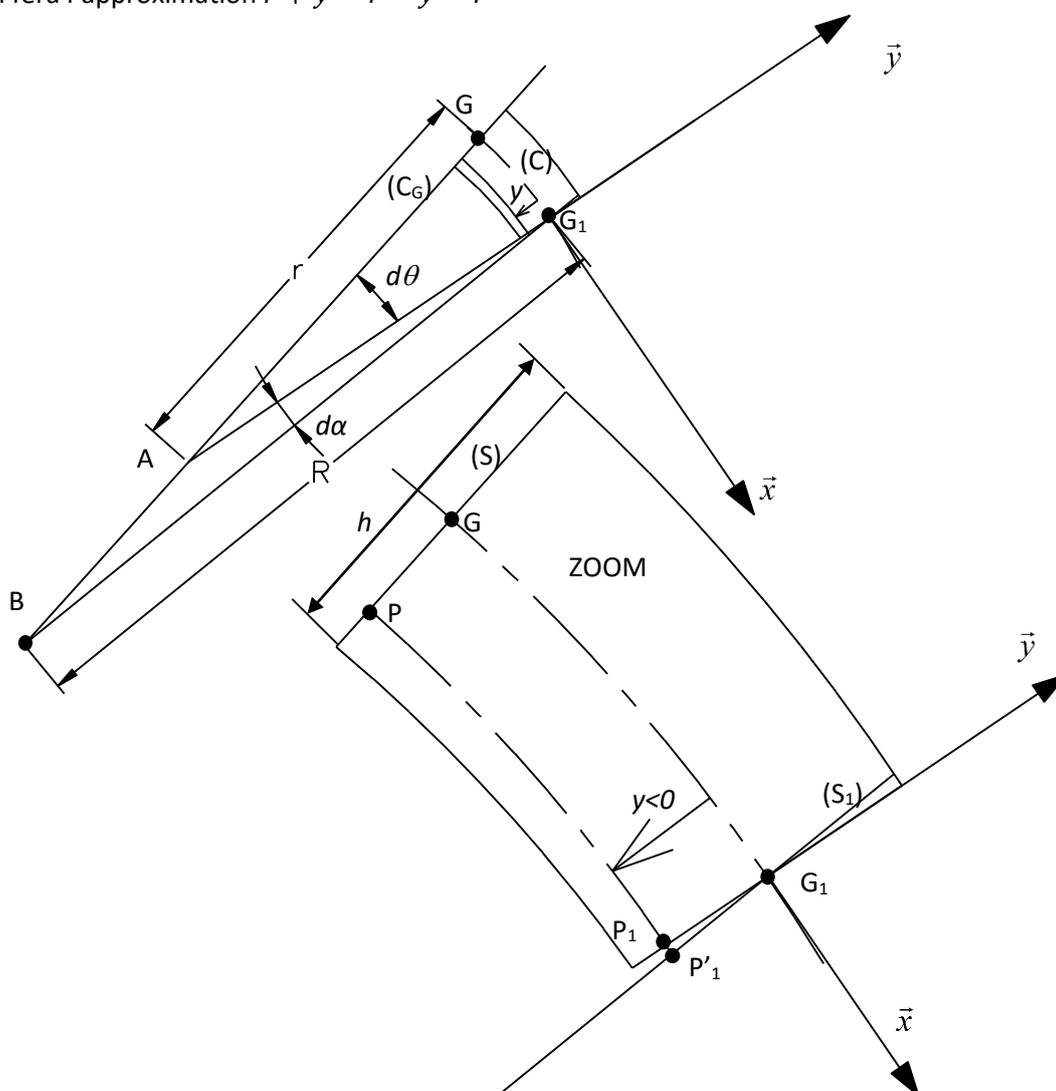
## **Etude de la déformation du circlips**

Sous l'effet de la force d'ouverture  $F$ , le circlips se déforme. Le rayon de courbure de la ligne moyenne  $r$  augmente, et devient égal à  $R$ . On cherche à déterminer la hauteur  $h(\theta_c)$  du circlips pour que  $R$  soit constant, c'est-à-dire pour que la ligne moyenne du circlips reste circulaire après déformation.

Du fait que le circlips n'est pas une poutre droite, on ne peut utiliser les résultats du cours. Il faut donc étudier les déformations spécifiques d'une poutre courbe. Considérons un petit secteur angulaire  $d\theta$ , et observons le comportement de la fibre  $PP_1$  d'ordonnée  $y$  (voir sur le zoom du secteur angulaire). Au cours de la déformation, la section droite  $S_1$  tourne de  $d\alpha$ , et la fibre  $PP_1$  s'allonge telle que sa nouvelle longueur soit la distance  $P_1P_1'$ .

**Hypothèses :** Aux hypothèses précédentes, on ajoute :

- On néglige toutes les sollicitations, sauf le moment fléchissant.
- On fera l'approximation  $r + y \approx r - y \approx r$



Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

**Question 4:** Déterminer l'allongement relatif  $\varepsilon$  de la fibre  $PP_1$  en fonction de  $y$ ,  $d\alpha$ ,  $d\theta$  et  $r$ . En déduire l'expression de la contrainte normale  $\sigma$  au point  $P_1$ .

**Question 5:** En étudiant les secteurs angulaires  $(A, G, G_1)$  et  $(B, G, G_1)$ , déterminer  $\frac{d\alpha}{d\theta}$  en fonction de  $r$  et  $R$ .

On considère un élément de surface  $dS$  de la surface  $S_1$ . On néglige la contrainte tangentielle  $\tau$  et on considère seulement la contrainte normale  $\sigma$  calculée ci-dessus. On note  $I_{G_z}$  le moment quadratique de la section droite en  $G_1$  par rapport  $\vec{z}$ .

**Question 6:** Exprimer la force  $d\vec{F}$  appliquée sur  $dS$

**Question 7:** Montrez que  $M_{f_z} = EI_{G_z} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ .

Vous remarquerez que lorsque la poutre est droite, on retrouve un résultat du cours :  $M_{f_z} = \frac{EI_{G_z}}{r}$

Lors de la déformation,  $C$  doit rester un cercle.  $R$  doit donc être constant. On donne  $r = 25.75 \text{ mm}$ . Pour monter facilement le circlips, il faut augmenter son rayon de 2mm.

**Question 8:** Déterminer numériquement  $k = \frac{M_{f_z}}{EI_{G_z}}$

**Question 9:** En déduire la hauteur  $h$  du circlips en fonction de  $E, e, k, r, \theta_G$  et  $F$ .

Pour réaliser un appui correct, il faut  $h_{max} = 7 \text{ mm}$ .

**Question 10:** En déduire l'effort  $F$  à fournir pour ouvrir le circlips.

**Question 11:** Calculer  $h(\theta_G)$  pour  $\theta_G = \left( 0, \frac{\pi}{2}, \pi \right)$

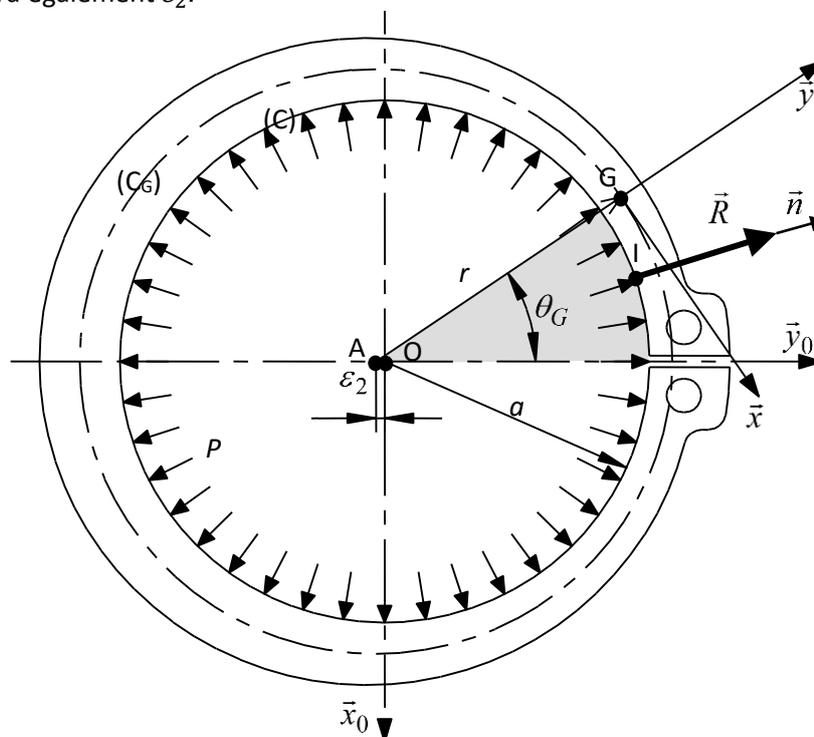
**Question 12:** Tracez la courbe donnant la hauteur  $h$  du circlips en fonction de  $\theta_G$ .

Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

On ouvre maintenant le circlips avec un cône de montage (voir figure page 1 en haut à gauche).

**Hypothèses :**

- On suppose que la pression de contact  $P$  est constante, et qu'elle est répartie sur  $360^\circ$  (on néglige la petite ouverture du circlips).
- On note  $a$  le rayon intérieur du circlips,  $r$  le rayon de sa ligne moyenne et  $e$  son épaisseur. On néglige les variations de  $a$  et de  $r$ .
- On négligera également  $\varepsilon_2$ .



**Question 13:** Déterminer, dans la base  $(\vec{x}, \vec{y})$ , la résultante  $\vec{R} = R\vec{n}$  des forces de pression du secteur angulaire grisé.

**Question 14:** Déterminer le torseur de cohésion le long du circlips en fonction de  $P, a, e, \theta_G$  et  $r$ .

**Question 15:** Identifiez les différentes sollicitations.

**Question 16:** En comparant le moment fléchissant obtenu dans cette partie avec le moment fléchissant issu de l'application de l'effort  $F$ , établir la relation entre  $P, F, a$  et  $e$  afin d'obtenir la même ouverture de  $2\text{ mm}$ .

**Question 17:** Application numérique :  $e = 2\text{ mm}$ ,  $r = 25,75\text{ mm}$ ,  $a = 23\text{ mm}$ .

Dernière mise à jour	DM RdM	Denis DEFAUCHY
05/01/2016	Anneau élastique	

### ***Maintien du circlips dans sa rainure***

Quand le circlips est placé dans sa rainure de diamètre  $g = 47 \text{ mm}$ , il est légèrement ouvert. La pression de contact  $P$  exercée par l'arbre sur le circlips est supposée constante, répartie sur  $360^\circ$  (on néglige la petite ouverture du circlips) et vaut :  $P = 3,57 \text{ MPa}$

Soit  $f = 0,2$ , le coefficient d'adhérence entre l'arbre et le circlips.

**Question 18: Donner l'expression littérale du couple  $C$  qu'il applique au circlips pour le faire tourner dans sa rainure.**

**Question 19: Application numérique.**