

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

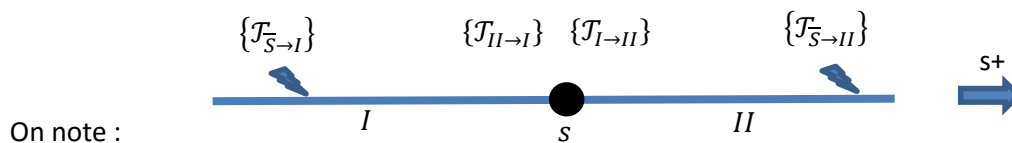
A.IV. Tenseur de cohésion – Tenseur des efforts intérieurs

A.IV.1 Définition

La poutre étudiée S est en équilibre sous l'action des charges extérieures représentées par le tenseur :

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow S}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{0\}$$

En s , abscisse curviligne de la section en G , définissant la frontière entre les parties I et II , chaque partie est considéré encastré avec l'autre.



- $\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow II}\}$ le tenseur des actions extérieures sur la partie II .
- $\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow I}\}$ le tenseur des actions extérieures sur la partie I .

L'équilibre de la poutre s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow S}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow I}\} + \{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow II}\} = \{0\}$$

On introduit le tenseur des actions de II sur I à l'abscisse s par : $\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{II \rightarrow I}\}$.

L'équilibre de la partie I s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow I}\} + \{\mathcal{T}_{II \rightarrow I}\} = \{0\}$$

L'équilibre de la partie II s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow II}\} + \{\mathcal{T}_{I \rightarrow II}\} = \{0\}$$

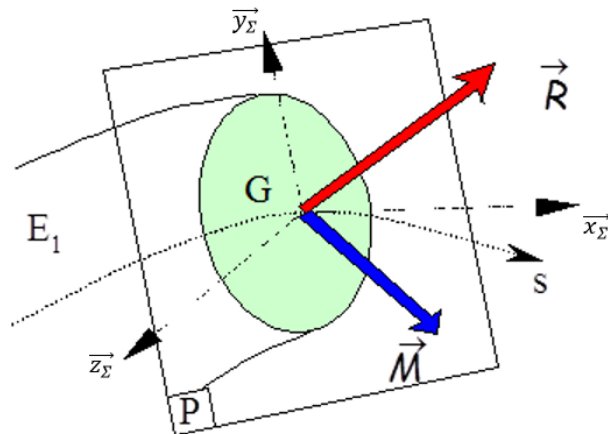
On a donc :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{II \rightarrow I}\} = \{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow II}\} = -\{\mathcal{T}_{\bar{S} \rightarrow I}\}$$

Ce tenseur traduit la cohésion des deux parties et définit les actions élémentaires exercées par la partie II sur la partie I . On l'appelle tenseur de cohésion, ou tenseur des efforts/actions intérieures.

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.IV.2 Eléments de réduction du torseur de cohésion

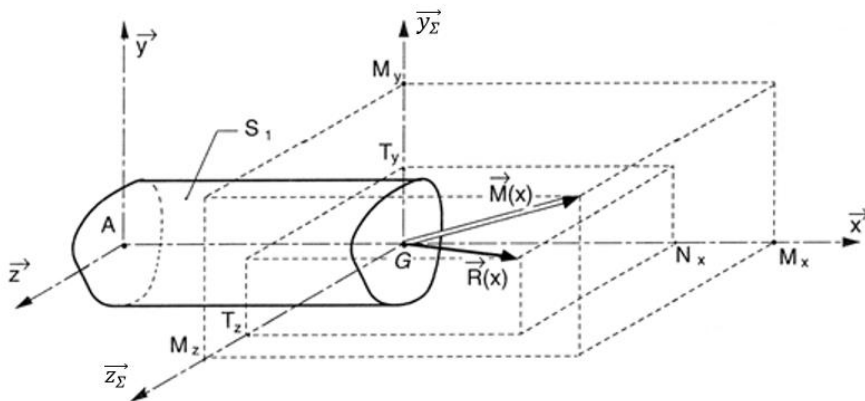


Dans une section Σ d'abscisse s , les éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs $\{\mathcal{T}_C\}$ s'écrivent en G dans la base locale \mathcal{B}_Σ .

$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{pmatrix} N(s) & M_t(s) \\ T_y(s) & M_{f_y}(s) \\ T_z(s) & M_{f_z}(s) \end{pmatrix}_{G}^{\mathcal{B}_\Sigma}$$

Avec

$$\begin{cases} N(s) = \vec{R}(s) \cdot \vec{x}_\Sigma \\ T_y(s) = \vec{R}(s) \cdot \vec{y}_\Sigma \\ T_z(s) = \vec{R}(s) \cdot \vec{z}_\Sigma \\ M_t(s) = \vec{M}(s) \cdot \vec{x}_\Sigma \\ M_{f_y}(s) = \vec{M}(s) \cdot \vec{y}_\Sigma \\ M_{f_z}(s) = \vec{M}(s) \cdot \vec{z}_\Sigma \end{cases}$$



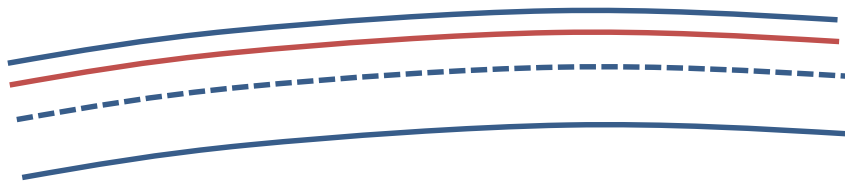
Chacune de ces sollicitations porte un nom précis :

Symbole	Nom	Sollicitation	Déformation
---------	-----	---------------	-------------

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

N	Effort normal (suivant \vec{x}_Σ)	Traction Compression	Allongement/Raccourcissement de la poutre
T_y	Effort tranchant suivant \vec{y}_Σ	Cisaillement	Glissement relatif des sections
T_z	Effort tranchant suivant \vec{z}_Σ	Cisaillement	
M_t	Moment de torsion	Torsion	Rotation relative des sections
M_{f_y}	Moment fléchissant suivant \vec{y}_Σ	Flexion	Allongement/Raccourcissement des fibres selon leur position par rapport au plan neutre Modification de la courbure de la poutre
M_{f_z}	Moment fléchissant suivant \vec{z}_Σ	Flexion	

Une fibre étant un fil de matière parallèle à la ligne moyenne :



A.IV.3 Tronçons de poutre - Définition

On définit un tronçon de poutre comme une portion de poutre dans laquelle l'expression de chacun des éléments de réductions du torseur de cohésion est une fonction de l'abscisse curviligne dont la formule ne change pas. Chaque tronçon est numéroté à l'aide d'un chiffre.

A.IV.4 Méthode générale de calcul du torseur de cohésion

A.IV.4.a Méthode

- Isoler la poutre
- Faire le bilan des actions mécaniques extérieures. En général, on nomme les inconnues en un point A $X_A, Y_A, Z_A, L_A, M_A, N_A$. Attention, en cas de présence de plusieurs pièces, préférer les notations $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, L_{ij}, M_{ij}, N_{ij}$ pour des questions de signes
- Appliquer le PFS à la poutre
 - o si $h=0$: (optionnel) Déterminer les actions de liaison
 - o Si $h=1$: Exprimer les actions de liaison en fonction de l'action « en trop »
- Représenter la poutre et ses actions extérieures graphiquement en prenant garde aux signes et sens des flèches. Le mieux est de ne pas écrire de flèches au-dessus des vecteurs, d'écrire leur composante positive et d'orienter la représentation (flèche représentant couple ou effort) dans le sens du signe
- Identifier les différents tronçons de la poutre et les numéroté sur le schéma (1,2,3 ...)
- Pour chaque tronçon :
 - o Etablir le schéma de la poutre complète en positionnant le point M à l'abscisse désirée et les actions extérieures sur l'intégralité de la poutre
 - o Identifier les parties I et II
 - o Choisir la partie isolée pour déterminer $\{\mathcal{T}_C\}$
 - o Faire apparaître les actions extérieures sur celle-ci
 - o Déterminer le torseur de cohésion

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.IV.4.a.i Présence d'un tronçon

Soit une poutre droite encastree soumise à un effort orthogonalement à sa ligne moyenne, un effort dans son axe et un couple autour de son axe.



$$AB = L \quad ; \quad \vec{C} = C\vec{x} \quad ; \quad \vec{F}_1 = -F_1\vec{y} \quad ; \quad \vec{F}_2 = -F_2\vec{x}$$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

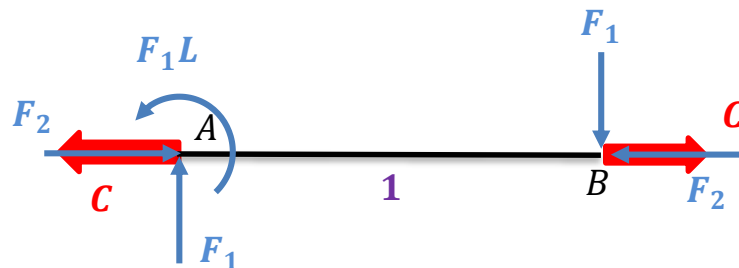
On isole S :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow S}\} + \{\mathcal{T}_{actions \rightarrow S}\} = \begin{pmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{pmatrix}_A^B + \begin{pmatrix} -F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B^B = \{0\}$$

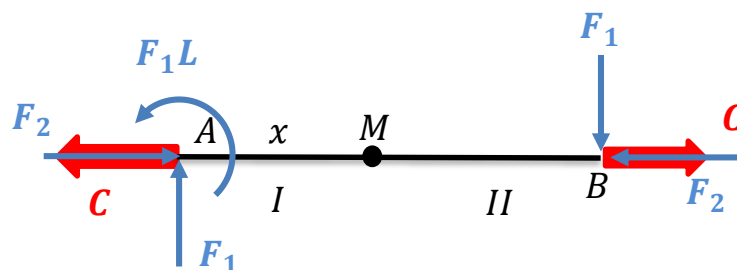
$$\begin{pmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{pmatrix}_A^B + \begin{pmatrix} -F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1 L \end{pmatrix}_A^B = \{0\}$$

$$X_A = F_2 \quad - \quad Y_A = F_1 \quad - \quad Z_A = 0 \quad - \quad L_A = -C \quad - \quad M_A = 0 \quad - \quad N_A = F_1 L$$

On refait le schéma de la poutre avec les efforts extérieurs connus et on identifie les tronçons, ici il n'y en a qu'un noté « 1 »



On étudie le seul tronçon 1, on place un point M sur ce tronçon d'abscisse x et on coupe de la poutre en 2 parties notées I et II :



Finalement, on détermine le torseur de cohésion dans le tronçon étudié :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{S \rightarrow II}\} = \begin{pmatrix} -F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_B^B = \begin{pmatrix} -F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(L-x) \end{pmatrix}_M^B = \begin{pmatrix} N(x) & M_t(x) \\ T_y(x) & M_{f_y}(x) \\ T_z(x) & M_{f_z}(x) \end{pmatrix}_{B\Sigma}^M$$

$$\begin{bmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^B \wedge \begin{bmatrix} -F_2 \\ -F_1 \\ 0 \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_1(L-x) \end{bmatrix}^B$$

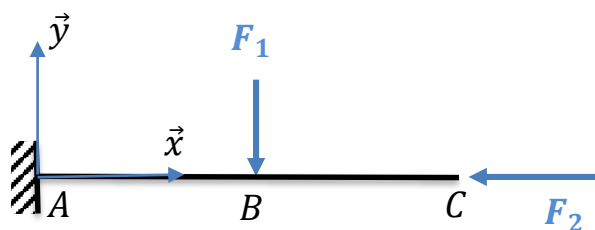
Avec :

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = -F_2 \quad \forall x \in]0; L[\\ T_y(x) = -F_1 \quad \forall x \in]0; L[\\ T_z(x) = 0 \quad \forall x \in]0; L[\\ M_t(x) = C \quad \forall x \in]0; L[\\ M_{f_y}(x) = 0 \quad \forall x \in]0; L[\\ M_{f_z}(x) = -F_1(L - x) \quad \forall x \in]0; L[\end{array} \right.$$

A.IV.4.a.ii Présence de plusieurs tronçons

Soit une poutre droite suivante encastree soumise à deux efforts en des points différents.



$$AB = l \quad ; \quad AC = L \quad ; \quad \vec{F}_1 = -F_1 \vec{y} \quad ; \quad \vec{F}_2 = -F_2 \vec{x}$$

• Détermination des actions extérieures

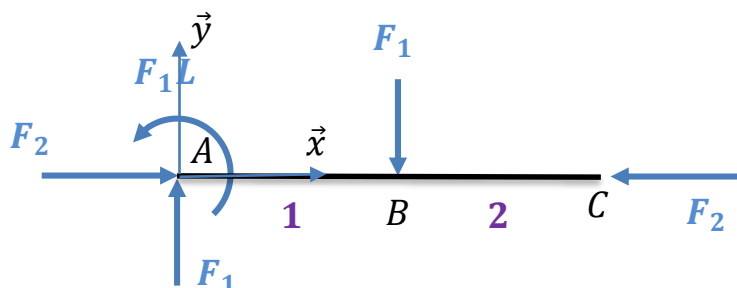
On isole S :

$$\{T_{0 \rightarrow S}\} + \{T_{actions \rightarrow S}\} = \begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1 l \end{Bmatrix}_A = \{0\}$$

$$X_A = F_2 \quad - \quad Y_A = F_1 \quad - \quad Z_A = 0 \quad - \quad L_A = 0 \quad - \quad M_A = 0 \quad - \quad N_A = F_1 l$$

On refait le schéma de la poutre avec les efforts extérieurs connus et on identifie les tronçons, ici y en a deux notés « 1 » et « 2 ».



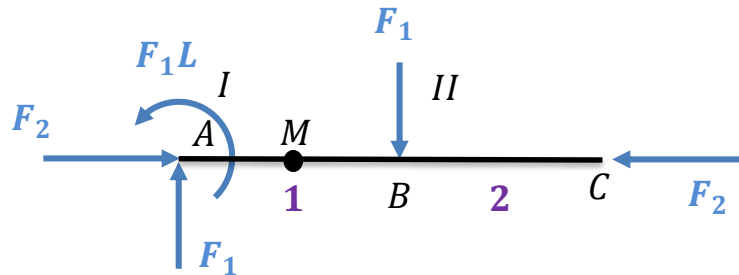
Tronçon 1 : $x \in]0; l[$

Tronçon 2 : $x \in]l; L[$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

• Tronçon 1

On étudie le tronçon 1, on place un point M sur ce tronçon d'abscisse x et on coupe de la poutre en 2 parties notées I et II :



On détermine alors le tenseur de cohésion dans le tronçon étudié :

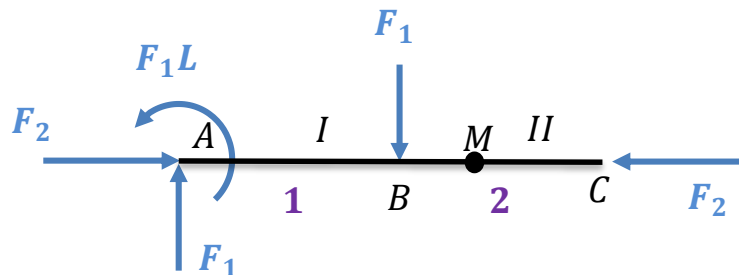
$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{S \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B + \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(l-x) \end{Bmatrix}_M \quad \forall x \in]0, l[$$

Soit

$$\begin{cases} N(x) = -F_2 \quad \forall x \in]0, l[\\ T_y(x) = -F_1 \quad \forall x \in]0, l[\\ T_z(x) = 0 \quad \forall x \in]0, l[\\ M_t(x) = 0 \quad \forall x \in]0, l[\\ M_{f_y}(x) = 0 \quad \forall x \in]0, l[\\ M_{f_z}(x) = -F_1(l-x) \quad \forall x \in]0, l[\end{cases}$$

• Tronçon 2

On étudie le tronçon 2, on place un point M sur ce tronçon d'abscisse x et on coupe de la poutre en 2 parties notées I et II :



On détermine alors le tenseur de cohésion dans le tronçon étudié :

$$\{\mathcal{T}_C\} = \{\mathcal{T}_{S \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M \quad \forall x \in]l, L[$$

Soit

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

$$\begin{cases} N(x) = -F_2 \quad \forall x \in]l, L[\\ T_y(x) = 0 \quad \forall x \in]l, L[\\ T_z(x) = 0 \quad \forall x \in]l, L[\\ M_t(x) = 0 \quad \forall x \in]l, L[\\ M_{f_y}(x) = 0 \quad \forall x \in]l, L[\\ M_{f_z}(x) = 0 \quad \forall x \in]l, L[\end{cases}$$

A.IV.5 Diagrammes des sollicitations

A.IV.5.a Définition

Ces diagrammes sont la représentation graphique des 6 sollicitations identifiées au paragraphe précédent en fonction de l'abscisse curviligne s de la poutre le long de Γ . Généralement, pour les poutres droites, s correspond à x . Toutefois, dans des cas de poutres plus complexes, il faudra bien les représenter en fonction de s .

Chaque diagramme représente l'intégralité de la poutre.

Il convient de respecter la même échelle en abscisse afin d'identifier rapidement les différentes sollicitations dans une section donnée et si possible de les représenter les uns en-dessous des autres.

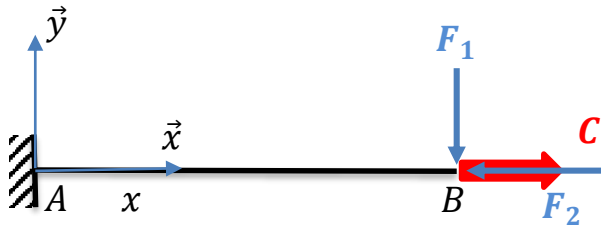
Enfin, on y fait apparaître les valeurs remarquables.

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

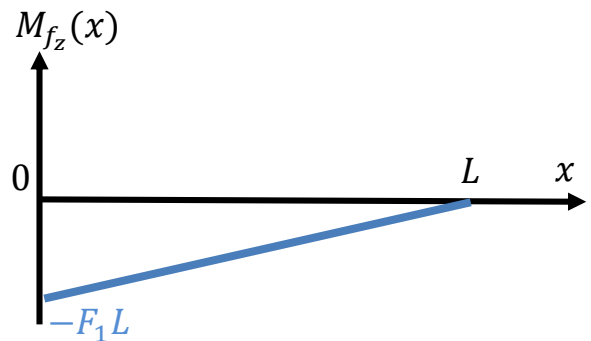
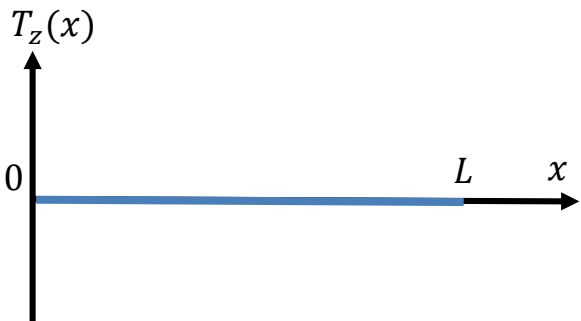
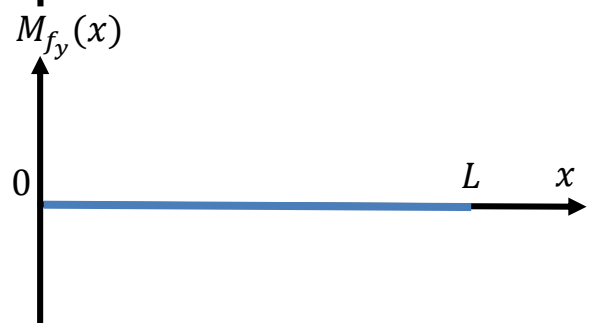
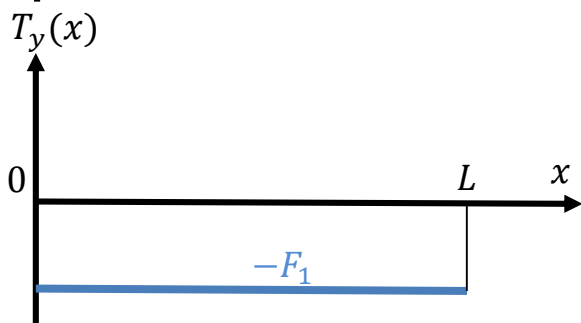
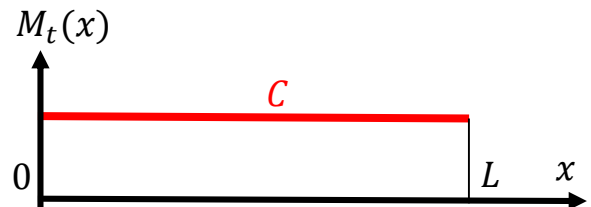
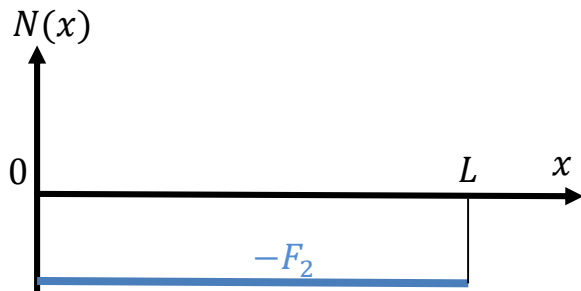
A.IV.5.b Application

A.IV.5.b.i Exemple 1

Traçons les diagrammes des sollicitations du premier exemple que nous venons de traiter.



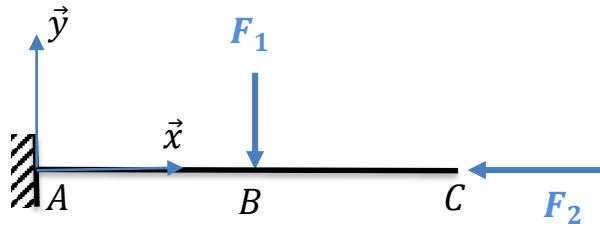
$$\{\mathcal{J}_C\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & C \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(L-x) \end{Bmatrix}_M^B$$



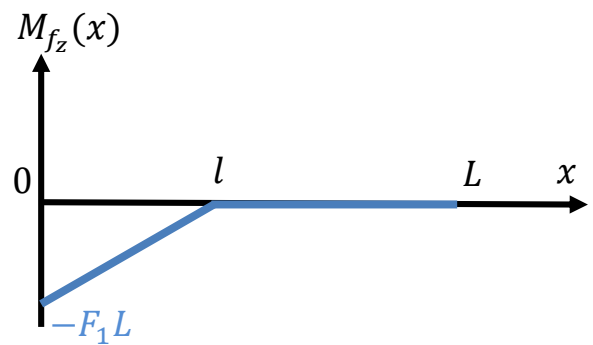
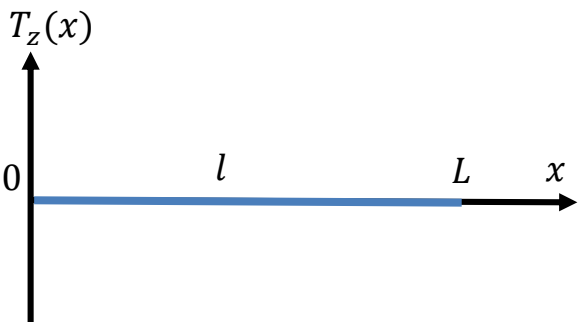
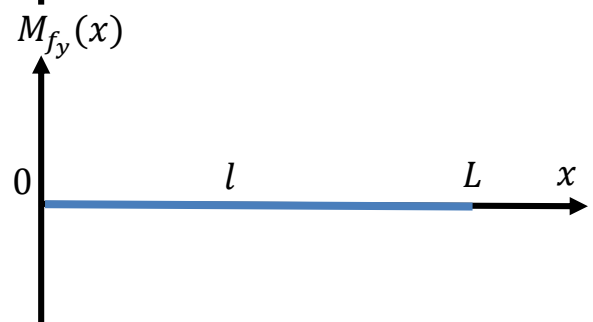
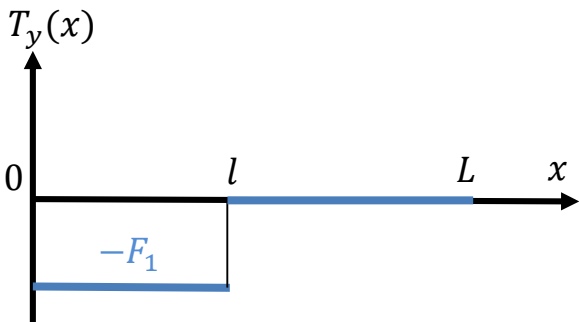
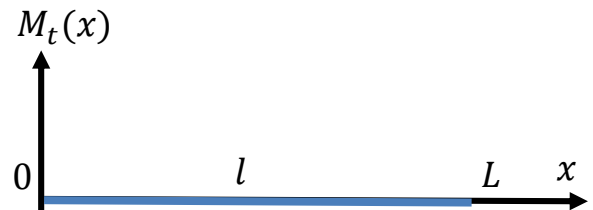
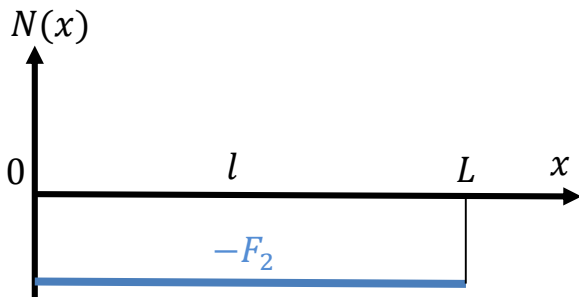
On pourra ne pas représenter les diagrammes pour lesquels la sollicitation reste nulle sur toute la poutre.

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.IV.5.b.ii Exemple 2



$$\{\mathcal{T}_C\} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(l-x) \end{pmatrix}^B & \forall x \in]0, l[\\ \begin{pmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^B & \forall x \in]l, L[\end{cases}_M$$



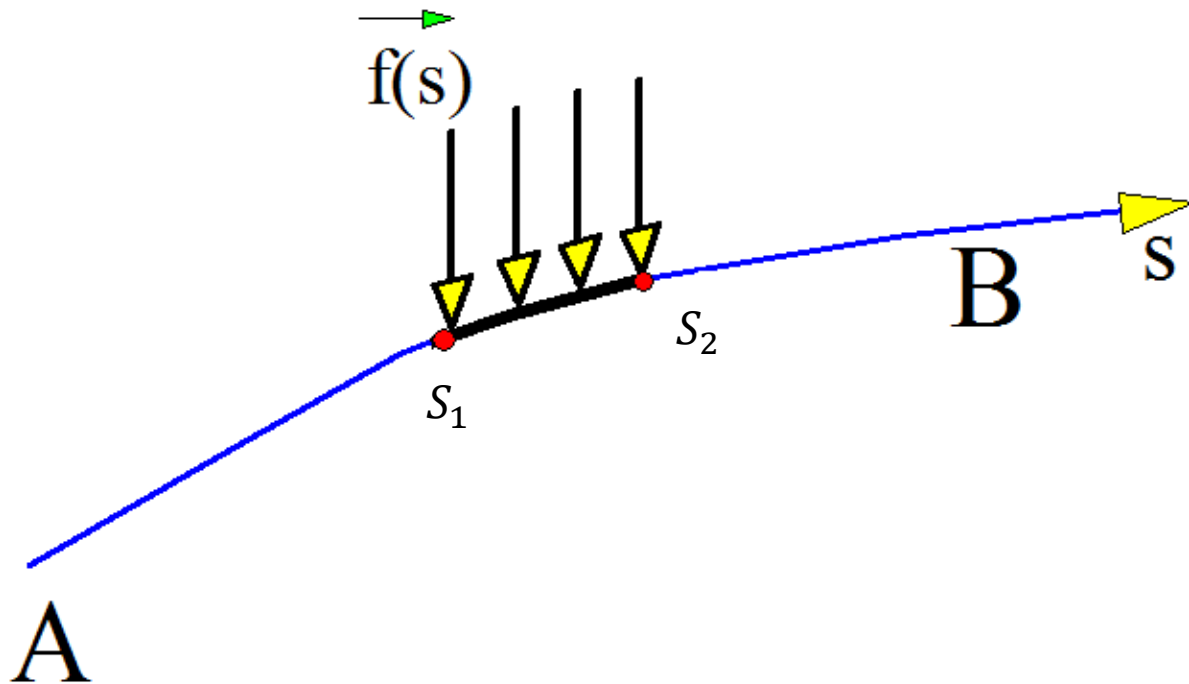
Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.IV.6 Continuité des sollicitations

Une discontinuité de résultante ou de moment est un point où sa dérivée tend vers l'infini. Déterminons dans quelles conditions les composantes du tenseur de cohésion sont continues ou discontinues.

A.IV.6.a Point de continuité

A.IV.6.a.i Schéma



On suppose une répartition continue d'effort entre S_1 et S_2 . Notons $\vec{f}(s)ds$ l'action élémentaire appliquée au point d'abscisse s .

Isolons le tronçon entre S_1 et S_2 . Il est soumis à :

- l'action de la partie de poutre avant S_1 : $-\vec{R}(S_1)$
- l'action de la partie de poutre après S_2 : $\vec{R}(S_2)$
- l'action de la charge linéique : $\int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds$

A.IV.6.a.ii En termes d'effort

On applique le PFS à ce tronçon en résultante :

$$\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds = \vec{0}$$

$$\int_{S_1}^{S_2} d\vec{R}(s) + \int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s)ds = \vec{0}$$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{d\vec{R}(s)}{ds} + \vec{f}(s) \right] ds = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{R}(s)}{ds} + f(s) = \vec{0}$$

Conclusion : la dérivée de la résultante n'est pas infinie en un point où il y a une répartition linéique d'effort.

A.IV.6.a.iii En termes de moment

On se place en un point O quelconque et on applique le PFS à ce tronçon en moment :

$$-\left[\vec{M}(S_1) + \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1) \right] + \left[\vec{M}(S_2) + \overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) \right] + \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds = \vec{0}$$

$$\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1) + \overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1) + \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds = \vec{0}$$

$$\int_{s_1}^{s_2} d\vec{M}(s) + \int_{s_1}^{s_2} d \left(\overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{R}(s) \right) + \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds = \vec{0}$$

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \frac{d}{ds} \left(\overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{R}(s) \right) + \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) \right) ds = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \frac{d}{ds} \left[\overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{R}(s) \right] + \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \frac{d}{ds} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{R}(s) + \overrightarrow{OG(s)} \wedge \frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \frac{d}{ds} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{R}(s) + \overrightarrow{OG(s)} \wedge \left[\frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \vec{f}(s) \right] = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \frac{d}{ds} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

Or :

$$\frac{d}{ds} \overrightarrow{OG(s)} = \vec{x}_\Sigma$$

Donc

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \vec{x}_\Sigma \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

Conclusion : la dérivée du moment n'est pas infinie en un point où il y a une répartition linéique d'effort.

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

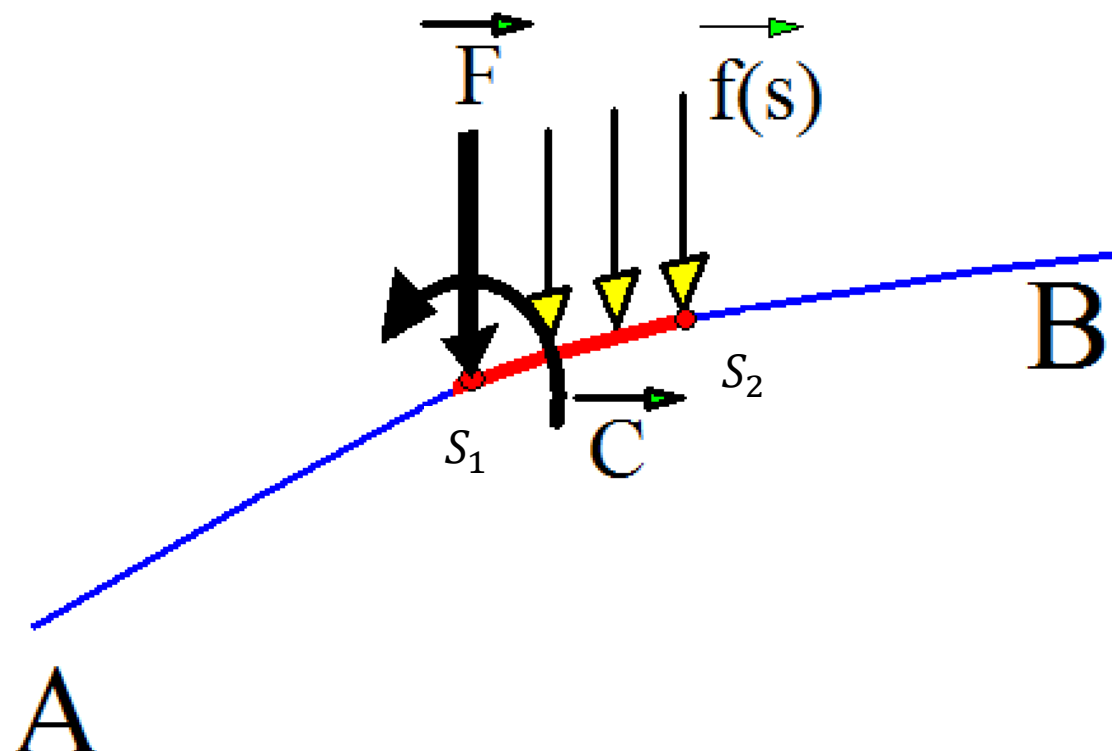
A.IV.6.a.iv Bilan

En un point où une densité linéique d'effort est appliquée, il y a continuité de la résultante et du moment.

A.IV.6.b Point de discontinuité

A.IV.6.b.i Schéma

Un point de discontinuité est un point en lequel il y a un effort concentré appliqué.



En plus des conditions précédentes, on suppose qu'en $G(S_1)$ sont appliqués un effort concentré \vec{F} et un couple \vec{C} .

Isolons le tronçon entre S_1 et S_2 . Il est soumis à :

- l'action de la partie de poutre avant S_1 : $-\vec{R}(S_1)$
- l'action de la partie de poutre après S_2 : $\vec{R}(S_2)$
- l'action de la charge linéique : $\int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s) ds$
- l'action \vec{F}
- le couple \vec{C}

Rappelons que :

$\lim_{h \rightarrow 0} [\vec{f}(x+h) - \vec{f}(x)] = \begin{cases} \vec{0} \text{ si } \vec{f} \text{ est continue} \\ \Delta \vec{f} \text{ si } \vec{f} \text{ est discontinue} \end{cases}$	$\forall (a, b) \in \mathbb{R} \int_a^b \vec{f}(s) ds = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}(s) = \vec{0}$
---	---

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.IV.6.b.ii En termes d'effort

On applique le PFS à ce tronçon en résultante :

$$\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \vec{f}(s) ds + \vec{F} = \vec{0}$$

On a :

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} [\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1)] = \Delta \vec{R}$$

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} \left[\int_s^{s+h} \vec{f}(t) dt \right] = 0$$

Soit :

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} \left[\vec{R}(S_2) - \vec{R}(S_1) + \int_s^{s+h} \vec{f}(t) dt + \vec{F} \right] = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{R} = -\vec{F}$$

Conclusion : la résultante est discontinue en un point où il y a un effort concentré.

A.IV.6.b.iii En termes de moment

On se place en un point O quelconque et on applique le PFS à ce tronçon en moment :

$$\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1) + \overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds + \vec{C} = \vec{0}$$

On a :

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} [\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1)] = \Delta \vec{M}$$

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} \left[\int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds \right] = 0$$

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} [\overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1)] = 0$$

Soit :

$$\lim_{S_2 \rightarrow S_1} \left[\vec{M}(S_2) - \vec{M}(S_1) + \overrightarrow{OG(S_2)} \wedge \vec{R}(S_2) - \overrightarrow{OG(S_1)} \wedge \vec{R}(S_1) + \int_{S_1}^{S_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds + \vec{C} \right] = 0$$

$$\Delta \vec{M} = -\vec{C}$$

Conclusion : le moment est discontinu en un point où il y a un couple.

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

A.IV.6.b.iv Bilan

En un point où un effort concentré est appliqué, il y a discontinuité de la résultante.

En un point où un couple est appliqué, il y a discontinuité du moment.

A.IV.7 Découpage d'une poutre en tronçons

L'analyse que nous venons de mener nous montre que le torseur de cohésion ne sera pas continu lors de l'application d'efforts ou de moments concentrés. Les lieux d'application d'efforts et moments concentrés seront donc des lieux de découpage des poutres en différents tronçons.

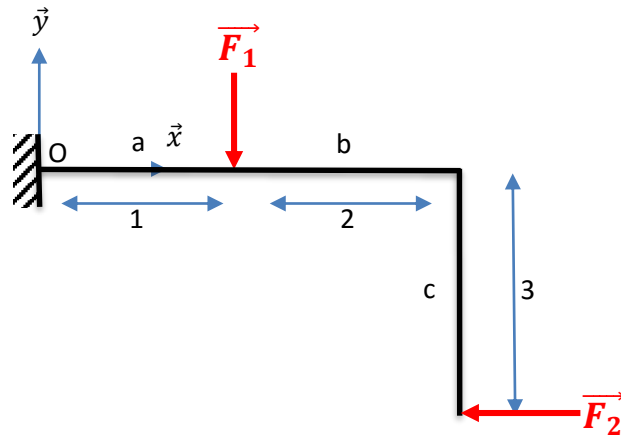
Plus généralement, les découpages de poutres en tronçons auront lieu :

- aux points d'application d'efforts concentrés et de couples
- aux points où les conditions aux limites changent : application d'un effort linéique etc.
- aux lieux où la géométrie de la ligne moyenne de la poutre change, il y aura ici aussi discontinuité d'éléments de réduction du torseur de cohésion.
- aux lieux où la géométrie de la section change
- aux lieux où le matériau change

Remarque : En cas de variations de géométrie, penser à exprimer les torseurs de cohésion en fonction de l'abscisse curviligne s .

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

Exemple :



Expression en fonction de x et y :

$$\{\mathcal{J}_C\} = \{\mathcal{J}_C^1\} = \{\mathcal{J}_{ext \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(a-x) - F_2c \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} \quad \forall x \in]0; a[$$

$$\{\mathcal{J}_C\} = \{\mathcal{J}_C^2\} = \{\mathcal{J}_{ext \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -F_2c \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} \quad \forall x \in]a; a+b[$$

$$\{\mathcal{J}_C\} = \{\mathcal{J}_C^3\} = \{\mathcal{J}_{ext \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_2 & 0 \\ 0 & -F_2(c+y) \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} \quad \text{si } x = a+b \text{ et } y \in]0; -c[$$

Expression en fonction de s :

$$\{\mathcal{J}_C\} = \{\mathcal{J}_C^1\} = \{\mathcal{J}_{ext \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ -F_1 & 0 \\ 0 & -F_1(a-s) - F_2c \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} \quad \forall s \in]0; a[$$

$$\{\mathcal{J}_C\} = \{\mathcal{J}_C^2\} = \{\mathcal{J}_{ext \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} -F_2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -F_2c \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} \quad \forall s \in]a; a+b[$$

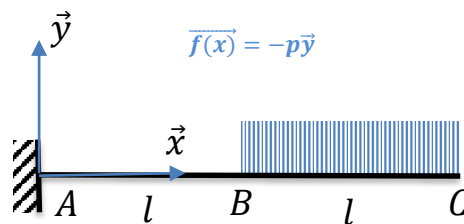
$$\{\mathcal{J}_C\} = \{\mathcal{J}_C^3\} = \{\mathcal{J}_{ext \rightarrow II}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F_2 & 0 \\ 0 & -F_2(a+b+c-s) \end{Bmatrix}_{M}^{B_\Sigma} \quad \forall s \in]a+b; a+b+c[$$

Dernière mise à jour	Cours	Denis DEFAUCHY
05/12/2015	Résistance des matériaux	7 cours / 14 h

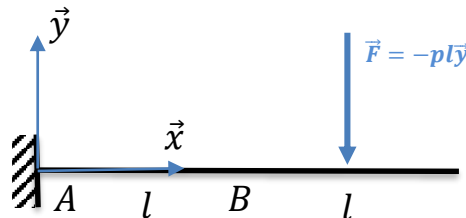
$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = \begin{cases} -F_2 \forall s \in]0; a[\\ -F_2 \forall s \in]a; a + b[\\ 0 \forall s \in]a + b; a + b + c[\end{cases} \\ T_y(x) = \begin{cases} -F_1 \forall s \in]0; a[\\ 0 \forall s \in]a; a + b[\\ -F_2 \forall s \in]a + b; a + b + c[\end{cases} \\ M_{f_z}(x) = \begin{cases} -F_1(a - s) - F_2c \forall s \in]0; a[\\ -F_2c \forall s \in]a; a + b[\\ -F_2(a + b + c - s) \forall s \in]a + b; a + b + c[\end{cases} \end{array} \right.$$

A.IV.8 Actions linéiques et torseurs de cohésion

Prenons le cas d'une poutre soumise à une action linéique sur un tronçon :



Lors du calcul du torseur de cohésion dans le tronçon AB, il est conseillé de remplacer la densité linéique d'effort par l'effort concentré représentant son action globale au point où le moment de cette action est nul. Dans le cas de l'action répartie uniformément, en son milieu :



Attention : dans le tronçon BC, il serait faux de faire la même démarche.

A.V. Contraintes et déformations

A.V.1 Contraintes internes

Des efforts traversant une section génèrent, localement, des contraintes et des déformations dans la matière dépendant de la géométrie de la section.

A.V.1.a Vecteur contrainte

En un point M d'une poutre, on peut définir une infinité d'éléments de surface de normale unitaire \vec{n} .

Soit $d\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ l'action élémentaire de S_2 sur S_1 s'exerçant en M sur la surface élémentaire dS de normale extérieure \vec{n} .