A.IV. Rapidité

A.IV.1 Définition

Soit un système supposé stable dont l'entrée est un échelon. Le système tend vers une valeur finale que nous noterons S_∞ :

$$S_\infty = \lim_{t \to +\infty} s(t)$$

La rapidité de ce système est liée au temps mis par sa réponse $s(t)$ pour atteindre une valeur proche de S_∞, voire dépasser S_∞, ou pour ne plus quitter un intervalle donné correspondant par exemple à $\pm X\%$ de S_∞.

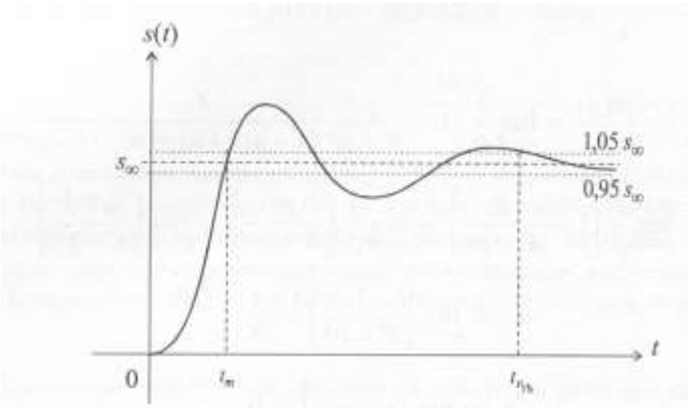
A.IV.2 Critères de rapidité

A.IV.2.a Temps de réponse à $X\%$

Le temps de réponse à $X\%$, noté $tr_{X\%}$, est le temps à partir duquel la réponse $s(t)$ ne quitte plus la plage à $\pm X\%$ de S_∞

$$\forall t > tr_{X\%}, \left(1 - \frac{X}{100}\right) S_\infty < s(t) < \left(1 + \frac{X}{100}\right) S_\infty$$

Le critère standard est le temps de réponse à 5%.



A.IV.2.b Temps de montée

On définit le temps de montée t_m comme le temps auquel la sortie franchit pour la première fois son asymptote quand c'est le cas (souvent en pratique).

A.IV.2.c Bande passante

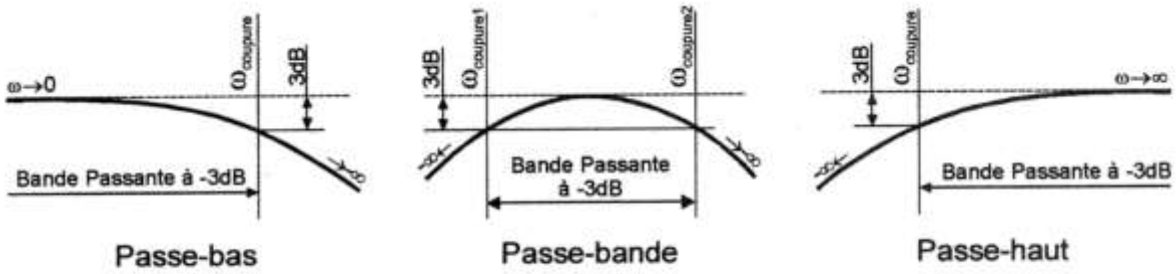
On définit la bande passante à $-X\ dB$ comme la plage de pulsations pour lesquelles le gain est supérieur à une valeur optimale de gain diminuée de $X\ dB$.

$$\omega / G_{dB} > G_{opt} - X$$

On s'intéresse en particulier à la bande passante à -3 dB. On définit ω_c, pulsation de coupure à -3 dB. Une perte de 3 dB correspond à une perte de module de 30% :

$$20 \log K - 3dB = 20 \log \frac{K}{\sqrt{2}} = 20 \log(0{,}7K)$$

Exemples :



Pour un système de type second ordre résonnant, la bande passante à -3dB est définie comme pour un passe-bas, sans tenir compte de la résonance. On pourra soit rechercher, soit éviter cette résonance suivant les applications.

Pratiquement tous les systèmes physiquement réalisables sont de type passe-bas : le module de leur fonction de transfert tend vers zéro à haute fréquence.

Cas particulier : on définit la bande passante à 0 dB comme la plage de pulsations pour lesquelles le gain est positif ($|\underline{H}| > 1$).

Les deux critères que l'on rencontre souvent sont :

- Bande passante : $BP = [0, \omega_c]$
- Bande passante à 0 dB : $BP_0 = [0, \omega_{c_0}]$

A.IV.3 Application aux systèmes du premier et second ordre

A.IV.3.a Systèmes non bouclés

A.IV.3.a.i Premier ordre

$$H(p)=\frac{K}{1+\tau p}$$

Soit une entrée échelon unitaire : $E(p)=\frac{1}{p}$

On a donc : $S(p)=\frac{1}{p}\frac{K}{1+\tau p}=\frac{K}{p}-\frac{K}{p+\frac{1}{\tau}}$

Par application de la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle du système est donc:

$$s(t)=KE_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

• **<u>Temps de réponse à 5%</u>**

Le temps de réponse à 5% est tel que :

$$KE_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=\frac{95}{100}\lim_{t\to+\infty}KE_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=0{,}95KE_0$$

$$\Leftrightarrow 1-e^{-\frac{t}{\tau}}=0{,}95$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{t}{\tau}}=0{,}05$$

$$\Leftrightarrow t=-\tau\ln 0{,}05$$

$$\Leftrightarrow t\sim 3\tau$$

Pour un système du premier ordre :

$$tr_{5\%}=3\tau=\frac{3}{\omega_0}$$

Ainsi, plus ω_0 est élevée, plus le système est rapide.

• **<u>Temps de montée</u>**

La réponse d'un premier ordre ne franchit jamais son asymptote. On ne parle donc pas de temps de montée.

• **<u>Rapidité et bande passante</u>**

$$G_{\omega_c}=G_0-3=20\log|H(0)|-20\log\sqrt{2}=20\log\frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)|=\frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}=\frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}=\sqrt{2}$$

$$1+\left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2=2$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_0}=1$$

On a donc la relation suivante :

$$\omega_c=\omega_0=\frac{1}{\tau}$$

$$t_{r5\%}=\frac{3}{\omega_c}$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment :

$$\omega_{c_0}=\omega_0\sqrt{K^2-1}$$

Ainsi, plus ω_c est grande, donc plus la bande passante à -3 dB ou à 0 dB est grande, plus le système est rapide.

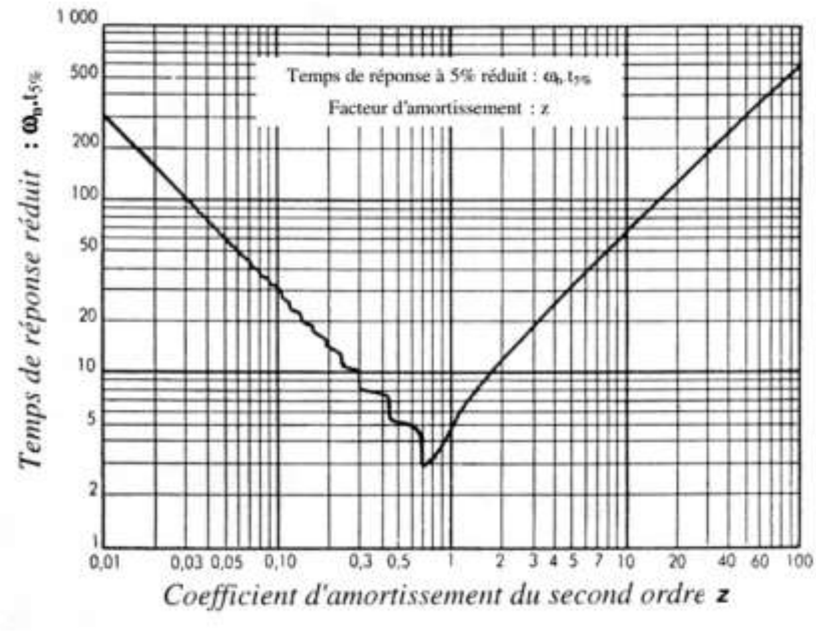
Pour un système du premier ordre, une augmentation de la bande passante à -3dB et à 0 dB provoque une augmentation de la rapidité.

A.IV.3.a.ii Deuxième ordre

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$

- **<u>Temps de réponse à 5%</u>**

Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5% d'une réponse indicielle dépend du facteur d'amortissement. La courbe suivante permet de le déterminer :



Cette courbe illustre le fait que pour un second ordre, si z est fixé, on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = k(z)$$

Il est recommandé de savoir qu'au temps de réponse le plus faible ($z = 0{,}7$), avec présence d'un dépassement , on a :

$$tr_{5\%}\omega_0 = 3$$

Ainsi, une augmentation de ω_0, correspondant à une augmentation de la bande passante à -3 dB (ω_c) et à 0 dB (ω_{c_0}), induit une augmentation de la rapidité du système.

De même, il faut savoir qu'au temps de réponse le plus faible sans dépassement ($z = 1$), on a :

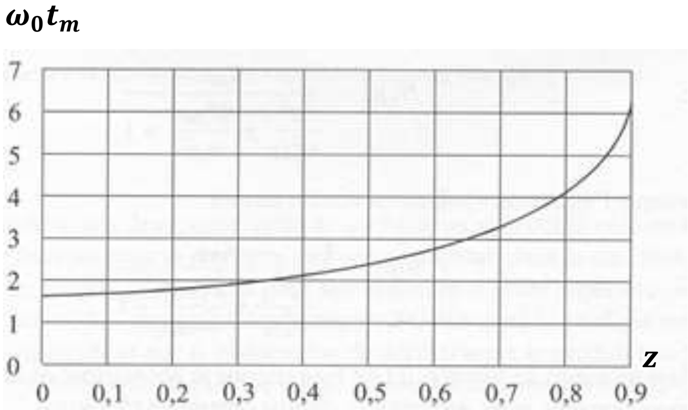
$$tr_{5\%}\omega_0 = 5$$

- **<u>Temps de montée</u>**

Dans le cas d'un système du second ordre, le temps de montée peut être défini dans le cas de la présence d'un dépassement.

C'est donc dans le cas où $z < 1$.

Dans ce cas, on obtient la courbe suivante :



L'analyse de cette fonction montre que pour les valeurs courantes du facteur d'amortissement (entre 0,2 et 0,8), on a :

$$2 < \omega_0 t_m < 4$$

Nous retiendrons de cet encadrement une valeur approchée de :

$$\omega_0 t_m \approx 3$$

Ainsi, plus ω_0 est grande, plus le temps de montée est court, plus le système est rapide.

• **Rapidité et bande passante**

Dans un système du second ordre, en résolvant l'équation :

$$G_{\omega_c} = G_0 - 3 = 20\log|H(0)| - 20\log\sqrt{2} = 20\log\frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{K}{\sqrt{\left(1-\frac{{\omega_c}^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + 4\frac{z^2{\omega_c}^2}{{\omega_0}^2}}} = \frac{K}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \left(1-\frac{{\omega_c}^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \left(2z\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1 + \frac{{\omega_c}^4}{{\omega_0}^4} - 2\frac{{\omega_c}^2}{{\omega_0}^2} + 4z^2\frac{{\omega_c}^2}{{\omega_0}^2}$$

$$X = \frac{{\omega_c}^2}{{\omega_0}^2} > 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 + (2z^2-1)2\mathrm{X} - 1 = 0$$

$$\Delta = 4(2z^2-1)^2+4>0$$

$$X = \frac{(1-2z^2)2+\sqrt{4(2z^2-1)^2+4}}{2} = (1-2z^2)+\sqrt{(2z^2-1)^2+1}$$

Comme $\omega_c > 0$

$$\omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+1}-(2z^2-1)}$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment :

$$\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+(K^2-1)}+(1-2z^2)}$$

Ainsi, une augmentation de ω_0, correspondant à une augmentation de la bande passante à -3 dB (ω_c) et à 0 dB (ω_{c_0}), induit une augmentation de la rapidité du système.

A.IV.3.a.iii Conclusions

Les systèmes du premier et second ordre sont d'autant plus rapides que leur bande passante est grande, c'est-à-dire plus leur pulsation propre ω_0 est grande.

1° ordre	2° ordre
$tr_{5\%} = 3\tau$ $\omega_c = \omega_0$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{K^2-1}$	$\omega_0 t_m \approx 3$ $tr_{5\%}\omega_0 = k(z)$ $\omega_c = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+1}-(2z^2-1)}$ $\omega_{c_0} = \omega_0\sqrt{\sqrt{(2z^2-1)^2+(K^2-1)}+(1-2z^2)}$

Ainsi, pour des systèmes bouclés du 1° et 2° ordre, augmenter leur rapidité consistera à augmenter $\omega_{0_{BF}}$ ou $\omega_{c_{BF}}$.

A.IV.3.b Systèmes bouclés

Considérons dans cet exemple des systèmes à retour unitaire.

A.IV.3.b.i Premier ordre bouclé

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}$$

$$H(p) = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}}{1 + \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p}} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO} + \tau_{BO}p} = \frac{\frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}}}{1 + \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}p}$$

On a donc les coefficients caractéristiques du système bouclé :

$$K_{BF} = \frac{K_{BO}}{1 + K_{BO}} \quad ; \quad \tau_{BF} = \frac{\tau_{BO}}{1 + K_{BO}}$$

- **<u>Temps de réponse à 5%</u>**

Comme $tr_{5\%} = 3\tau_{BF}$, plus K_{BO} est grand, plus τ_{BF} est petit, donc plus le système est rapide.

Pour un système du premier ordre bouclé à retour unitaire, le temps de réponse à 5% est d'autant plus faible (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand.

- **<u>Temps de montée</u>**

Dans le cas d'un premier ordre, la notion de temps de montée n'a pas de sens.

- **<u>Rapidité et bande passante</u>**

$$\omega_{c_{BF}} = \frac{1}{\tau_{BF}}$$

Pour un système du premier ordre bouclé à retour unitaire, la bande passante est d'autant plus grande (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand.

A.IV.3.b.ii Second ordre bouclé

$$FTBO(p)=\frac{K_{BO}}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{p^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$H(p)=\frac{\frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}}{1+\frac{2z_{BO}}{(1+K_{BO}){\omega_0}_{BO}}p+\frac{p^2}{(1+K_{BO}){{\omega_0}_{BO}}^2}}=\frac{K_{BF}}{1+\frac{2z_{BF}}{{\omega_0}_{BF}}p+\frac{p^2}{{{\omega_0}_{BF}}^2}}$$

$${\omega_0}_{BF}={\omega_0}_{BO}\sqrt{1+K_{BO}}$$

$$K_{BF}=\frac{K_{BO}}{1+K_{BO}}$$

$$z_{BF}=\frac{z_{BO}}{\sqrt{1+K_{BO}}}<z_{BO}$$

• **Temps de réponse à 5%**

Tant que $z_{BF}>\frac{\sqrt{2}}{2}$, augmenter K_{BO} diminue z_{BF} et augmente ainsi la rapidité au sens $tr_{5\%}$.

MAIS ATTENTION : continuer de diminuer z_{BF} en dessous de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ induit une ré augmentation de $tr_{5\%}$!!! Le système « est de plus en plus rapide » car il réagit de plus en plus vite, son temps de montée augmente (paragraphe suivant), mais au sens $tr_{5\%}$, il ralenti !

• **Temps de montée**

Comme ${\omega_0}_{BF}t_m\approx 3$, plus ${\omega_0}_{BF}$ est grand, soit plus K_{BO} est grand, plus le temps de montée est faible.

Pour un système du second ordre bouclé à retour unitaire, le temps de montée est d'autant plus faible (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand.

• **Rapidité et bande passante**

$$\omega_{0_{BF}} = \omega_{0_{BO}}\sqrt{1 + K_{BO}}$$

Augmenter K_{BO} augmente $\omega_{0_{BF}}$ et donc la bande passante et la bande passante à 0 db du système (cf second ordre étudié précédemment)

$$tr_{5\%}\omega_{0_{BF}} = k(z_{BF}) \quad ; \quad tr_{5\%} = \frac{k(z_{BF})}{\omega_{0_{BF}}}$$

$$t_m\omega_{0_{BF}} \approx 3 \quad ; \quad t_m \approx \frac{3}{\omega_{0_{BF}}}$$

Augmenter K_{BO}, soit augmenter $\omega_{0_{BF}}$ augmente la rapidité (temps de monté) du second ordre bouclé, mais peut avoir une influence différente sur le temps de réponse à 5%. Cela rejoint l'étude du second ordre du paragraphe précédent.

Pour un système du second ordre bouclé à retour unitaire, la bande passante est d'autant plus grande (ie système d'autant plus rapide) que le gain statique de la FTBO est grand, la rapidité du système s'en trouve augmentée, mais attention, pas forcément au sens $tr_{5\%}$.

A.IV.3.b.iii Conclusions

Pour les systèmes bouclés du premier et du second ordre à retours unitaires, plus le gain statique de la $FTBO$ est grand, plus la bande passante est importante et plus le système est rapide (temps de montés).

La démarche proposée ici ne se limite pas aux systèmes à retour unitaire, et tous les systèmes seront étudiés en termes de rapidité selon les mêmes critères.

A.IV.4 Conclusions sur la rapidité

La rapidité des systèmes est directement liée à la pulsation de coupure à -3dB, ou à la pulsation propre du système. Plus elles sont élevées, plus la rapidité est importante.

Dans le cas des systèmes bouclés du premier et second ordre, plus le gain statique de la boucle ouverte est important, plus la rapidité est bonne.